

دراسة عن تطبيق هينون مع حالة دراسية من علم البيئة

إنعام هادي عبد

باسل يونس ذنون الخياط

قسم الرياضيات

كلية علوم الحاسبات والرياضيات /جامعة الموصل.

تاريخ قبول البحث ٢٠٠٤/٣/٢٢

تاريخ الاستلام: ٢٠٠٣/٩/٢٢

ABSTRACT

This paper deals with the well known Henon map. Its main properties are studied as well as a non deterministic form. Least squares estimates of parameters of the non deterministic model are driven and a case study from animal ecology is studied, where the population size of the Canadian lynx animal is considered as a time series. The embedding dimension of this time series is estimated and then a mathematical model of the form of suggested non deterministic (stochastic) model is fitted . The chaotic property of this series is studied throughout the fitted model .

الملخص

يتعامل هذا البحث مع التطبيق المعروف بتطبيق هينون . وتدرس الخصائص العامة لهذا التطبيق فضلا عن شكل غير محدد. وتشتق مقدرات المربعات الصغرى للنموذج غير المحدد وتعتبر حالة دراسية من بيئة الحيوان ، اذ يدرس التغير في حجم مجتمع حيوان الوشق الكندي بوصفه سلسلة زمنية . ويتم أولا تقدير البعد المغمور لهذه السلسلة الزمنية ومن ثم يلائم لها نموذج رياضي بشكل تطبيق هينون التصادفي وتدرس الخاصية الجيكانية لهذه السلسلة من خلال هذا النموذج .

١ . المقدمة

إن تطبيق هينون هو تطبيق تكراري Iterative map ذو بعدين للنظم الديناميكية وله حلول جيشانية. وقد أقرحه الفلكي الفرنسي (1976) Henon كنموذج مبسط من تطبيق بونكاريه Poincare Map وكنموذج رياضي للسلوك الجشاني ذي البعدين. إن الصيغة الرياضية لتطبيق هينون في R^2 تكون بالصيغة الآتية (راجع المصدر [6]):

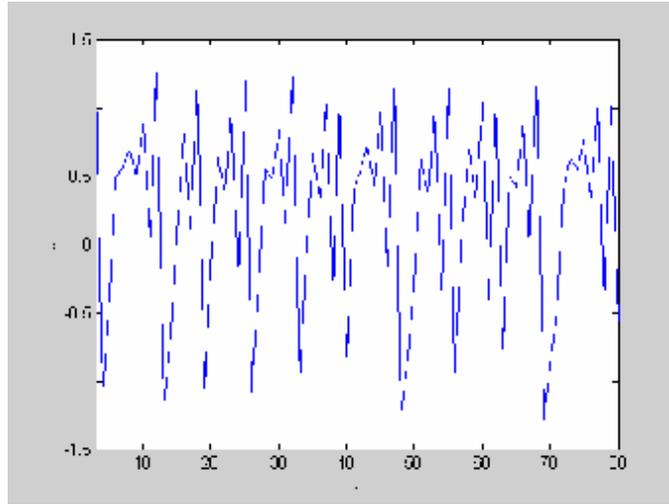
$$H(x, y) = (1 - bx^2 + y, dx) \quad (1)$$

حيث أن b و d هما ثابتان موجبان يمثلان معلمتي تشعب Bifurcation Parameters وأن d هي عبارة عن مقياس لنسبة Rate انكماش المساحة Area Contraction (Dissipation). ويعد تطبيق هينون من أكثر التطبيقات ذوات البعدين عمومية ويتمتع بخاصية كون الانكماش فيه مستقلا عن x و y . وعندما تكون $d=0$ فإن تطبيق هينون يتحول إلى تطبيق تربيعي والذي يكون مرافقا للتطبيق المنطقي. وهناك حلول معروفة لتطبيق هينون على مدى قيم b و d ، وان قسما من هذه الحلول يؤول إلى حلول جيشانية.

٢ . أبرز خصائص تطبيق هينون

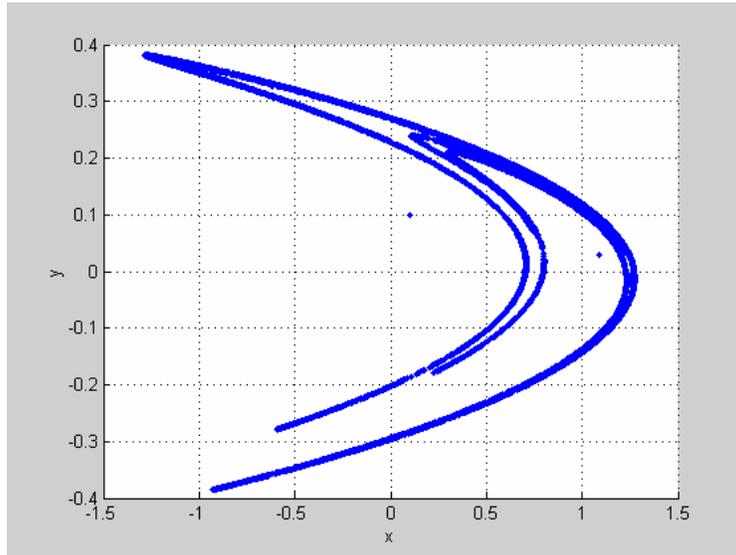
يمكن إجمال خصائص تطبيق هينون بالنقاط الآتية والمقتبسة من المصادر الآتية ([7], [1], [6], [11]) .

