

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

الخلاصة

تحتل البرمجة الخطية في الوقت الحاضر مركزاً مرموقاً في مجالات مختلفة ولها تطبيقات واسعة ، اذ تكمن اهميتها بكونها وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الانظمة كذلك فانها تعد ابسط واسهل انواع النماذج التي يمكن انشاؤها لمعالجة معضلات صناعية وتجارية وعسكرية واخرى ،فهي مجموعة من الاساليب الفنية التي يمكن بواسطتها الحصول على المقدار الكمي الامثل.في هذا البحث تعاملنا مع الحل ما بعد الامثلية post optimality او ما يعرف بتحليل الحساسية Sensitivity Analysis باستخدام مبدء اسعار الظل Shadow Prices ، ان الحل العلمي لاي مشكلة لا يكون حلاً كاملاً بمجرد الوصول الى الحل الامثل ، ان اي تغيير في قيم ثوابت النموذج او ما يعرف بمدخلات النموذج الذي سيغير من مشكلة البرمجة الخطية وسيؤثر على الحل الامثل وعليه نحن بحاجة الى اسلوب يساعدنا في الوقوف على اثر تغير هذه الثوابت على الحل الامثل الذ تم التوصل اليه ، كذلك تم تناول مفاهيم عامة عن النموذج الثنائي وبعض النظريات المتعلقة بتحليل الحساسية واعتمدنا على بيانات حقيقية لشركة تنقل النفط الخام ومشتقاته وقد تم صياغة النموذج الرياضي لها والتوصل للحل الامثل باستخدام برنامج الحاسوب الجاهز winqsb ومن ثم حساب قيم اسعار الظل للقيود المستنفدة binding constraints ، اضافة لما ذكر اعلاه فقد استعرضنا في هذا البحث نموذج البرمجة الخطية في ظل البيئة الضبابية واستخدم فيه اسلوب جديد يعتمد على الاعداد الاولية prime numbers في حل معالم النموذج الضبابية.

الكلمات المفتاحية: البرمجة الخطية ،النموذج الثنائي،اسعار الظل، تحليل الحساسية،الاعداد الضبابية .

Sensitivity Analysis in Linear Programming with Real Application

Barraq Subhi Kaml

Received 8 May 2016 ; Accepted 5 June 2016

Abstract

linear programming occupies at the present time a prominent place in different areas and have wide applications, where lies its importance as a means of studying the behavior of a large number of systems as well as it is the simplest and easiest types of models that can be created

to handle the dilemmas of industries and commercial, military, and other In this paper, we treated with the solution post optimality or as it's known Sensitivity Analysis by using the principle of Shadow Prices, The scientific solution to any problem not be a complete solution as soon as access to the best solution, That any change in the model (constants values) or what is known as input data will change the linear programming problem and will affect the best solution and we need to methods to help us in the style of standing on the effect of changing these constants on the best solution tastiest reached It was addressed general concepts of dual model and Some theories of sensitivity analysis, we take real data from The Texago Corporation is a large, fully integrated petroleum company based in the U.S.A., formulated the mathematical model and obtain the optimal results by package winqsb and finally calculated the Shadow Prices for binding constraints, Add to the above stated, we reviewed in this paper linear programming model under fuzzy environment and use a new method based on prime numbers

Keywords: linear programming, dual model, shadow prices, sensitivity analysis, fuzzy numbers.

المقدمة

ان من مزايا البرمجة الخطية في الوقت الحاضر انها مقبولة على نطاق واسع باعتبارها اداة مفيدة في بحوث العمليات والعلوم الادارية وغيرها من العلوم ، وهناك عدد كبير من الشركات تستخدم هذا النوع في النمذجة لحل أنواع مختلفة من المشاكل العملية وتطبيقات تشتمل على مشاكل النقل، وتخطيط الإنتاج، ومشاكل في اتخاذ القرارات الاستثمارية، ومشاكل المزيج الانتاجي ومشاكل التخصيص وغيرها، وتتكون مشكلة البرمجة الخطية من علاقات خطية بين متغيرات القرار في مشكلة البحث، يتم تحديد دالة الهدف الخطية (على سبيل المثال) بتعظيم الارباح او تقليل الكلف ويمكن ان تقتصر متغيرات القرار لمنطقة حل معينة من قبل قيود مختلفة. واحدة من السمات المثيرة للاهتمام في البرمجة الخطية هي الثنائية او ما يعرف بالنموذج المقابل، اذ يمتلك تفسير اقتصادي مفيد ويستخدم على نطاق واسع في النظرية الاقتصادية. إضافة إلى كونه ذات أهمية نظرية، فهو يدخل في موضوع تحليل الحساسية في البرمجة الخطية، ومن المعروف جيداً ان في البرمجة الخطية القيم المثلى لمتغيرات النموذج الثنائي تفسر على انها اسعار ظل (قيم حدية) من معاملات الجانب الايمن من القيود. ان تحليل الحساسية في طريقة السمبلكس قد تم تطويرها بشكل جيد على اساس الامثلية ، اذ يتطلب ذلك القليل من الجهد الحسابي وادخلت هذه الطريقة في العديد من الابحاث والكتب منها [2].

وفي عام 2000 استعرض James K. [6] بعض النتائج المعروفة في هذا الموضوع ومدى صحة اسعار الظل وكيف يمكن حسابها بوجود او عدم وجود برامج جاهزة، كذلك في عام 2005 قدم Jan Stallaert [7] بحثاً بين فيه كيفية تغير الحل الامثل عند تغير الجانب الايمن من المشكلة الاصلية، وكيف ان الطريقة التي قدمها قد حددت متجه التغير الامثل كتغيير لكميات الموارد المتاحة واستخدم اسلوب خوارزمية التمحور والعلاقة بنتائج ما بعد الامثلية من طريقة interior-point .

النموذج الثنائي (المقابل Dual):

ان قيمة الموارد الاقتصادية المتاحة مقومة باسعار الظل تساوي قيمة دالة هدف النموذج او قيمة الارباح المثلى ويرتبط هذا بمفهوم النموذج الثنائي الذي يصاحب النموذج الاصلى سواء كان يهدف الى تعظيم او تقليل دالة معينة ويوفر النموذج الثنائي كثير من المعلومات التي تفيد الادارة في مجال اتخاذ القرارات كما يقلل من العمليات الحسابية ويوفر الوقت والتكلفة في حالة اذا كان النموذج الثنائي يحتوي على عدد من القيود والمتغيرات اقل مما يحتويه النموذج الاصلى الخطي للمشكلة . [1]

ونظراً لان النموذج الخطي الاصلى قد يهدف الى تعظيم الارباح الحدية وهذه الارباح الحدية تمثل عائد التكاليف المتغيرة الذي يمثل الفرق بين سعر بيع المنتجات وتكلفتها المتغيرة وكلما استطعنا ان نقلل هذه التكلفة المتغيرة فاننا نعظم الارباح الحدية ولذا يمكننا القول انه توجد علاقة وارتباط بين المدخلات (التكاليف) والمخرجات (اسعار المنتجات) وبالتالي ارباحها وعليه اذا كان النموذج الاصلى يهدف الى تعظيم الارباح ويهتم باختيار تشكيلة الانتاج المثلى (المخرجات) في ظل موارد او مدخلات اقتصادية محدودة وبالتالي لايمكن تعظيم الارباح من دون هذه الموارد ، النموذج الثنائي يهدف الى تقليل هذه الموارد المتاحة التي تساهم في تحقيق الارباح وتحديد اسعار الظل لهذه الموارد تحت قيود اساسية تشترط ان لا تقل تكلفة الموارد اللازمة لكل منتج باسعار ظلها عن الربح الحدي لكل منتج ولذلك يسعى النموذج الثنائي الى تحديد وتقليل اسعار ظل الموارد الاقتصادية المتاحة. يبني النموذج الثنائي من الصيغة القياسية لمتباينات نموذج البرمجة الخطية وكما مبين في الجدول ادناه بشكل مصفوفات .

