حل مسائل البرمجة الكسرية بتقسيم دالة الهدف الى دالتين خطيتين

Solve fraction linear programming problems by partition objective function

المدرس وليد خالد جابر

كلية علوم الحاسبات والرياضيات/جامعة ذي قار

الخلاصة

ايجاد الحل الامثل لمسائل البرمجة الكسرية (Fractional Linear Programming Problems) *(F.L.P.P.)* وذلك بتحويل دالة الهدف لمسائل البرمجة الكسرية الى دالتين خطيتين .

Abstract:

Solve fraction linear programming problems (F.L.P.P.) by partition objective function, convert the objective function from (F.L.P.P.) to two linear function and solve this by simplex methods.

1. *المقدمة:*

يشهد العصر الحالي تطورات سريعة سواء على مستوى المؤسسات التصنيعية أو الخدمية مما يتطلب العمل بمفاهيم إدارية معاصرة والعمل بأساليب علمية وطرائق متطورة مما يجعل التركيز على بحوث العمليات المحوسبة ، وصولا إلى تحقيق عامل السرعة في الحصول على المعلومات الممهدة لعملية اتخاذ القرار فضلا عن الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة. [1] [2],[3].

وتعد البرمجة الخطية إحدى أساليب بحوث العمليات و تتألف معظم مسائل البرمجة الخطية من إنموذج رياضي يتكون من دالة هدف خطية ومجموعة قيود خطية لإيجاد الحل الأمثل لدالة الهدف محققاً بذلك جميع قيود المسألة بمتغيرات غير سالبة.

وعندما تكون دالة الهدف نسبة بين دالتين خطيتين وقيودها خطية تدعى المسائل حينئذ بمسائل البرمجة الكسرية *(Fractional Linear Programming Problems)* *(F.L.P.P.)* وهي من المواضيع المهمة في بحوث العمليات [7],[9] .

- في عام 1985 اوجد كل من **(J.P. Crouzeix, J.A. Ferland and S. Schaible)** حل مسائل البرمجة الكسرية الخطية باستخدام طريقة مطورة [8] ،
- في عام **1987** استخدم **(Ibaraki S. Hashizume, M. Fukushima, N. Katoh and T.)** خوارزمية التقريب لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية. [12].
- في عام **1990** درس كل من **(A.Cambini, E. Castagnoli, L.**

Martein, P. Mazzoleni and S. Schaible) بعض التطبيقات الاقتصادية باستخدام نماذج البرمجة الكسرية [7] .

- في عام 1994 درس (M. Gugat) البرمجة الكسرية نصف اللانهائية [11]
- في عام 1995 اقترح كل من (R.W. Freund and F. Jarre,) طريقة النقطة الداخلية (interior-point method) لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية [10]
- في عام 1999 ناقش كل من (H.C. Lai, J.C. Liu and K. Tanaka) الشرط الضروري والكافي لحل مسائل البرمجة الكسرية الخطية. [13] .
- في عام 2000 تعميم البرمجة الكسرية على مجموعة من الدوال المحدبة [14].

توجد ثلاث طرق رئيسية لحل مسائل البرمجة الكسرية (*Fractional Linear Programming Problems*) *(F.L.P.P.)* وهي طريقة التحويلات الخطية لحل مسائل البرمجة الكسرية ، وطريقة تقريب دالة الهدف لحل مسائل البرمجة الكسرية ، واخيرا الطريقة التكميلية لحل مسائل البرمجة الكسرية .

في هذا البحث قمنا بتقسيم دالة الهدف الكسرية الى دالتين خطيتين (دالة بسط و دالة المقام) لتكون المسألة عبارة متعددة دوال لنفس قيود المسألة الاصلية. وحل كل من الأنموذجين الرياضيين على انفراد والحصول على الحل الامثل *Optimal solution* لكل منهما ، وبعد ذلك نقوم بعملية قسمة ناتج دالة الهدف الاولى (دالة البسط)) على (ناتج دالة الهدف الثانية (دالة المقام)) ، والحصول على الحل الامثل للمسألة الأصلية .

2. *خوارزمية الحل:*

2.1: تاخذ مسائل البرمجة الكسرية ***(Fractional Linear Programming Problems)*** الشكل العام الآتي : [3],[5],[15]

$$\left.\begin{aligned} & Max\,Z=\frac{Cx+\alpha}{dx+\beta} \\ & S.t \\ & \qquad Ax\le b \\ & \qquad x\ge 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots(1)$$

حيث إن :

- *x* تمثل المتغيرات في دالة الهدف والقيود للأنموذج الرياضي .
- *C* تمثل معاملات المتغيرات (x) في دالة هدف البسط .
- *D* تمثل معاملات المتغيرات (x) في دالة هدف المقام .
- *α,β* تمثلان الحدود المطلقة في دالة هدف البسط ، و دالة هدف المقام على التوالي.
- *A* تمثل مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود المسألة .
- *B* مصفوفة الحدود المطلقة لقيود المسألة .