الخاصية الأولى: إن السلوك الزمني لهذا التطبيق في البعد السيني مبين في الشكل (1) وباستخدام القيمة البدائية $x_0=1$ ، ويلاحظ من الشكل التذبذب حول نقطة الأصل وبشكل غير متناظر، حيث أن التشتت في الحافات السفلى يكون أكبر بكثير مما هو عليه في الحافات العليا.



الشكل (1) السلوك الزمني في البعد السيني لتطبيق هينون .

واما الشكل (2) فيبين رسم جاذب تطبيق هينون عند قيمتين مختاريتين من b و d .



الشكل (2) جاذب تطبيق هينون بالمعلمتين $d=0.3, b=1.4$.

الخاصية الثانية: إن تطبيق هينون ذو طبيعة تكرارية Iterated .

الخاصية الثالثة: يمكن أن يُكتب تطبيق هينون $H(x,y)$ بصيغة

$$H(x,y)=(H_1(x,y),H_2(x,y))$$

حيث أن $H_1(x,y)=1-bx^2+y$ و $H_2(x,y)=dx$ ، وبذلك تكون مصفوفة جاكوبي Jacobean Matrix بالصيغة الآتية:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} \end{bmatrix} .$$

أي أن

$$J = \begin{bmatrix} -2bx & 1 \\ d & 0 \end{bmatrix} . \quad (2)$$

ويلاحظ أن مصفوفة جاكوبي لتطبيق هينون (2) لها محدد يساوي (-d) .

الخاصية الرابعة: إن تطبيق هينون هو تطبيق متباين (one-to-one) . ويمكن

برهان ذلك بفرض أن x,y,u,v هي اعداد حقيقية فنجد أن $H(x,y)=H(u,v)$

إذا فقط إذا كان

$$(1-bx^2+y,dx)=(1-bu^2+v,du) \text{ ، وهذا يتحقق فقط عندما تكون } u=x \text{ (لأن } d \neq 0 \text{ و } 1-bu^2+v=1-bx^2+y \text{ .)}$$

وبالتعويض في المعادلة الأخيرة عن $u=x$ نجد أن $H(x,y)=H(u,v)$ إذا فقط

إذا كانت $u=x$ و $v=y$.

الخاصية الخامسة: إذا كانت $d \neq 0$ فإن تطبيق هينون يكون قابلاً للانعكاس

Invertible . ويمكن الوصول الى ذلك بملاحظة أن

$$H^{-1}(x,y) = \left(\frac{y}{d}, -1 + \frac{b}{2} y^2 + x \right) \text{ فتكون } H(x,y) = (1-bx^2+y,dx)$$

الخاصية السادسة: إن تطبيق هينون يمتلك نقطة صامدة Fixed -Point عند النقطة (x^*, y^*) ، حيث أن:

$$x^* = \frac{d-1 \pm \sqrt{(1-d)^2 + 4b}}{2b}$$

$$y^* = dx^*$$

البرهان: - تكون النقطة p هي نقطة صامدة للتطبيق f إذا كانت $f(p)=p$ (راجع المصدر [1]). وفي حالة تطبيق هينون لو فرضنا أن $p=(x^*, y^*)$ هي نقطة صامدة فأن

$$H(x^*, y^*) = (x^*, y^*)$$

أي أن

$$(1-bx^{*2} + y^*, dx^*) = (x^*, y^*)$$

لذا نجد أن:

$$1-bx^{*2} + y^* = x^*$$

$$dx^* = y^*$$

أي أنه وبعد استخدام التعويض $y^* = dx^*$ نحصل على:

$$bx^{*2} + (1-d)x^* - 1 = 0$$

وباستخدام قانون الدستور نجد أن:

$$x^* = \frac{-(1-d) \pm \sqrt{(1-d)^2 + 4b}}{2b}$$

$$= \frac{d-1 \pm \sqrt{(1-d)^2 + 4b}}{2b}$$

ملاحظات:

١. تكون النقطة الصامدة (x^*, y^*) حقيقية عندما تكون $b > -(1-d)^2/4$.

٢. عندما تكون النقطة الصامدة (x^*, y^*) حقيقية فإن احدى النقاط تكون دائما غير مستقرة خطيا Linearly Unstable في حين أن باقي النقاط تكون غير مستقرة عندما تكون $b > 3(1-d)^2/4$.
٣. عندما تكون $b \approx 1.4, d \approx 0.3$ ، فإن تطبيق هينون يكون جيشانيا (انظر الشكل (2)) وأنه يولد عندئذ جاذبا غريبا Strange Attracted (راجع المصدر [11]).