النموذج الثنائي (المقابل)	النموذج الاصلى (الاولى)
Minimize $z_D = \pi b$	Maximize $z_p = cx$
s. t	s. t
$\pi A \geq c$	$Ax \leq b$
$\pi \geq 0$	$x \geq 0$

حيث ان :

A : تمثل مصفوفة المعاملات الفنية للنموذج الخطي بـ m من الصفوف و n من الاعمدة.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

c, x : متجهات ذات بعد n .

π : متجه بـ m من المتغيرات في النموذج الثنائي.

توجد العديد من العلاقات بين نتائج النموذج الاصيل والمشكلة الثنائية وهي ذات اهمية في تفسير النتائج. وقد ذهب Paul A.Jensen & Jonthan F.Bard عام 2003 [3] الى اعتبار هذه العلاقات كنظريات مع براهينها ، اذ ان x تمثل اي حل مقبول للنموذج الاصيل وان π هي اي حل مقبول للنموذج الثنائي ، x^* ، π^* الحلون المثلى ان وجدت لكل من النموذجين اعلاه.

نظرية 1 (الثنائية الضعيفة (weak duality) :

اذ كانت x تمثل الحل المقبول و $z_p(x)$ قيمة دالة الهدف التي تكون (تعظيم Maimize) للنموذج الاصيل وان π هي الحل المقبول و $z_D(x)$ قيمة دالة الهدف التي تكون (تقليل Minimize) للنموذج الثنائي ، فإن $z_p(x) \leq z_D(x)$

- 1- ان الحل للنموذج الاولي يكون مقبولاً بواسطة الفرضية $Ax \leq b$.
 - 2- بضرب طرفي المعادلة اعلاه بـ π نحصل على $\pi Ax \leq \pi b$.
 - 3- ان الحل للنموذج المقابل يكون مقبولاً بواسطة الفرضية $\pi A \geq c$.
 - 4- بضرب طرفي المعادلة اعلاه بـ x نحصل على $\pi Ax \geq cx$.
 - 5- عند جمع حاصلتي الخطوتين 2 و 4 نحصل على $cx \leq \pi Ax \leq \pi b$ او $z_p(x) \leq z_D(x)$
- هناك العديد من العلاقات المفيدة التي يمكن اشتقاقها من النظرية اعلاه
- ان قيمة $z_p(x)$ لأية x هو الحد الادنى لـ $z_D(\pi^*)$.
 - ان قيمة $z_D(x)$ لأية π هو الحد الاعلى لـ $z_p(x^*)$.
 - ان كان هناك حلول مقبولة لـ x وكانت المشكلة الاصلية غير محدودة (unbounded) فان الحل يكون غير مقبول (no feasible) للمشكلة الثنائية π .
 - ان كان هناك حلول مقبولة لـ π وكان النموذج الثنائي غير محدودة (unbounded) فان الحل يكون غير مقبول (no feasible) للمشكلة الاصلية x .

نظرية 2 (معيار المثالية الكافي (sufficient optimality criterion) :

نفرض ان $z_p(x)$ تمثل دالة الهدف للنموذج الاولي وان $z_D(x)$ هي دالة الهدف للنموذج الثنائي . اذا كان $(\hat{\pi}, \hat{x})$ زوج من الحلون المقبوله لكل من النموذج الاولي والثنائي يحقق $z_p(\hat{x}) = z_D(\hat{\pi})$ فان \hat{x} هو الحل الامثل للنموذج الاولي و $\hat{\pi}$ هو الحل الامثل للنموذج الثنائي.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

- 1- تحدد الامثلية للحل الاولي : $z_p(\hat{x}) \leq z_p(x^*)$.
- 2- الحل المقبول للنموذج الثنائي بالنسبة لـ z_p , $z_p(\hat{x}) \leq z_p(\pi^*)$.
- 3- تحدد الامثلية للحل الثنائي : $z_D(\pi^*) \leq z_D(\hat{\pi})$.
- 4- بجمع الخطوات اعلاه : $z_p(\hat{x}) \leq z_p(x^*) \leq z_D(\pi^*) \leq z_D(\hat{\pi})$.
- 5- دوال الهدف بالفرض : $z_p(\hat{x}) = z_D(\hat{\pi})$.
- 6- بدمج الخطوتين 4 و 5 : $z_p(\hat{x}) = z_p(x^*) = z_D(\pi^*) = z_D(\hat{\pi})$.
وعليه تكون \hat{x} , $\hat{\pi}$ مثلى.

نخرج ببعض من الاستنتاجات للنظرية السابقة:

- اذا كانت دالتي الهدف متساوية فان كلا الحلول المقبولة لكل من النموذج الاولي والثنائي هي مثلى.
- اذا كان x^* حل امثل للنموذج الاولي ، يوجد حل محدد امثل للنموذج الثنائي بدالة هدف $z_p(x^*)$.
- اذا كان π^* حل امثل للنموذج الثنائي ، يوجد حل محدد امثل للنموذج الاولي بدالة هدف $z_D(\pi^*)$.

نظرية 3 (الثنائية القوية strong duality) :

ان كان اياً من النموذج الاولي او الثنائي له حل مقبول امثل فان النموذج الاخر له كذلك وقيم دوال الهدف لهما متساوية.

بعبارة اخرى ليكن للنموذج الاولي حل امثل $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ، وللنموذج الثنائي حل امثل ايضاً π^* ،
فان $\sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i \pi_i^*$ ، $(\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_n^*)$.

