# وجود الأقواس -(47,5)
# في المستوي ألإسقاطي PG(2,13)

**شعاع محمود عزيز**

*قسم الرياضيات / كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل*

**تاريخ الاستلام : ٢٠٠٢/٦/١٠ تاريخ قبول البحث : ٢٠٠٢/١١/٥**

## ABSTRACT

In this work we show the existence of complete (47,5)-arcs which are unknown until now. The upper bound for the (k,5)- arcs is narrowed in the finite projective plane PG (2,13). The narrowing is fulfilled by finding complete (47,5)-arcs which are 372 arcs. However, only one (47,5)-complete arc out of the 372 is considered in this work. Furthermore the relation between complete (k, n)-arcs and minimal t-blocking sets is proved, in addition to between the connection of our arc and the code.

## الملخـــــص

في هذا البحث تم إثبات وجود الأقواس-(47,5) , التي كانت تعتبر مجهولـــة الوجود الى حد الآن .إذ تم تضييق القيد الأعلى للأقـــواس -(k,5) فـــي المـــستوي الإسقاطي المنتهي PG(2,13) وذلك بإيجاد أقواس تامّة من النمط-(47,5) و كـــان عددها 372 قوساً.وقد تم ذكر قوس واحد من الأقواس الـــ 372 .فضلاً عن ذلـــك فقد تمت برهنة علاقة بين الأقواس -(k,n) التامة والمجموعات القالبية الأصـــغرية فضلا عن علاقة القوس المذكور مع الشفرة(code).

**١: التعاريف:**

نستهل بإعطاء بعض التعاريف التي ستستند الى حقول كالوا GF(q) والتي بدورها تعتمد على الحلقة $Z_p$ حيث $GF(p) \cong Z_p \cong Z/pZ$.

**(١ - ١) تعريف[1] :**

ليكن S,S' فضائين اسقاطيين فان الإسقاط أو التحويل ألإسقاطي (projectivity) Σهو علاقة تقابل (Bijection) $\Sigma: S \to S'$ يمكن تمثيلها بالمصفوفة غير المفردة T (non- singular matrix) بحيث إذا كانت $p(x')=p(x)\sum$ فإنّ $tx'=xT$ حيث x′,x هما متجها الإحداثيات (coordinate vectors) للنقطتين p(x′),p(x) على التوالي .

**(١ - ٢ ) تعريف**[1] : إذا كانت

$$F(x) = x^n - a_{n-1}x^{n-1} - \ldots - a_0$$

متعددة حدود أحادية، فان المصفوفة المرافقة C(F) (companion matrix) هي المصفوفة الاتية ذات البعد n×n

$$C(F) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & 1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & . & . & a_{n-1} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

**(١ - 3) تعريف[3]:**

إذا كان Π إسقاطاً على المستوي P فإن Π يسمى إسقاطاً دوّاراً إذا كان

$\mathbf{p}^{(n)} = P^n \mathbf{p} = \mathbf{p} \quad " \quad \mathbf{p} \hat{I} \mathbf{P}.$

مثال ذلك نجد ان الإسقاط الأتي هو إسقاط دوّار على المستوي PG(2,13)

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(١-٤) ملاحظة[3] :إن عدد نقاط PG(n,q) هو $q(n) = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$

إستناداً إلى الملاحظة (١-٤) سيكون عدد نقاط المستوي ألإسقاطي PG(2,13) هو 183 نقطة ؛ وكذلك بالاستناد الى مبدأ ألثنوية والذي يتحقق في الفضاء ألإسقاطي سيكون عدد خطوط المستوي ألإسقاطي PG(2,13) هو 183 خط . ووِفقاً لبديهيات الهندسة ألإسقاطية ستقع 14 نقطة على كل خط ,وكل خطين يشتركان بنقطة واحدة فقط .

**٢. الإسقاط الدوّار في المستوي ألإسقاطي PG(2,13)**

حسب تعريف الإسقاط الدوّار أعلاه يمكننا إيجاد المصفوفة الاتية :

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وبهذا تكون متعددة الحدود الأحادية لهذه المصفوفة المرافقة هي:

$F(x)=x^3-12x^2-11$

**٣. نقاط المستوي PG(2,13) وخطوطه**

تم ترقيم النقاط من 0 إلى 182 وإعطاء الإحداثيات (1,0,0) للنقطة 0 وبتطبيق الإسقاط الدوّار أعلاه سنحصل على جدول النقاط الأتي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **0** 1 0 0 | **1** 0 1 0 | **2** 0 0 1 | **3** 1 0 7 |
| **4** 1 1 7 | **5** 1 1 8 | **6** 1 9 3 | **7** 1 11 2 |
| **8** 1 10 0 | **9** 0 1 10 | **10** 1 0 9 | **11** 1 8 7 |
| **12** 1 1 2 | **13** 1 10 4 | **14** 1 5 5 | **15** 1 4 1 |
| **16** 1 7 9 | **17** 1 8 11 | **18** 1 3 5 | **19** 1 4 6 |
| **20** 1 12 3 | **21** 1 11 9 | **22** 1 8 4 | **23** 1 5 8 |
| **24** 1 9 0 | **25** 0 1 9 | **26** 1 0 2 | **27** 1 10 7 |
| **28** 1 1 4 | **29** 1 5 12 | **30** 1 6 11 | **31** 1 3 12 |
| **32** 1 6 12 | **33** 1 6 4 | **34** 1 5 11 | **35** 1 3 9 |
| **36** 1 8 5 | **37** 1 4 0 | **38** 0 1 4 | **39** 1 0 12 |
| **40** 1 6 7 | **41** 1 1 0 | **42** 0 1 1 | **43** 1 0 1 |
| **44** 1 7 7 | **45** 1 1 1 | **46** 1 7 1 | **47** 1 7 4 |
| **48** 1 5 3 | **49** 1 11 10 | **50** 1 2 3 | **51** 1 11 3 |
| **52** 1 11 11 | **53** 1 3 1 | **54** 1 7 2 | **55** 1 10 12 |
| **56** 1 6 2 | **57** 1 10 2 | **58** 1 10 3 | **59** 1 11 0 |
| **60** 0 1 11 | **61** 1 0 10 | **62** 1 2 7 | **63** 1 1 9 |
| **64** 1 8 2 | **65** 1 10 9 | **66** 1 8 9 | **67** 1 8 6 |
| **68** 1 12 12 | **69** 1 6 1 | **70** 1 7 10 | **71** 1 2 8 |
| **72** 1 9 12 | **73** 1 6 9 | **74** 1 8 3 | **75** 1 11 4 |
| **76** 1 5 10 | **77** 1 2 4 | **78** 1 5 4 | **79** 1 5 6 |
| **80** 1 12 2 | **81** 1 10 10 | **82** 1 2 1 | **83** 1 7 8 |
| **84** 1 9 5 | **85** 1 4 4 | **86** 1 5 1 | **87** 1 7 3 |
| **88** 1 11 6 | **89** 1 12 9 | **90** 1 8 12 | **91** 1 6 3 |
| **92** 1 11 8 | **93** 1 9 2 | **94** 1 10 6 | **95** 1 12 10 |
| **96** 1 2 5 | **97** 1 4 2 | **98** 1 10 8 | **99** 1 9 6 |
| **100** 1 12 11 | **101** 1 3 4 | **102** 1 5 9 | **103** 1 8 8 |
| **104** 1 9 1 | **105** 1 7 5 | **106** 1 4 9 | **107** 1 8 0 |
| **108** 0 1 8 | **109** 1 0 3 | **110** 1 11 7 | **111** 1 1 5 |
| **112** 1 4 11 | **113** 1 3 6 | **114** 1 12 4 | **115** 1 5 2 |
| **116** 1 10 5 | **117** 1 4 8 | **118** 1 9 4 | **119** 1 5 0 |
| **120** 0 1 5 | **121** 1 0 11 | **122** 1 3 7 | **123** 1 1 10 |
| **124** 1 2 9 | **125** 1 8 10 | **126** 1 2 10 | **127** 1 2 11 |
| **128** 1 3 0 | **129** 0 1 3 | **130** 1 0 5 | **131** 1 4 7 |
| **132** 1 1 11 | **133** 1 3 10 | **134** 1 2 0 | **135** 0 1 2 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **136** 1 0 4 | **137** 1 5 7 | **138** 1 1 12 | **139** 1 6 0 |
| **140** 0 1 6 | **141** 1 0 6 | **142** 1 12 7 | **143** 1 1 6 |
| **144** 1 12 6 | **145** 1 12 8 | **146** 1 9 11 | **147** 1 3 8 |
| **148** 1 9 8 | **149** 1 9 10 | **150** 1 2 12 | **151** 1 6 6 |
| **152** 1 12 1 | **153** 1 7 0 | **154** 0 1 7 | **155** 1 0 8 |
| **156** 1 9 7 | **157** 1 1 3 | **158** 1 11 5 | **159** 1 4 12 |
| **160** 1 6 5 | **161** 1 4 5 | **162** 1 4 10 | **163** 1 2 2 |
| **164** 1 10 1 | **165** 1 7 12 | **166** 1 6 10 | **167** 1 2 6 |
| **168** 1 12 5 | **169** 1 4 3 | **170** 1 11 12 | **171** 1 6 8 |
| **172** 1 9 9 | **173** 1 8 1 | **174** 1 7 11 | **175** 1 3 2 |
| **176** 1 10 11 | **177** 1 3 11 | **178** 1 3 3 | **179** 1 11 1 |
| **180** 1 7 6 | **181** 1 12 0 | **182** 0 1 12 | **End of Points** |