الخاصية السابعة: إن مصفوفة جاكوبي لتطبيق هينون (2) لها قيمتان ذاتيتان Eigen Values هما

$$\lambda_i = -bx \pm \sqrt{b^2x^2 + d} \quad ; i = 1, 2$$

ملاحظة: لقد بين (المصدر [11]) تحليلا لتطبيق هينون في ضوء قيمتي λ_1 و λ_2 :

١. إذا كانت $|I_1|, |I_2| < 1$ ، فإن النقطة الصامدة تكون جاذبة Attracting.
٢. إذا كانت $|I_1|, |I_2| > 1$ ، فإن النقطة الصامدة تكون طاردة Repelling.
٣. إذا كانت $|I_1| < 1, |I_2| > 1$ ، فإن النقطة الصامدة تكون نقطة سرجية Saddle Point.
٤. إذا كانت $|I_1| = 1$ أو $|I_2| = 1$ ، فإن النقطة الصامدة لا تكون زائدية Non-hyperbolic.

٣. حساب البعد الكسوري لتطبيق هينون

من الأمور التي أهتم بها الباحثون حساب البعد الكسوري لتطبيق هينون. ومادما نتعامل مع الفضاء R^2 فيمكننا أن نقسم الشكل الرباعي إلى مربعات صغيرة طول ضلع كل منه ϵ ثم حساب عدد المربعات التي تحوي جاذب تطبيق هينون والتي نرمز لها بـ $N(\epsilon)$. فلو اختيرت $\epsilon = 2^{-n}$ ، للقيم $n = 2, 3, \dots, 7$ ، فإن الجدول الآتي يوضح عدد المربعات التي تحوي جاذب هينون (راجع المصدر [1]).

الجدول (1) : طول ضلع المربع وعدد المربعات التي تحوي الجاذب .

طول ضلع المربع e	عدد المربعات التي تحوي الجاذب N(e)
2 ⁻²	76
2 ⁻³	177
2 ⁻⁴	433
2 ⁻⁶	2467
2 ⁻⁷	5763

وكما هو واضح فإن هناك علاقة أسية بين ϵ و $N(\epsilon)$ ممكن أن تكون

صيغتها الرياضية بشكل

$$N(e) = ab^e, \quad (4)$$

حيث أن α و β كميتان ثابتتان. وبأخذ لوغاريتم طرفي المعادلة الأخيرة

نحصل على

$$\log[N(e)] = \log(a) + e \log(b). \quad (5)$$

وبفرض أن $a = \log(\alpha)$ و $b = \log(\beta)$ ، ولتسهيل الحسابات باختيار أساس

اللوغاريتم لكي يكون 2 نحصل على

$$\log_2[N(e)] = a + be. \quad (6)$$

وبذلك تتحول المسألة إلى مسألة انحدار خطي بسيط، وباستخدام الأساليب

الإحصائية الكلاسيكية يمكن تقدير قيمة a و b فتصبح المعادلة السابقة بالشكل الآتي:

$$\log_2[N(e)] = 3.73298852 + 1.253891429e. \quad (7)$$

وبأخذ معكوس اللوغاريتم لطرفي المعادلة الأخيرة ينتج

$$N(e) = (2^{3.73298852}) (2^{1.253891429e}).$$

أي أن:

$$N(e) = (13.296628) (2^{1.253891429e}). \quad (8)$$

واستنادا الى (المصدر [1]) فان معامل e في العلاقة الأخيرة يمثل البعد الكسوري، وبناء على هذا يكون مقدر البعد الكسوري لتطبيق هينون هو 1.25389. **ملاحظة:** لقد اوضح (تقرير انترنيت [1]) ان تطبيق هينون له بعد ارتباط مقداره $d_{corr} \cong 1.23$ ، كما ان لهذا التطبيق قوى ليبنوف هما $\lambda_1 = 0.6$ ، $\lambda_2 = -2.3$. ومن هنا يتضح ان لتطبيق هينون بعد ليبنوف مقداره