اسعار الظل (Shadow Prices)

تتميز الطريقة العامة لحل نموذج البرمجة الخطية Simplex Method بتوفيرها لمعلومات عديدة لاتوفرها الطريقة البيانية ومنها اسعار الظل و كلفة الفرصة البديلة التي تعرف بأنها الأرباح المفقودة لأفضل بديل يأتي بعد البديل الذي تم اختياره او هي قيمة نظرية متوقعة للبدائل المتحلى عنها كنتيجة لاختيار بديل معين ويوجد ثلاث انواع من هذه الكلف وهي:

- 1- تكلفة الفرصة البديلة الخارجية والمتمثلة بتكلفة الحصول على وحدة مورد الانتاج من خارج المؤسسة الانتاجية.
- 2- تكلفة الفرصة البديلة الداخلية وهي عبارة عن مقدار العائد الذي يمكن ان تحصل عليه المؤسسة ويساهم في تغطية التكاليف الثابتة وتحقيق الارباح.
- 3- تكلفة الفرصة البديلة الكلية وتشتمل على تكلفة الفرصة البديلة الخارجية (تكلفة الحصول على مورد الانتاج) تكلفة الفرصة البديلة الداخلية (العائد الذي تحصل عليه المنشأة) ، وتعد ذات فائدة جلية في ترشيد قرار اضافة منتج جديد الى المزيج الانتاجي.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

ان مفهوم سعر الظل لمورد يمكن ايجازه بانه مقدار الزيادة او النقصان في قيمة دالة الهدف نتيجة لزيادة او نقصان الكمية المتاحة من ذلك المورد بمقدار وحدة واحدة حيث تؤدي هذه الزيادة الى زيادة الارباح الحدية ، ويطلق على تلك الزيادة في الارباح الناتجة عن الحصول على وحدة اضافية من احد الموارد مصطلح سعر ظل المورد، وتوجد طريقتان للحصول على اسعار الظل وهي

1- الطريقة غير المباشرة (طريقة الناتج الفرعي) :

اذ يمكن الحصول على اسعار الظل من القيم التي تظهر تحت المتغيرات الرائدة Slack Variables في الحل الامثل بجدول السمبلكس لمشكلة البرمجة الخطية الاولية (الاصلية).

2- طريقة النموذج الثنائي:

ويتم الحصول على اسعار الظل من خلال تحويل المشكلة الاصلية لنموذج البرمجة الخطية الى النموذج الثنائي الذي يهدف اساساً الى تحديد سعر الظل للموارد الاقتصادية المتاحة.

ان سعر الظل لقيود ما وليكن (i) هو معدل التغير في دالة الهدف كنتيجة لتغير قيمة المورد (b_i) المعروف بالجانب الايمن من القيد (i) . في الحل الامثل قيمة دالة الهدف في النموذج الاولي عند تساويها مع دالة الهدف في النموذج الثنائي يعبر عنها بالاتي [2] :

وبالتالي هذه العلاقة يمكن استخدامها لتبين السعر المرتبط بـ (b_i) عند القيمة المثلى (π^*) عند وصف الحل الابتدائي بالحل غير المنحل (non-degenerate) ووفقاً لهذا المفهوم فان قيمة التغير الحاصلة في Z نتيجة لحدوث تغير في المورد (b_i) يمكن الحصول عليه باستخدام المشتقة الجزئية (partially derivative) للدالة Z بالنسبة لـ b_i بمعنى $\frac{\partial Z}{\partial b_i} = \pi^*$.

من التعريف اعلاه يمكن تفسير π^* على انها السعر المرتبط بالجانب الايمن للقيود والمسمى بسعر الظل والذي ينسب الى Paul Samuelson 1965 .

التفسير الاقتصادي لاسعار الظل

ان الهدف من طريقة السمبلكس هو لتحديد الحل الاساسي المقبول والذي يستخدم الاسلوب الاكثر فعالية من حيث الكلفة. دالة الهدف للنموذج الثنائي تمثل الكلفة الاجمالية اي ان

$$v = \pi^T b = \sum_{i=1}^m \pi_i b_i$$

حيث π_i ، هو مضروب السمبلكس المرتبط بالمتغيرات الاساسية وان π^* يمثل الايرادات الضمنية للتعويض عن التكاليف المباشرة (سعر الظل) لكل مورد في ضوء المتغيرات الاساسية الابتدائية ، وبالتالي فإن $\pi_i b_i$ هي التعويض عن الكلف المباشرة $\sum_{j=1}^n c_j x_j$.

بأستخدام التفسير اعلاه لدالة الهدف والمتغيرات للنموذج الثنائي π, v يمكننا من دراسة كل صف (j) من المشكلة الثنائية المطابق للعمود (j) للمشكلة الاصلية ، كل وحدة (j) من النشاط (او المنتج) في المشكلة الاولية يستهلك a_{ij} وحدة من المورد i .

بأستخدام اسعار الظل (الجانب الايسر) من القيد j ، $\sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i$ من المشكلة الثنائية هو كلفة ضمنية غير مباشرة من مزيج الموارد التي تستهلك او تنتج بواسطة وحدة واحدة من النشاط j ، من ناحية اخرى فان الجانب الايمن من القيد (j) من المشكلة الثنائية هو الكلفة المباشرة للوحدة الواحدة من النشاط j ، وهذا يعني ان القيد j في النموذج الثنائي c_j $\sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i \leq$ ، يمكن ان يقال له التكاليف الضمنية غير المباشرة للمواد المستهلكة بواسطة النشاط (j) ويجب ان لايزيد عن الكلف المباشرة c_j ، وان كانت هذه التكاليف بالضبط اقل من c_j فإنه لايدفع للاشتراك في النشاط (j) اي ان c_j $\sum_{i=1}^m a_{ij} \pi_i >$ ، من جانب اخر فان القيود في النموذج الثنائي المرتبطة بالمتغيرات غير الاساسية x_N ، ربما تحقق الحل المقبول او غير المقبول وهذا يعني $\bar{C} = C_N - N^T \pi$ ، اذ يمكن ان يكون $\bar{c}_j \geq 0$ فيكون القيد في النموذج الثنائي مقبول او $\bar{c}_j < 0$ فيكون القيد غير مقبول ، من وجهة نظر اقتصادية فان $\bar{c}_j < 0$ يعني ان النشاط j يستخدم الموارد بصورة اقتصادية اكثر من اي نشاط اخر من مجموع الانشطة.

تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

يعرف تحليل الحساسية بأنه اسلوب يقيس اثر التغيرات في مدخلات نموذج القرار على مخرجاته اذ يمكن من خلاله دراسة التغيرات في قيم ثوابت النموذج وتحديد الى اي مدى يمكن لبعض هذه الثوابت ان يتذبذب قبل ان يصبح الحل الامثل المحدد سابقاً غير امثل وكلما ارتفعت درجة حساسية القرار بالنسبة للتغير في احدى ثوابت النموذج كلما تطلب ذلك بذل مزيد من الجهد والوقت لتقدير قيمة هذا الثابت بعناية حتى لا يتبدد كثيراً عن المثالية فيما بعد.