**جدول نقاط المستوي ألإسقاطي PG(2,13)**

وعليه بإمكاننا اختيار الخط الأول في هذا المستوي ليتكون من النقاط الاتية:

{1,2,9,25,38,42,60,108,120,129,135,140,154,182}

وبتطبيق الإسقاط الدوار عليه ستتكوّن الخطوط الباقية الى حد الخط الأخير والذي سيكون:

{0,1,8,24,37,41,59,107,119,128,134,139,153,181}

(٣-١) **تعريف**[1]: **القوس - (k,n) ((k,n)-arc)** في المستوي PG(2,q) هو مجموعة تتكون من k من النقاط بحيث يوجد n منها على خط ولا تقع (n+1) منها على أي خط.ويقال للقوس من النمط (k,n) بأنه **تام (complete)** إن لم يكن محتوىً في قوس من النمط (k+1,n).

(٣-٢) **تعريف**[1] : يسمى الخط في المستوي الاسقاطي والذي يحوي على i من نقاط القوس -(k,n) بـ **القاطع - I** (I-secant) .

(٣-٣) **تعريف**[2]:

يقال للمجموعة **S** إنها **مجموعة -b قالبيـــة -t** (t-blocking b-set)إذا كان كل خط في المستوي PG(2,q) يقطع S بما لا يقل عن t من النقط، حيث أن |S|=b ويوجد خط يقطع S بـــ t من النقط بالضبط . يقال للمجموعة القالبية -1 أنها **تافهة** (trivial) إذا احتوت على خط من الخطوط بكل نقاطه.

تسمى المجموعة القالبيـــة -t **أصـــغرية** (minimal ) أو **غيـــر قابلـــة للتحليـــل** (irreducible) عندما لاتوجد مجموعة جزئية فعلية منها تشكل مجموعة قالبية-t.

(٣-٤) **مبرهنة**[2]: في المستوي الاسقاطي PG(2,q)

القوس A من النمط (k,n) يكون تاماً إذا وفقـــط إذا كانـــت PG(2,q)\A هـــي مجموعة أصغرية قالبية-( q+1-n) .

**البرهان** :

(⇐)ليكن القـــوس A مـــن الـــنمط (k,n) قوســـاً تامـــاً . واضـــح أن متممتـــه S=PG(2,q)\A هي مجموعة قالبية - (q+1-n) تحوي $q^2$ +q+1-k من النقاط .إن لم تكن S أصغرية فانه توجد فـــي الأقـــل نقطـــة $p\in S$ بحيـــث أن S\{p}هي مجموعة قالبية -(q+1-n ) تحوي $q^2$ +q-k من النقاط.

والآن بالنظر الى المتممة لهذه المجموعة الأخيرة نجد أنها تمثل القوس A مـــضافاً اليه النقطة p وبحيث يكون من النمط (k+1,n) وهذا يناقض الفرض ،وعليه فـــإن S أصغرية .

(⇒) لتكن S مجموعة أصغرية $q^2$ +q+1-k قالبية-( q+1-n ). واضـــح ان متممتها هو القوس A من النمط (k,n) . فلو كان A قوساً غير تـــام، فتوجـــد نقطة $p\notin A$

بحيث ان $A\cup\{p\}$ يمثل القوس- $(k+1,n)$ . ولكن ظهر لنا ان متممة هذا القوس الجديد هي المجموعة $q^2+q-k$ القالبية-( $q+1-n$) وهي تمثل $S\backslash\{p\}$ وهذا مناقض للفرض $n$

**(٤ - ٠) الأقواس الجديدة**

سوف نرمز لأكبر قيمة لـ k بحيث يكون القوس- $(k,n)$ موجوداً بالرمز $m_{2,q}(n)$ وكذلك نرمز لأصغر قيمة لـk بحيث أن القوس- $(k,n)$ يكون تاماً بالرمز $t_{2,q}(n)$