$$d_L = 1 + \frac{I_1}{|I_2|} \cong 1.26$$

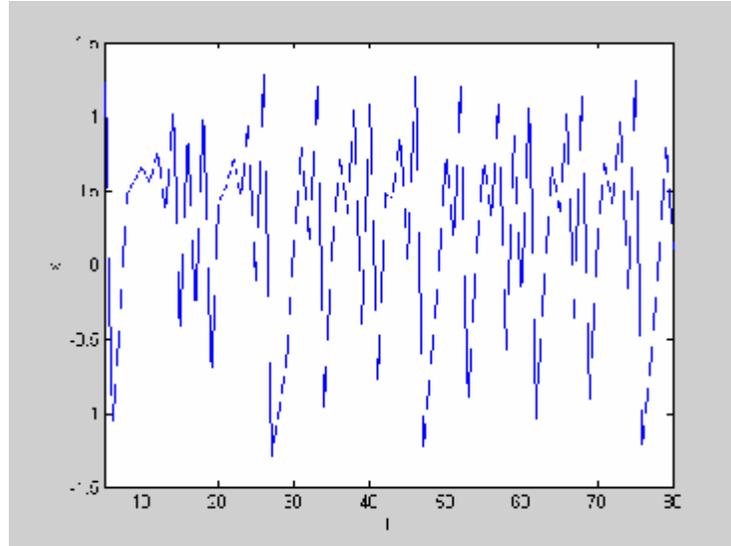
كذلك فقد بينا بأن مقدر البعد الكسوري لهذا التطبيق هو 1.25389. وكما هو واضح فإن هذه الابعاد متقاربة مع بعضها البعض، ومن هنا يمكننا الاستنتاج بأن تطبيق هينون له بعد كسوري مقداره حوالي 1.3.

٤. تطبيق هينون للنظم الديناميكية التصادفية

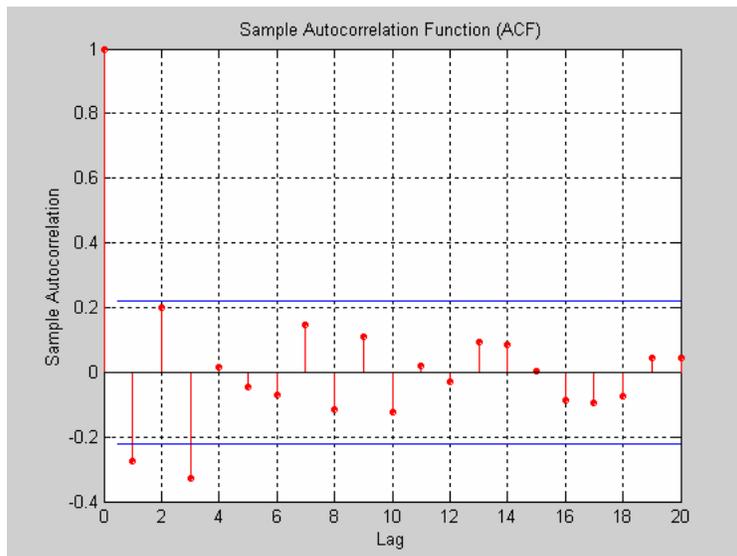
لقد اوضح (تقرير انترنيت [2]) انه يمكن تحويل هذا التطبيق بدلالة متغير واحد ولكن بتخلفين زمنيين وذلك بوضع $Y_{t-1} = X_{t-2}$ في $X_t = 1 - bX_{t-1}^2 + Y_{t-1}$ لينتج التطبيق المحدد $X_t = 1 - bX_{t-1}^2 + X_{t-2}$. إن هذا التطبيق المحدد يمكن تحويله الى غير محدد وذلك باضافة حد للتشويش ε_t . وبعد وضع معاملات للحدود الثلاثة يصبح النموذج غير المحدد والمقترح من قبل الباحثين بالصيغة العامة الآتية:

$$X_t = a + bX_{t-1}^2 + cX_{t-2} + e_t; \quad t=3,4,\dots \quad (9)$$

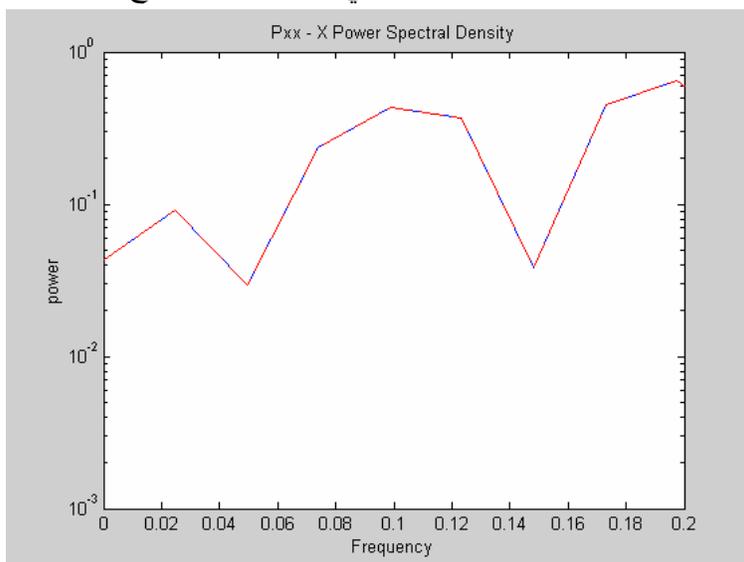
حيث أن a و b و c تمثل معاملات النموذج وأن e_t يمثل التشويش الأبيض (White Noise) والذي يفترض بأنه متغير عشوائي ذو معدل صفر وتباين s_e^2 . الشكل (3) يوضح مشاهدات من النموذج (9). أما الشكلان (4) و (5) فيوضحان رسم دالة الارتباط الذاتي Autocorrelation Function وطيف القدرة Power Spectrum لهذه المشاهدات على التوالي.