ان مصطلح تحليل الحساسية يدعى غي بعض الاحيان بتحليل ما بعد الامثلية ، معظم المشاكل الواقعية ذات بيانات ليست معروفة بشكل مؤكد على سبيل المثال كلف المواد الخام ربما تتغير بعد حل النموذج او التكاليف المستخدمة قد تكون مجرد تخمين لما ستكون في المستقبل ، الجانب الايمن من القيود قد يتغير بسبب زيادة او نقصان الموارد المتوفرة في السوق او المعاملات ربما تتغير بسبب تغير مواصفات المنتج. يعد تحليل الحساسية مهم لعدة اسباب:

- 1- ان استقرارية الحل الامثل قد تكون غير مرغوب بها في ظل تغيرات معالم النموذج.
- 2- كل من قيم معاملات دالة الهدف والقيود قد يكون مسيطر عليها الى حد ما عند بعض الكلف ، في هذه الحالة نرغب بمعرفة الاثار التي تنجم عن تغيير هذه القيم وما ستكون التكلفة لاجراء هذه التغيرات.
- 3- عندما تكون المعاملات غير مسيطر عليها فان قيمتها قد تكون تقريبية وبالتالي فإنه من المهم معرفة لاي مدى يصبح التغير بتلك القيم يبقى الحل امثل او الحصول على تقديرات افضل.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

A . ادخال (اضافة) متغير جديد :

يفيد تحليل الحساسية في اقرار مدى جدوى اضافة متغير جديد الى الحل الذي تم التوصل اليه (من دون هذا المتغير)، وتحديد ما اذا كانت اضافته ستؤثر على امثلية الحل الاصلي ام لا.
بعد ان حدد الحل الامثل $x = x^*$ ، لنفترض اننا نريد اضافة متغير جديد وليكن x_{n+1} بمعامل كلفة c_{n+1} ومعاملات تقنية A_{n+1} فيكون نموذج البرمجة الخطية على النحو الاتي:

$$\text{Minimize } z = c^T x + c_{n+1} x_{n+1}$$

s. t

$$Ax + A_{n+1} x_{n+1} = b$$

$$x \geq 0, x_{n+1} \geq 0$$

ان اضافة متغير جديد الى النموذج لا يغير من الحل المقبول وذلك بجعله متغير غير اساسي وقيمته صفر عند الحدود الدنيا وبهذا يبقى الحل مقبول، ولكن الحل يتطلب ان يكون امثل اذ ان كلفة التقليل \bar{c}_{n+1} المقابل للمتغير الجديد x_{n+1} قد تكون سالبة وللتحقق من الحل الامثل نحسب :

$$\bar{c}_{n+1} = c_{n+1} - A_{n+1}^T \pi$$

اذا كان $\bar{c}_{n+1} \geq 0$ يكون الحل السابق بالمتغير $x_{n+1} = 0$ امثل، اما في حال كون $\bar{c}_{n+1} < 0$ فبالامكان تحسين الحل بجعل المتغير x_{n+1} اساسي.

ان الحالة الاكثر عمومية عندما يمتلك المتغير الجديد x_{n+1} حدود دنيا وعليا بحيث $l_{n+1} \leq x_{n+1} \leq u_{n+1}$ اذ ان الحد الادنى ليس بالضرورة ان يكون صفرًا والحد الاعلى ∞ .

B . ادخال (اضافة) قيد جديد :

اذا فرضنا انه بعد التوصل الى الحل الامثل ظهرت الحاجة الى اضافة قيد جديد وقد تنشأ الحاجة الى اضافة القيد الجديد نتيجة لتغير الظروف المحيطة بالمؤسسة المنتجة والتي ادت الى تغير مواصفات بعض الموارد المتاحة وبالتالي تغير ذلك المنتج ، ومن البديهي ان القيد المضاف لن يوسع من منطقة الحل المقبول بل على العكس قد يقطع منها وعليه فان دالة الهدف التي تم التوصل اليها قبل اضافة القيد الجديد تبقى على حالها او تتجه نحو الاسوأ، لنفترض ان القيد المراد اضافته يأخذ احدي الصيغ التالية:

$$A_{m+1} x = b_{m+1},$$

$$A_{m+1} x \leq b_{m+1} ,$$

$$A_{m+1} x \geq b_{m+1} ,$$

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

حيث ان $b_{m+1} \geq 0$.

من خلال وضع حدود مختلفة على المتغير x_{n+1} يمكن كتابة اياً من القيود اعلاه بالصيغة :

$$A_{m+1}x + x_{n+1} = b_{m+1},$$

ففي حالة القيد " $= b_{m+1}$ " فإن $0 \leq x_{n+1} \leq 0$ ، واذا كان " $\leq b_{m+1}$ " فإن قيمة المتغير هي $0 \leq x_{n+1} \leq \infty$ واخيراً عندما يكون القيد بالصيغة $0 \geq b_{m+1}$ فإن $-\infty \leq x_{n+1} \leq 0$ ، وان الكلفة c_{n+1} المرتبطة بالمتغير x_{n+1} تساوي صفرأ ، لكن ماذا لو كان الحل $x^* = x$ غير مقبول بعد اضافة القيد الجديد، يتم حل النموذج وتحسينه [2].

C . التغير في الجانب الايمن من القيود

من المهم والضروري ان توجد القدرة والامكانية لدراسة تأثير التغيرات التي تحدث في الجانب الايمن من القيود وخاصة تلك التي تحدد ما هي الموارد المتاحة، لنفرض ان لدينا الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية بالصيغة القياسية وان الجانب الايمن من القيد (q) يعطى بواسطة المعلمة (λ) وبقيمة معينة يكون b_q :

$$b(\lambda) = b + (\lambda - b_q)e_q$$

حيث ان e_q يمثل العمود (q) في المصفوفة المحايدة.

ان كانت قيمة المعلمة λ لم تجعل الحل الاساسي غير مقبول فإن الحل الاساسي المعدل يبقى امثل.

ان مجال قيم المعلمة λ في الجانب الايمن من القيد q والتي تبقى الحل الاساسي مقبولاً وامثل ، من خلال ايجاد قيم $x_B(\lambda)$ حيث ان

$$Bx_B(\lambda) = b(\lambda)$$

وان $x_B(\lambda) \geq 0$ ، مما سبق نحصل على

$$x_B(\lambda) = B^{-1}b + (\lambda - b_q)B^{-1}e_q$$

$$= x_B^* + (\lambda - b_q)B^{-1}e_q$$

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

اذ ان x_B^* يمثل الحل الامثل عندما $\lambda = b_q$ ، وللوصول للحل المقبول يتطلب ان تكون $x_B(\lambda) \geq 0$ ، ويحسب مجال المعلمة λ وفق الصيغة ادناه:

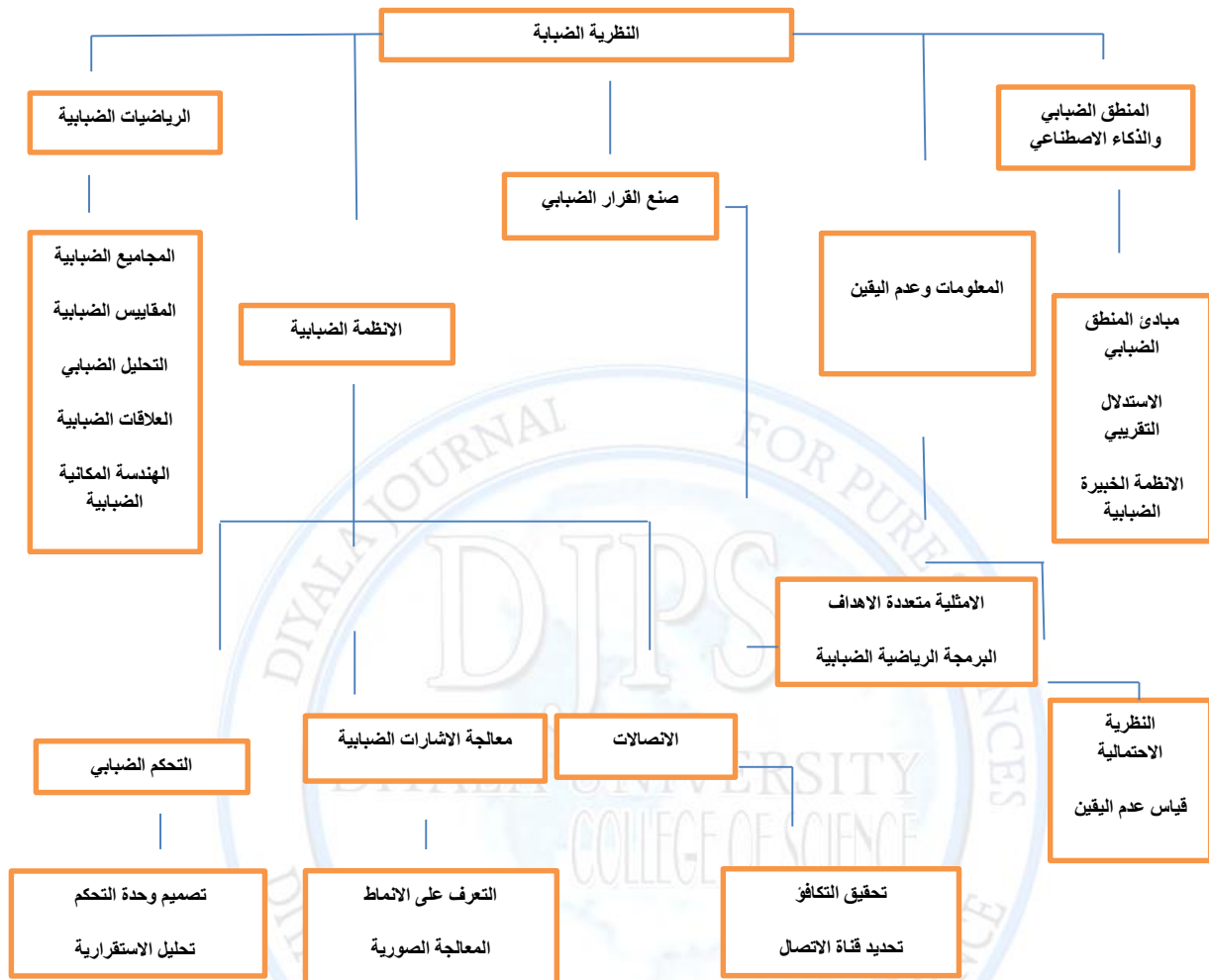
$$b_q + \max_{\beta_{iq} > 0} \frac{-(x_B^*)_i}{\beta_{iq}} \leq \lambda \leq b_q + \min_{\beta_{iq} < 0} \frac{-(x_B^*)_i}{\beta_{iq}}$$

حيث β_{iq} يمثل العنصر (i, q) من المصفوفة B^{-1} .

البرمجة الخطية الضبابية : fuzzy linear programming

ان مفهوم المنطق الضبابي هو أحد أشكال المنطق، اذ يستخدم في بعض الأنظمة الخبيرة وتطبيقات الذكاء الاصطناعي Artificial intelligent، ابتكر العالم الأذربيجاني الأصل لطفي زادة عام 1965 هذا الاسلوب حيث طوره ليستخدمه كطريقة أفضل لمعالجة البيانات، لكن نظريته لم تلق اهتماماً حتى عام 1974 حيث استخدم في تنظيم محرك بخاري، ثم تطورت لتستخدم في العديد من التطبيقات العلمية والهندسية وغيرها. من خلال النظر الى المخطط رقم (1) يتبين لنا أن النظرية الضبابية هي حقل واسع يضم مجموعة متنوعة من المواضيع البحثية.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل



مخطط رقم (1) يمثل تصنيف النظرية الضبابية (Wang 1997)

تعريف (1): المجموعة الجزئية \tilde{A} ، المجموعة الشاملة X ، يدعى مجموعة من الأزواج $\{(\mu_{\tilde{A}}(x), x)\}$ ، حيث

$\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0,1]$ ، والتي تعرف بدالة الانتماء للمجموعة الضبابية.

قيمة دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ للعنصر $x \in X$ تسمى درجة الانتماء.

- متممة الدالة الضبابية \tilde{A} ، التي يرمز لها \tilde{A}^c ، وهي مجموعة ضبابية يمكن كتابتها

$$\mu_{\tilde{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$$

- تقاطع مجموعتين ضبابيتين \tilde{A} و \tilde{B} والتي تعرف بالمجموعة \tilde{C} , وتكتب بالصيغة

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}} = \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$$

- اتحاد مجموعتين ضبابيتين \tilde{A} و \tilde{B} والتي تعرف بالمجموعة \tilde{C} , وتكتب بالصيغة

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}} = \max(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)), \forall x \in X$$

تعريف (2): المجموعة الضبابية \tilde{A} تكون محدبة اذا ما تحقق الشرط ، $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \min(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y))$ ،

$$x, y \in X, \lambda \in [0,1] ,$$

تعريف (3): الرقم الضبابي هو زوج مرتب من الدوال $(u(r), v(r))$, $r \in [1,0]$ التي تستوفي الشروط التالية [8] :

$$1- u(r) \text{ دالة محددة متناقصة من الجهة اليسرى تقع ضمن الفترة } [1,0];$$

$$2- v(r) \text{ دالة محددة متزايدة من الجهة اليمنى تقع ضمن الفترة } [1,0];$$

$$3- r \in [1,0], v(r) \leq u(r)$$

تعريف (4): ليكن \tilde{A} عدد ضبابي بالصيغة المثلثية (a, b, c) ، يمكن حساب دالة الانتماء $\mu_{\tilde{A}}(x)$ وكالاتي :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b] , \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c], \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 0, x \notin [a, c]$$

ان العدد الضبابي بالصيغة المثلثية (a, b, c) ، يمثل بالدالة

$$u(r) = \frac{cr-a}{b-a}, r \in [a/c, b/c] , \quad v(r) = \frac{c-rc}{c-b}, r \in [b/c, 1] .$$

صياغة العدد الضبابي بالاعتماد على الاعداد الاولية ضمن الفترة [9] $[k_1, k_2]$:

تعريف (1): ليكن العدد الاولي $P_j(a) \geq 0$, $a \geq 0$, $j \in Z$ ، ينتمي للفترة $[a, \infty)$ عند $j \geq 0$ او الفترة

$$[0, a) \text{ عند } j < 0 , P_j(a) \geq 0 \text{ عدد اولي من مجموعة من الاعداد الاولية عندما } a \geq 0 .$$

توجد هنالك العديد من الخصائص المهمة للعدد الاولي نوجزها ادناه :

$$1- 0 = P_{-1}(1), 1 = P_1(0), 1 = P_0(1), 0 = P_0(0)$$

$$2- a = P_0(a) , \text{ اذا كان } a \geq 0 \text{ عدد اولي, } P_0(a) \text{ غير موجود اذا كان } a \geq 0 \text{ عدد غير اولي;}$$

$$3- P_j(a) \leq P_k(a) , \text{ اذا } j \leq k , P_j(a) < P_k(a) , \text{ لكل } j \in Z , k \in Z ; j < k$$

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

$$; a \geq 0, j = 0, 1, 2, \dots, 1 \leq l < P_{j+1}(a) - P_j(a) \text{ لكل } , P_j(a) = P_j(a+1) = \dots = P_j(a+l) - 4$$

$$\text{عدد } a \geq 0 \text{ اذا كان } P_j(a) = P_1(P_{j-1}(a)) = \dots = P_1(P_1(P_{j-2}(a))) = P_2(P_{j-2}(a)) = \dots = P_{j-1}(P_1(a)) - 5$$

اولي.