وواضح أن

$$t_{2,q}(1)=m_{2,q}(1)=1;t_{2,q}(q+1)=m_{2,q}(q+1)=q^2+q+1$$

وفيما يتعلق بالمستوي ألإسقاطي$PG(2,13)$ فإن الملخص للقيم المعلومة الى حد الآن المتعلقة بـ $m_{2,13}(n)$ يتمثل بالجدول الاتي :

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $m_{2,13}(n)$ | 14 | 23 | 34-40 | 46-53 | 61-66 | 79 |
| n | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $m_{2,13}(n)$ | 92 | 105 | 116-119 | 131-133 | 144-147 | 169 |

**جدول بالقيم المنشورة في المصدر[5] لـ $m_{2,13}(n)$**

نلاحظ عندما يكون $n=5$ فإن القيد الأعلى لطول القوس (عدد نقاطه) هو 53 نقطة وهذا من الناحية النظرية فقط إذ لم يتم الحصول الى حد الآن على أي قوس-(53,5) بل كان أعلى ما أمكن إيجاده هو أقواس بطول 46 نقطة فقط ولهذا تمت كتابة القيد بالصيغة 53-46 .

في هذا البحث نثبت وجود الأقواس-(47,5) وذلك بذكر قوس واحد فقط من بين 372 قوساً تم الحصول عليها وبالإستناد الى جدول خطوط المستوي

PG(2,13) في الفقرة (٢-٣)أعلاه أمكننا الحصول الى القــوس (47,5) والــذي يتكون من النقاط الاتية:

{0,1,2,4,6,15,20,21,22,31,32,35,36,37,38,44,48,
52,54,56,69,70,75,76,86,88,89,96,103,106,108,
109,111,113,115,126,134,136,138,140,156,161,
163,166,173,174,181}

لهذا القوس كالآتي: $T_i$وحسب التعريف (٣-٢) تكون القواطع ــ

$T_0 =16, T_1 =10, T_2= 13, T_3= 20, T_4= 58, T_5= 66$ .

(٤-٢) بالاستفادة من المبرهنة (٣-٤) سيكون الآن وبشكل حتمي وجود المجموعة القالبية ألأصغرية-9 ذات 136 نقطة والتي تمثل المتمم (complement) للقــوس أعلاه .

**(٤-٣) علاقة الأقواس-(47,5) مع الشفرة (code) [4]:**

افرض أن $K=\{P_1,\ldots,P_n\}$ هي مجموعة من n من النقاط في PG(k-1,q) , نعرف المصفوفة G ذات البعد $k\times n$ , حيــث $G=(P_1 \ldots P_n)$ علــى الحقــل $F_q$.فإن G هي المصفوفة المولّدة (generator matrix) للشفرة C والتي تكتب بالشكل [n,k,d] code على الحقل $F_q$ إذا وفقط إذا كان كل أوّلي فــي PG(k-1,q)يحتوي على الأكثر n-d من نقاط K ويوجد على الأقل أوّلي يضم بالــضبط على n-d من نقاط K .

وبناءً على وجود القوس أعلاه سيكون في PG(2,13) عندما k=3 يمكننا إعتبار K هو القوس في الفقرة (٤-١) أعلاه. ستكون الآن وبشكل حتمي الــشفرة [47,3,42] code موجودة.

**المصادر**

١-بان عبد الكريم قاسم (2001) ," القيمة العظمى للأقواس-(k,4) في المستوي الإسقاطي(PG(2,11 " ,رسالة ماجستير ,جامعة الموصل.

٢-شعاع محمود عزيز (2001),"حول القيد الأدنى للأقواس -(k,n) التامة في المستوي ألإسقاطي(PG(2,q ",رسالة ماجستير ,جامعة الموصل.

3-Horadam, A.F.(1970),'A Guide to undergraduate Projective Geometry' ,Pergamon Press Australia ,1st. Ed.

4- Hirschfeld, J.W.P. and Storme, L.(1998)'The Packing Problem in Statistics, Coding Theory and Finite Projective Spaces', Journal of Statistical Planning and Inference **72**(1998) pages 355-380.

5-Hirschfeld, J.W.P. and L. Storme) (2001 ),'The packing problem in statistics, coding theory and finite projective spaces: update 2001.'Finite Geometries, Developments in Mathematics, Kluwer, Boston, 2001, pp. 201-246.