الشكل (3) : مشاهدات مولدة من النموذج (9) بالمعلمات $a=1$ و $b=1.4$ و $c=0.3$



الشكل (4): دالة الارتباط الذاتي لمشاهدات النموذج (9).



الشكل (5): دالة طيف القدرة لمشاهدات النموذج (9).

وكما واضح من الشكل (3) فان النموذج ذو طبيعة دورية وإن الحافات السفلى اكثر تشتتاً من الحافات العليا، وهذه الطبيعة الدورية أيضا تظهر في رسم دالة الارتباط الذاتي. كما يتضح من رسم طيف الطاقة وجود طاقة عالية عند التردد 0.1 وكذلك عند التردد 0.2.

٥. تقدير معاملات النموذج التصادفي

لنفرض أن $\{x_t; t=1,2,\dots,n\}$ هي مشاهدات مأخوذة من سلسلة زمنية معينة $\{x_t\}$ ذات بعد مغمور 2 وهدفنا الآن ملاءمة نموذج رياضي لها بصيغة النموذج (9) لهذه المشاهدات من خلال تقدير معاملات النموذج. فإذا كانت المشاهدات $\{x_t; t=1,2,\dots,n\}$ تحقق النموذج (9) فعندئذ تتحقق المعادلة

$$x_t = a + bx_{t-1}^2 + cx_{t-2} + e_t ; \quad t = 3,4,\dots,n$$

ويمكن كتابة النموذج السابق بصيغة المصفوفات وكما يأتي:

$$\begin{matrix} \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \\ \hat{e}_M \\ \hat{e}_n \end{matrix} \begin{matrix} \hat{1} \\ \hat{1} \\ \hat{M} \\ \hat{1} \end{matrix} \begin{matrix} x_2^2 \\ x_3^2 \\ M \\ x_{n-1}^2 \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ M \\ x_{n-2} \end{matrix} \begin{matrix} \hat{a} \\ \hat{b} \\ \hat{c} \\ \hat{e}_n \end{matrix} = \begin{matrix} \hat{e}_3 \\ \hat{e}_4 \\ \hat{M} \\ \hat{e}_n \end{matrix}$$

أي

$$Y = Xq + e \quad (10)$$

حيث أن:

$$Y = \begin{bmatrix} x_3 & x_4 & L & x_n \end{bmatrix}^t$$

$$X = \begin{bmatrix} \hat{1} & x_2^2 & x_1 & \hat{a} \\ \hat{1} & x_3^2 & x_2 & \hat{b} \\ \hat{M} & M & M & \hat{c} \\ \hat{1} & x_{n-1}^2 & x_{n-2} & \hat{e}_n \end{bmatrix}^t$$

$$q = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^t$$

$$e = \begin{bmatrix} e_3 & e_4 & L & e_n \end{bmatrix}^t$$

وبالاستفادة من النتيجة المعروفة جيدا في موضوع الانحدار نجد أن مقدر

المربعات الصغرى للمعلمة q (أنظر المصدر [4]) هو:

$$(11a)$$

$$\hat{q} = (X'X)^{-1} X'Y$$

$$\therefore \hat{q} = \begin{bmatrix} (n-2) & \sum x_{t-1}^2 & \sum x_{t-2} \\ \sum x_{t-1}^2 & \sum x_{t-1}^4 & \sum x_{t-2} x_{t-1}^2 \\ \sum x_{t-2} & \sum x_{t-2} x_{t-1}^2 & \sum x_{t-2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum x_{t-2} \\ \sum x_{t-1}^2 x_t \\ \sum x_{t-2} x_t \end{bmatrix} \quad (11b)$$

حيث أن علامة المجموع المذكورة انفا تكون من $t=3$ إلى $t=n$. أما مصفوفة

التباين -التغاير فهي:

$$Var-Cor(\hat{q}) = \hat{S}_e^2 \begin{bmatrix} (n-2) & \sum x_{t-1}^2 & \sum x_{t-2} \\ \sum x_{t-1}^2 & \sum x_{t-1}^4 & \sum x_{t-2} x_{t-1}^2 \\ \sum x_{t-2} & \sum x_{t-2} x_{t-1}^2 & \sum x_{t-2}^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (12a)$$