تعريف (2) : لنفرض ان العدد الصحيح الضبابي \tilde{n} يمكن ان يدعى بالعدد الضبابي الثلاثي (k, n, l) ، حيث $k, n, l \in Z, k \leq n \leq l$:

$$l = \begin{cases} P_1(n), n \geq 0, \\ -P_{-1}(-n), n < 0, \end{cases} \quad k = \begin{cases} P_{-1}(n), n \geq 0, \\ -P_1(-n), n < 0, \end{cases}$$

$P_1(\cdot), P_{-1}(\cdot)$ ، العدد السابق واللاحق (الاولي) للعدد $n \geq 0, n$ و $-n, n < 0$.

بعبارة اخرى ، اي عدد صحيح ضبابي \tilde{n} يمكن تمثيله على النحو الثلاثي ، اليسار (k) ، اليمين (l) وهي اقريب الاعداد الالية للعدد \tilde{n} . هذا الاسلوب يسمح لـ $n \in Z$ ان يكون $\tilde{n} = (k, n, l)$ ، وبالامكان وضع k و l وفقاً للصيغة اعلاه مع استخدام دالة الانتماء الخطية :

$$\mu_{\tilde{n}}(x) = \frac{x-k}{n-k}, x \in [k, n], \mu_{\tilde{n}}(x) = \frac{l-x}{l-n}, x \in [n, l], \mu_{\tilde{n}}(x) = 0, x \notin [k, l]$$

باستخدام تعريف الاعداد الصحيحة الضبابية ، العمليات الحسابية التقليدية (الجمع والطرح والضرب والقسمة) لاي عددين صحيحين ضبابيين \tilde{n}, \tilde{m} تعطى بصيغة الاعداد الضبابية المتثلثية (k_n, n, l_n) و (k_m, m, l_m) كلاً على التوالي :

$$l_+ = \begin{cases} P_1(n+m), n+m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n-m), n+m < 0, \end{cases} \quad k_+ = \begin{cases} P_{-1}(n+m), n+m \geq 0, \\ -P_1(-n-m), n+m < 0, \end{cases} \quad 1. \tilde{n} + \tilde{m} = (k_+, n+m, l_+),$$

$$\tilde{n} - \tilde{m} = (k_-, n-m, l_-), \quad k_- = \begin{cases} P_{-1}(n-m), n-m \geq 0, \\ -P_1(-n+m), n-m < 0, \end{cases} \quad l_- = \begin{cases} P_1(n-m), n-m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n+m), n-m < 0, \end{cases} \quad 2.$$

$$3. \tilde{n} * \tilde{m} = (k_*, n*m, l_*), \quad k_* = \begin{cases} P_{-1}(n*m), n*m \geq 0, \\ -P_1(-n*m), n*m < 0, \end{cases} \quad l_* = \begin{cases} P_1(n*m), n*m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n*m), n*m < 0, \end{cases}$$

$$k_{div} = \begin{cases} P_{-1}(n/m), n/m \geq 0, \\ -P_1(-n/m), n/m < 0, \end{cases} \quad l_{div} = \begin{cases} P_1(n/m), n/m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n/m), n/m < 0, \end{cases} \quad 4. \tilde{n} / \tilde{m} = (k_{div}, n/m, l_{div}), \quad m \neq 0,$$

$$5. \tilde{n} \% \tilde{m} = (k_{mod}, n \% m, l_{mod}), \quad n \geq 0, m > 0,$$

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

$$l_{\text{mod}} = \begin{cases} P_1(n \% m), n \% m \geq 0, \\ -P_{-1}(-n \% m), n \% m < 0, \end{cases} \quad k_{\text{mod}} = \begin{cases} P_{-1}(n \% m), n \% m \geq 0, \\ -P_1(-n \% m), n \% m < 0, \end{cases}$$

من الضروري لفت الانتباه إلى واحدة من التفاصيل المهمة، منها حساب الأعداد الأولية المتعلقة لاي عدد $a \geq 0$ ، في الوقت ذاته يتم حساب الأعداد الأولية $P_1(a)$ و $P_{-1}(a)$ ، ان التمثيل لاي عدد صحيح ضبابي \tilde{k} يعتمد على k ويتميز بمعالم دالة الانتماء، لذلك فإن فترة التمثيل تكون غير معلومة (قيم ضبابية) \tilde{k} . يمكن اعتبار الأعداد الضبابية المثلثية بدوال الانتماء كمجموعة من المثلثات $\tilde{k} = \{(k_1, k, k_2)\}$ ، $k \in Z$ ، الأعداد الأولية k_1, k_2 تحسب وفق الصيغة التالية:

$$k_1 = P_{-1}(k), k_2 = P_1(k),$$

وفقاً لدالة الانتماء اعلاه فإن لاي عدد ضبابي \tilde{k} يمكن تحديد العدد الصحيح الضبابي المثلثي $\tilde{k} = \{(k_1, k, k_2)\}$ بتعيين الحدود اليمنى واليسرى الأولية الاقرب للعدد k .

حالة دراسية في مجال نقل النفط الخام Case study in the field of oil

البيانات التالية تم تبنيها من [4] Bhumik، شركة كبرى متكاملة في مجال النفط تنتج معظم نبتها وتستورد ما تبقى لسد احتياجها، شبكة توزيع واسعة تستخدم لنقل النفط إلى شركات التكرير (المصافي) ومن ثم نقل المنتجات النفطية من المصافي إلى مراكز التوزيع، المواقع المختلفة لهذه المنشآت معطى بالجدول رقم (1)، ان الشركة في سعيها زيادة حصصها في السوق من منتجاتها الرئيسية، لذا قامت الإدارة باتخاذ قرار توسيع مخرجاتها من خلال بناء مصفى اضافي مع زيادة استيرادها من النفط الخام، القرار الحاسم يكمن في اي موقع يتم بناء المصفى الجديد. ان اضافة المصفى الجديد سيكون له التأثير الكبير على عملية منظومة التوزيع، بما في ذلك القرارات المتعلقة كم من النفط الخام يمكن نقله من كل من المصادر إلى كل من المصافي بضمنها (الجديد) وما هي كمية المنتج النهائي المنقولة من كل مصفى إلى مراكز التوزيع، ولذلك فإن العوامل الرئيسية الثلاثة لقرار الإدارة في اختيار موقع المصفى الجديد هي

- 1- كلفة نقل النفط الخام من المصادر إلى كافة المصافي بضمنها الجديد.
- 2- كلفة نقل المنتج النهائي من المصافي إلى مراكز التوزيع.
- 3- كلف تشغيل المصفى الجديد بضمنها كلف العمل، الضرائب، الضمان، تأثير الحوافز المالية التي تقدمها الدولة او المدينة، كذلك كلف رأس المال لأنها ستكون نفسها في اي موقع متاح بعد التحقق وجد فريق العمل المعني ان هناك ثلاث مواقع (لوس انجلوس، جالفستون، و ميزوري)، لها مميزات رئيسية مبيته بالجدول رقم (2)، والجدول رقم (3) يوضح البيانات الانتاجية الخاصة بالشركة.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

الجدول رقم (1) المواقع الحالية لمنشآت الشركة

المواقع	نوع المنشأة
1. تكساس/2. كاليفورنيا/3. الاسكا	حقول النفط
1. قرب نيو اورلاند/2. قرب ساوث كارولينا/3. قرب سياتل/واشنطن	مصافي التكرير
1. بيتسبورغ، بنسلفانيا /2. اتالانتا، جورجيا /3. مدينة كنساس، ميزوري 4. سان فرانسيسكو، كاليفورنيا	مراكز التوزيع

الجدول رقم (2) المواقع المتاحة للمصفي الجديد مع المزايا الخاصة بكل موقع

المزايا الرئيسية	المواقع المتاحة
1. قرب حقول النفط كاليفورنيا/2. سهولة الوصول من حقول نفط الاسكا. /3. الى حد ما قريب من مركز توزيع سان فرانسيسكو	قرب لوس انجولس ، كاليفورنيا
1. قرب حقول نفط تكساس/2. سهولة الوصول من النفط المستورد/3. قريب من مقر الشركة	قرب جالفستون
1. انخفاض تكاليف التشغيل/2. موقع مركزي لمواقع التوزيع/3. سهولة الوصول للنفط الخام بواسطة نهر المسيسيبي.	قرب ميزوري

الجدول رقم (3) يبين بيانات الانتاج الخاصة بالشركة

المنتج السنوي من النفط الخام لكل حقول نفطي (برميل/بالمليون)	حقول النفط	الاحتياجات السنوية للمصفي من النفط الخام (برميل/بالمليون)	المصفي
80	1. تكساس	100	1. نيو اورلاند
60	2. كاليفورنيا	60	2. ساوث كارولينا
100	3. الاسكا	80	3. سياتل/واشنطن
		120	4. الجديد
	الاحتياجات الكلية من المستورد 120=240-360	360	الاجمالي

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

يحتاج فريق العمل الى جمع كميات كبيرة من البيانات من اجل اجراء التحليلات المطلوبه عليها ، تريد الادارة ان تعمل جميع مصافي التكرير بكامل طاقتها الانتاجية لذلك فأن مهمة فريق العمل تكمن في تحديد مقدار النفط الخام الذي يحتاجه كل مصفى سنوياً، حيث ان كميات النفط الخام المنتج او المشتري ستكون هي نفسها بغض النظر عن الموقع الجديد للمصفى الذي سيتم تحديده ، استنتج فريق العمل ان تكاليف الانتاج او الشراء ليست مرتبطة بقرار اختيار الموقع الجديد باستثناء تكاليف الشحن. من ناحية اخرى فأن تكاليف نقل النفط الخام من مصادرها الى المصافي ذات اهمية كبرى، هذه الكلف مبينه في الجدول رقم (4) لكلا المصافي الثلاثة وللمقترحة ايضاً، اما الجدول رقم (5) فيبين كلف نقل النفط الخام من مصافي التكرير الى مراكز التوزيع ، وان الصف السفلي من الجدول يبين عدد وحدات المنتج النهائي التي يحتاجها كل مركز من مراكز التوزيع. اضافة الى ما تقدم ذكره فأن الجانب الرئيسي النهائي من البيانات ينطوي على تكاليف التشغيل لكل مصفى في كل من المواقع الثلاث المزمع انشاءها فيها ، اذ ان تقدير التكاليف يتطلب زيارات ميدانية من قبل العديد من أعضاء فريق العمل لجمع معلومات مفصلة حول تكاليف اليد العاملة المحلية، والمهام، وتكليف الارض وغيرها ، وقد لخصت بالجدول رقم (6).

الجدول رقم (4) الخاص بكلف شحن النفط الخام من المصادر الى مصافي التكرير

كافة الشحن (بمليون الدولار / لكل مليون برميل) من الحقول الى المصافي بضمنها المواقع المقترحة						
ميزوري	جالفستون	لوس انجلوس	سياتل	كارليستون	نيو اورلاند	
7	1	3	5	4	2	تكساس
4	3	1	3	5	5	كاليفورنيا
7	5	4	3	7	5	الاسكا
4	3	4	5	3	2	المستورد

الجدول رقم (5) كلف الشحن من المصافي الى مراكز التوزيع

كلف الشحن لكل وحدة واحدة (بمليون دولار/ لكل مليون برميل) من المصافي الى مراكز التوزيع					
سان فرانسيسكو	كنساس	اتالانتا	بيتسبورغ	نيو اورلاند	مصافي التكرير
8	6	5.5	6.5	نيو اورلاند	
7	4	5	7	جارليستون	
3	4	8	7	سياتل	
2	3	6	8	لوس انجلوس	مصافي التكرير المقترحة
6	3	4	5	جالفستون	
5	1	3	4	ميزوري	
100	80	80	100	الاحتياجات	

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

الجدول رقم (6) تكاليف تشغيل المصافي

الموقع	كلف التشغيل السنوية (بمليون الدولار)
لوس انجلوس	620
جالفستون	570
ميزوري	530

بناء (صياغة) النموذج الرياضي للمشكلة:

قبل البدء بصياغة النموذج الرياضي للمشكلة اعلاه يتطلب منا تقديم مفهوم عام عن قيود (Either-Or) والتي تمتلك الصيغة العام (K out of N) اي ان كان لدينا N من القيود ونرغب بتفعيل عدد منا وليكن K فأنا نلجأ الى هذا النوع من الخوارزمية التي يمكن التعبير عنها بالاتي [5]:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i - My_i \text{ for all } i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^N y_i = N - K$$

حيث $y_i \in \{0,1\}$, $M \gg 0$, اذ ان الشرط الثاني المتعلق بالمتغير y_i يضمن ان K من قيود المشكلة الاصلية سوف تبقى على حالة دون تغيير وما تبقى من القيود سوف يحذف.

تعريف متغيرات القرار

x_{ijk} = الكميات المنقولة من النفط الخام من الحقل i الى المصفي j ، والكميات المنقولة من المصفي j الى مراكز التوزيع k (سنوياً) ،

C_{ijk} = كلف الشحن من الحقل i الى المصفي j ، والكميات المنقولة من المصفي j الى مراكز التوزيع k .