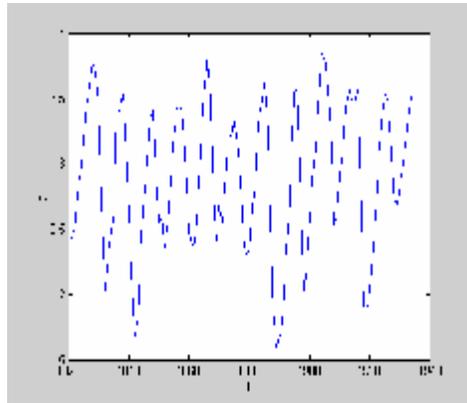
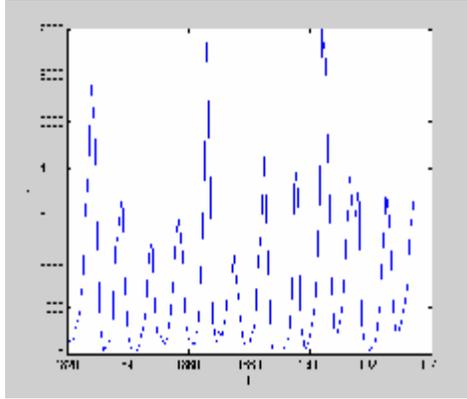
حيث أن \hat{S}_e^2 هو مقدر تباين التشويش والذي يمكن حسابه من العلاقة الآتية:

$$\hat{S}_e^2 = \frac{\sum_{t=3}^n [x_t - \hat{a} - \hat{b}x_{t-1}^2 - \hat{c}x_{t-2}]^2}{n-6} \quad (12b)$$

وإن n-6 تمثل عدد درجات الحرية (= عدد البيانات - عدد المعلمات المقدره-1) .

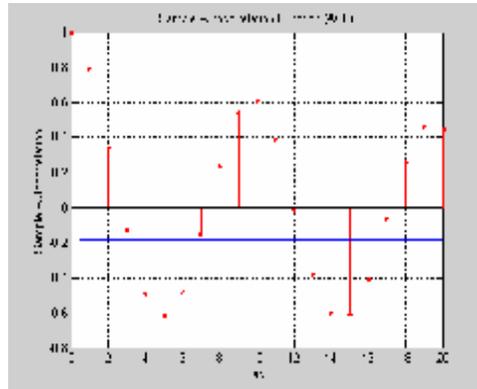
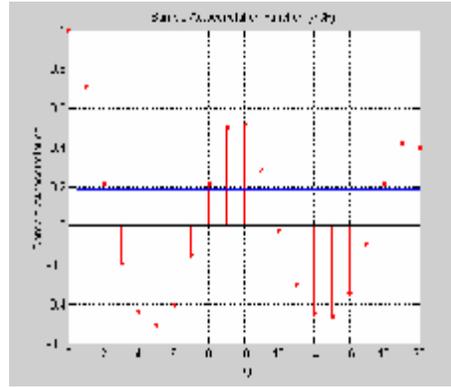
٦. حالة دراسية

تعد السلسلة الزمنية لحيوان الوشق الكندي من السلاسل الزمنية المعروفة جيداً في مجال علم البيئة وهي تمثل ١١٤ مشاهدة لحجم مجتمع حيوان الوشق الكندي في حوض نهر ماكانزي Mackenzie في شمال غرب كندا والفترة ١٨٢١-١٩٣٤. لقد ظهرت هذه البيانات أولاً في (المصدر [5]) ثم حللها إحصائياً (المصدر [9]). ولتقليل عدم التناظر في البيانات اقترح (المصدر [9]) اخذ لوغاريتم للأساس 10 لها. والشكل (6) يبين الرسم الزمني للبيانات الخام X_t وكذلك للبيانات المحولة $Y_t = \log_{10} X_t$.



الشكل (6) الرسم الزمني للبيانات الخام X_t والبيانات المحولة Y_t .

ويلاحظ من الشكل الطبيعية الدورية لهذه البيانات ، وهذا أيضا واضح من رسم دالة الارتباط الذاتي لهذه البيانات كما في الشكل (7) .



الشكل (7) دالة الارتباط الذاتي للبيانات الخام (الجهة اليمنى) والبيانات المحولة (الجهة اليسرى) .

لقد تم تطبيق طريقة تقاطع الشرعية لتقدير البعد المغمور للبيانات المحولة لحجم مجتمع حيوان الوشق الكندي باستخدام الطريقة التي نوقشت في (المصدر [3]) ثم برمجت حاسوبيا في الخيط (2002) والجداول (2) يبين النتائج التي تم الحصول عليها والتي تمثل قيم $CV(d)$ عند قيم مختلفة من d .

الجدول (2) : قيم CV(d) للبيانات المحولة لحجم مجتمع حيوان الوشق الكندي .