δ_{ijk} = متغير ثنائي، F_j = كلف التشغيل للمصافي المقترحة

حيث :

$$i = 1,2,3,4, \quad j = 1,2,3, A \text{ OR } B \text{ OR } C, \quad k = 1,2,3,4$$

دالة الهدف

$$\text{Min } Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 c_{ijk} x_{ijk} + \sum_{i=1}^4 \sum_{j \in \{A,B,C\}} \sum_{k=1}^4 c_{ijk} \delta_{ijk} x_{ijk} + F_j \delta_j$$

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \exists x_{ijk} > 0, j \in \{A, B, C\}, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p} \\ 0 & \text{otherwise, } \nexists (x_{iAk} > 0, x_{iBk} > 0, x_{iCk} > 0), \\ & j \in \{A, B, C\}, i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p} \end{cases}$$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \exists \delta_{ijk} = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

القيود الخاصة بحقول النفط الخام والمستورد

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{1jk} + \sum_{k=1}^4 x_{1Ak} + My_1 \geq 80, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{2jk} + \sum_{ik=1}^4 x_{2Ak} + My_1 \geq 60$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{1jk} + \sum_{k=1}^4 x_{1Bk} + My_2 \geq 80, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{2jk} + \sum_{k=1}^4 x_{2Bk} + My_2 \geq 60$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{1jk} + \sum_{k=1}^4 x_{1Ck} + My_3 \geq 80, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{2jk} + \sum_{k=1}^4 x_{2Ck} + My_3 \geq 60$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{3jk} + \sum_{k=1}^4 x_{3Ak} + My_1 \geq 100, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{4jk} + \sum_{k=1}^4 x_{4Ak} + My_1 \geq 120$$

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{4jk} + \sum_{k=1}^4 x_{4Bk} + My_2 \geq 120, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{3jk} + \sum_{k=1}^4 x_{3Bk} + My_2 \geq 100,$$

$$\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{3jk} + \sum_{k=1}^4 x_{3Ck} + My_3 \geq 100, \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^4 x_{4jk} + \sum_{k=1}^4 x_{4Ck} + My_3 \geq 120$$

القيود الخاصة بسعة مصافي التكرير

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{i1k} = 100, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{i2k} = 60, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{i3k} = 80,$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{iAk} + My_1 \geq 120, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{iBk} + My_2 \geq 120, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 x_{iCk} + My_3 \geq 120$$

القيود الخاصة بمراكز التوزيع

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij1} + \sum_{i=1}^4 x_{iA1} - My_1 \leq 100, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij2} + \sum_{i=1}^4 x_{iA2} - My_1 \leq 80$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij1} + \sum_{i=1}^4 x_{iB1} - My_2 \leq 100, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij2} + \sum_{i=1}^4 x_{iB2} - My_2 \leq 80$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij1} + \sum_{i=1}^4 x_{iC1} - My_3 \leq 100, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij2} + \sum_{i=1}^4 x_{iC2} - My_3 \leq 80$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij3} + \sum_{i=1}^4 x_{iA3} - My_1 \leq 80, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij3} + \sum_{i=1}^4 x_{iA3} - My_1 \leq 100$$

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij3} + \sum_{i=1}^4 x_{iB3} - My_2 \leq 100, \quad \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij4} + \sum_{i=1}^4 x_{iB4} - My_2 \leq 80$$

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي

براق صبحي كامل

$$\sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij3} + \sum_{i=1}^4 x_{ic3} - My_3 \leq 100, \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 x_{ij4} + \sum_{i=1}^4 x_{ic4} - My_3 \leq 80$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 2, x_{ijk} \geq 0, y_i \in \{0,1\}, i = 1,2,3 \quad M \gg 0$$

بأستخدام برنامج الحاسوب الجاهز WINQSB ، تم الحصول على نتائج الحل الامثل (بوحددة قياس مليون برميل / سنوياً) وعلى النحو التالي :

$$x_{111} = 35, x_{1c2} = 25, x_{234} = 60, x_{323} = 5, x_{1c3} = 75, x_{334} = 20, x_{3c4} = 20, x_{411} = 65, x_{422} = 55$$

الكلفة الكلية السنوية = 2707 مليون دولار / سنوياً ، وقد تم اختيار الموقع c (ميزوري) لانشاء مصفى التكرير الجديد المزمع دخوله ضمن خطة توسيع عمل الشركة.

تفسير الحل ما بعد الامثلية

عندما يكون سعر الظل لاحدى قيود سعة مصافي التكرير هو 8.5 ، هذا يعني عند تقليل قيمة هذا المورد المتمثل بسعة مصفى التكرير الاول، وحدة واحدة من 100 الى 99 ، فإن دالة الهدف ستتحسن (تقل) بمقدار 8.5 مليون دولار، ومن جهة اخرى لو اخذنا قيماً والذي يمتلك سعر ظل(-3) يعني في حال تقليل قيمة هذا المورد المتمثل بسعة مصفى التكرير الثاني، وحدة واحدة من 100 الى 99 ، فإن دالة الهدف سوء تسوء تزيد بمقدار 3 مليون دولار .

الاستنتاجات

لقد قمنا في هذا البحث استعراض بعض المفاهيم المتعلقة بتحليل الحساسية الذي يسمى احياناً تحليل ما فوق الامثلية post optimality ، وهذا النوع من التحليلات تستخدمه الادارات للاجابة عن سلسلة من اسئلة ذات صيغة ((ماذا يحدث اذا)) عن القيم الداخلة في نموذج البرمجة الخطية ، كما ان هذا النوع من التحليلات يختبر الكيفية التي يتغير بها الحل الامثل من حيث الربح وقيم الطرف الايمن من القيود، كذلك استفدنا من مفهوم الاعداد الاولية في حل نموذج البرمجة الخطية المضطرب.

المصادر

1. حلمي عبد الفتاح البشبيشي، طه الطاهر ابراهيم اسماعيل، دلال صادق بطرس، "بحوث العمليات في المحاسبة"، مركز الكمبيوتر/كلية الصيدلة/جامعة القاهرة، 1993.
2. George B. Dantzig, Mukund N. Thapa, " Linear Programming ", springer, 1997.
3. Paul A. Jensen & Jonthan F. Bard, " Operations Research models and methods ", John Willy & Sons, Inc. 2003.

تحليل الحساسية في البرمجة الخطية مع تطبيق عملي
براق صبحي كامل

4. Bhumik, [http://www.casestudy.com.in/a-case study in many transportation problems](http://www.casestudy.com.in/a-case-study-in-many-transportation-problems) Highered. McGraw-hill com. ch08_suppleme.qsd 5/12/2004 .
5. Prem Kumar Gupta, .S.Hira, ". Operations Research" , S.chand and company LTD , 2000. P 585-586.
6. James K.HO, Computing True Shadow Prices in Linear programming, informatics, vol.11No.4, 421-434, 2000.
7. Jan Stallaert, Post-Optimality Analysis of the optimal Solution of a Degenerate Linear program Using a Pivoting Algorithm, OPIM Department, Unit 1041, Storrs, CT 06269,2005.
8. Ivokhin E.V., Almodars Barraq Subhi Kaml, on approach for the solving of the linear programming problem with fuzzy constraints, вісник, Mathematics - physics Sciences No.1,2013
9. Almodars Barraq Subhi Kaml, Improve the methods and algorithms of fuzzy linear programming problems with limited resources, Doctorate dissertation, National University of Kyiv, Kyiv 2015.