D	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
CV(d)	2.001	1.535*	1.670	1.580	1.779	1.709	1.621	1.740	1.804	1.890

وكما هو واضح فإن مقدر تقاطع الشرعية للبعد المغمور هو عند $\hat{d} = 2$.
ومن المسائل التي شغلت حيزا واسعا في موضوع تحليل السلاسل الزمنية هي مسألة نمذجة حجم مجتمع حيوان الوشق الكندي . ومن أول النماذج التي وضعت بهذا الخصوص هو نموذج AR(2) الخطي الذي وضعه الباحث (المصدر [9]).. وخلال مناقشته للبحث الذي القاه (المصدر [2]) ، فقد اقترح الباحث D.R. Cox ملاعمة نموذج غير خطي من الرتبة الثانية لهذه السلسلة الزمنية . كذلك فإن الباحث (المصدر [10]) قد اقترح نموذجا آخر غير خطي وأيضا من الرتبة الثانية .

وبالرجوع إلى المبحث الخامس ، فقد تمت ملاعمة نموذج رياضي تصادفي للوغاريتم حجم مجتمع حيوان الوشق الكندي بشكل تطبيق هينون وكما مبين في أدناه

$$Y_t = 2.8980 + 0.2399Y_{t-1}^2 - 0.7193Y_{t-2} + e_t, \quad (13)$$

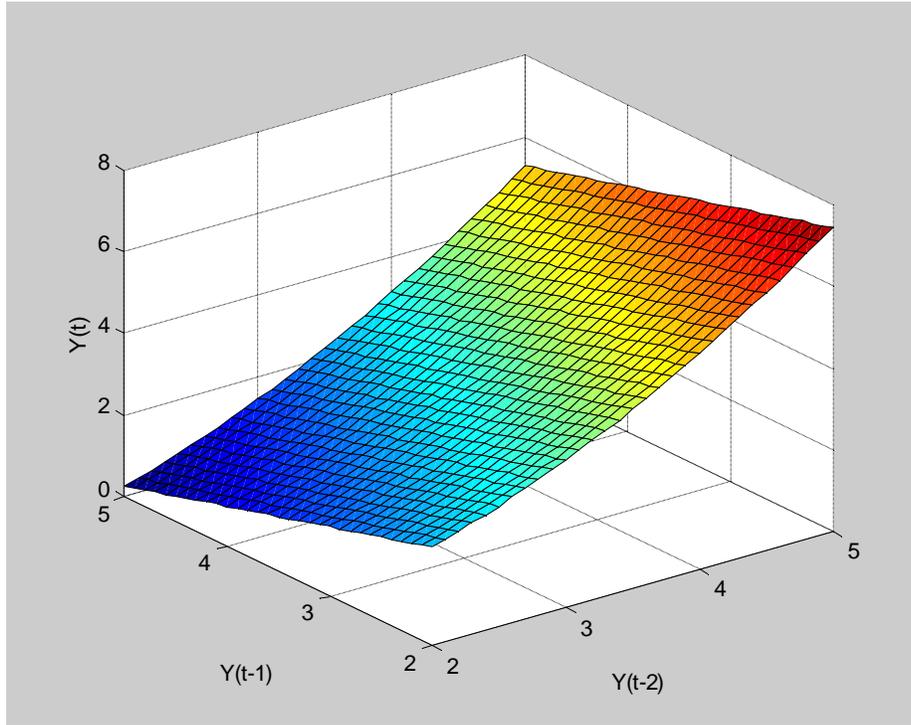
(n0.1347) (n0.0122) (n0.0689)

حيث إن $s_e^2 = 0.0620$ وان الأرقام المحصورة بين القوسين تمثل الأخطاء المعيارية للمقدرات والتي أخذت باعتبارها الجذور التربيعية للعناصر القطرية لمصفوفة التباين - التغاير.

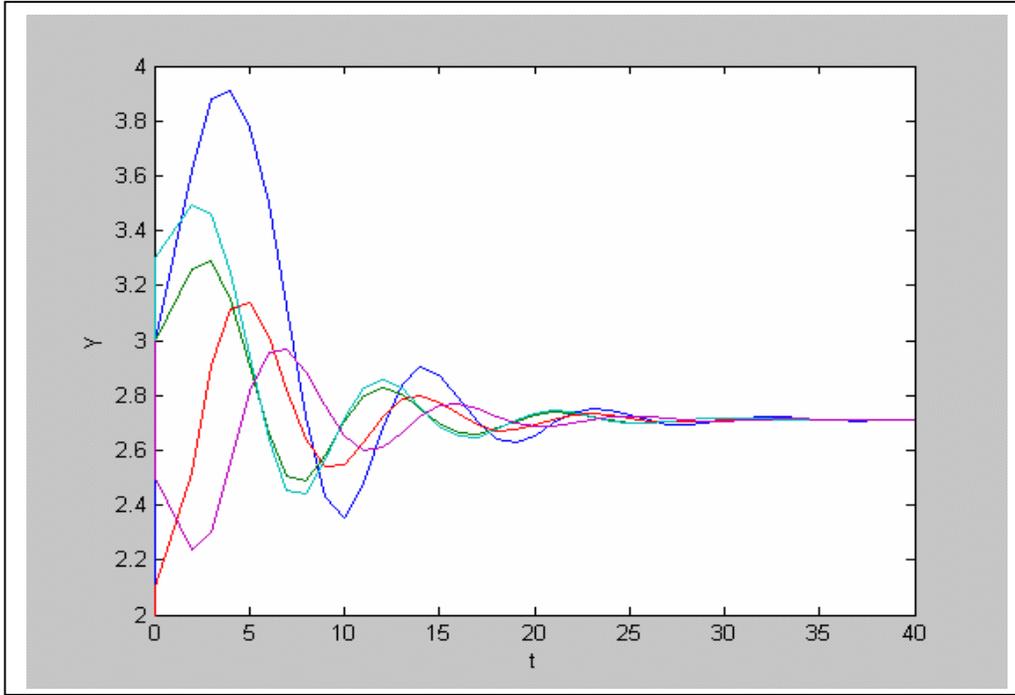
٧. مناقشة

لقد تم تقدير البعد المغمور لحجم مجتمع حيوان الوشق الكندي وتبين بأنه (2) ، وبناءً على ذلك فقد تمت ملاعمة نموذج رياضي غير خطي بشكل تطبيق هينون لهذه السلسلة الزمنية. ويلاحظ من مقارنة مقدرات معاملات النموذج مع أخطائها المعيارية ثباتية هذه المعلمات ومعنوياتها عن الصفر مما يؤكد سلامة البناء

الرياضي لهذا النموذج . والشكل (8) يبين رسم ذي ثلاثة أبعاد للسطح الناجم من الجزء المحدد من النموذج (13) ، وكما هو واضح فان السطح الناجم مستو بانحناء بسيط. ولدراسة حساسية النموذج للقيم الابتدائية ، تم توليد 5 مدارات بقيم ابتدائية مختلفة من الجزء المحدد من النموذج الملائم . وهذه المدارات مبيّنة في الشكل (9)، وكما هو واضح من هذا الشكل فإن جميع هذه المدارات تؤول في النهاية إلى النقطة $x_{\infty}=2.7113$. أي إن $x_{\infty}=2.7113$ تمثل نقطة الغاية Limit Point للنموذج الملائم . من ناحية أخرى ، ولعدم حساسية النموذج للتغير في القيم الابتدائية ، فيستنتج إن حجم مجتمع حيوان الوشق الكندي (بالمقياس اللوغاريتمي) ليس جيثانيا .



الشكل (8) السطح الناجم من الجزء المحدد من النموذج (13).



الشكل (9) خمسة مدارات بقيم ابتدائية مختلفة من النموذج (13).

المصادر

الخياط، باسل يونس ذنون (2002) "تقدير رتب نماذج الأنحدار الذاتي للسلاسل الزمنية". وقائع المؤتمر العلمي الثالث عشر للجمعية العراقية للعلوم الأحصائية، بغداد ٢-٣ تشرين الثاني.

- [1]- Alligood, K . T. ,Sauer ,T. D. and Yorke, J. A. (1997)
"CHAOS:An
Introduction to Dynamical Systems" .Verlag, New
York,Inc.
- [2]- Cambell , M.J. and Walker , A.M. (1977) "A servey of
Statistical Work on the Mackenzie River Series of
annual Canadian lynx trappings for the years 1821-1934 and
a new analysis (with discussion)".J. Roy. Statist. Soc
,A,140,411-431.
- [3]- Cheng,B. and Tong ,H.(1992) "On consistent non parametric
order determination and chaos" . J.R.S.S. B, 54,No.2,427-
449.
- [4]- Draper, N. and Smith,H. (1966) "Applied Regression
Analysis " Wiley, New York .
- [5]- Elton, C,and Nicholson,M. (1942) "The ten years cycle
in numbers of Iynx in Canada",J.Anim.Ecol.,11,215-244
.
- [6]-Gershenfeld ,N .(1999) "The Nature of Mathematical
Modeling", Cambridge University Press .

- [7]- Gulick, D. (1992)“ Encounters with Chaos” McGraw-Hill,inc.New York
- [8]- Henon, Michel (1976) “A two-Dimensional Mapping with a Strange Attractor,” Commun .Math. phys. 5D (1976),pp.69-77.
- [9]- Moran, P.A.P. (1953) “The statistical analysis of the Canadian Lynx cycle”, Int Aust . J . Zool.,1,163-173.
- [10]-Thanon,B.Y.(1984) : “ A study of threshold autoregressive models with Some applications” .Ph.D. Thesis, Department of Mathematics, University of Manchester.
- [11]- Wachsmuth, B.G (2000) “Chaos and Fractals”,Complex Dyna. Systems .

تقارير الانترنت

- [1] Henon Map
[file:///A:/Henon%20 Map.htm](file:///A:/Henon%20Map.htm)
- [2] Henon Map Correlation Dimension, By J.C. Sportt
<http://Sportt.physics.wisc.edu/chaos/henongp.htm>