2.2- يتم تُقسيم دالة الهدف *Max Z* الى دالتين خطيتين هما:

Max Z₁ —

$$Max\ Z_1 = cx+\alpha \qquad \dots \qquad (I)$$

$$Max\ Z_2 = cx+\alpha \qquad \dots \qquad (II)$$

تاخذ كلتا دالتي الهدف اعلاه نفس قيود المسألة الاصلية

2.3- وعليه سوف ننشأ الأنموذج الرياضي الاول

$$\left.\begin{aligned} & Max\ Z_1 = Cx+\alpha \\ & S.t \\ & \qquad Ax \le b \\ & \qquad x \ge 0 \end{aligned}\right\} \ldots(2)$$

2.4-والأنموذج الرياضي الثاني :

$$\left.\begin{aligned} & Max\ Z_2 = Cx+\alpha \\ & S.t \\ & \qquad Ax \le b \\ & \qquad x \ge 0 \end{aligned}\right\} \ldots(3)$$

2.5 - نحل كل من الأنموذجين الرياضيين (2) و (3) بطريقة السمبلكس *Simplex methods* لحين الوصول الى الحل الامثل *Optimal solution* . بحيث يكون *Max* Z_1 هو الحل الامثل للأنموذج الرياضي (1) ، ويكون *Max* Z_2 الحل الامثل للأنموذج الرياضي (2).

2.6 - **ويكون الناتج النهائي للمسألة الأصلية هو :**

$$Max\ Z = \frac{Max\ Z_1}{Max\ Z_2}$$

مثال 2.1 :

لناخذ المسألة الآتية مسألة برمجة خطية كسرية [4] :

$$\begin{aligned} Max\ \ Z &= \frac{3x_1 + 2x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 1} \\ S.t.\qquad & 5x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1 , x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

<u>الحل //</u>

الحل باستخدام طريقة التحويلات الخطية وهي احدى الطرق المعتمدة [4]

بما ان

$$C = (3,2) \qquad , d = (1,1)$$

$$, \alpha = 1 \qquad , \beta = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$dx + \beta > 0$$

اذن يكون الحل باستعمال الأنموذج

$$\begin{aligned} Max Z &= cy + \alpha\, y_{n+1} \\ Ay - b\, y_{n+1} &\le 0 \\ dy + \beta\, y_{n+1} &= 1 \\ y_1, y_2, y_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

وعلى هذا الاساس يتم تحويل الأنموذج الرياضي كالآتي :

$$Max Z=(3\,,2)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+(1)\,y_3$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} y_3 \quad \le 0$$

$$(1\,,1)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}+(1)\,y_3 \quad =1$$

$$y_1\ ,\ y_2\ ,\ y_3 \quad \ge 0$$

$$\begin{aligned} Max Z= \quad & 3y_1+2y_2+y_3 \\ & 5y_1+y_2-2y_3 \le 0 \\ & 2y_1+3y_2-3y_3 \le 0 \\ & y_1+y_2+y_3 \le 1 \\ & y_1+y_2+y_3 \ge 1 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max\ Z= \quad & 3y_1+2y_2+y_3 \\ & 5y_1+y_2-2y_3 \le 0 \\ & 2y_1+3y_2-3y_3 \le 0 \\ & y_1+y_2+y_3 = 1 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Max Z= \quad & 3y_1+2y_2+y_3 \\ & 5y_1+y_2-2y_3 \le 0 \\ & 2y_1+3y_2-3y_3 \le 0 \\ & y_1+y_2+y_3 \le 1 \\ & -y_1-y_2-y_3 \le -1 \\ & y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0 \end{aligned}$$

يحول الأنموذج الرياضي الى الصيغة القياسية

$$
\begin{aligned}
Z-3y_1-2y_2-y_3 &= 0\\
5y_1+y_2-2y_3+s &= 0\\
2y_1+3y_2-3y_3 \quad +s &= 0\\
y_1+y_2+y_3 \qquad +s &= 1\\
-y_1-y_2-y_3 \qquad\quad +s &= -1\\
y_1,\ y_2,\ y_3 &\geq 0
\end{aligned}
$$

ويكون الحل باستعمال الطريقة المبسطة

حيث نستخرج الجدول الأول

جدول (2.1.1)

Basic	V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	S_4
Z	0	-3	-2	-1	0	0	0	0
S_1	0	5	1	-2	1	0	0	0
S_2	0	2	3	-3	0	1	0	0
S_3	1	1	1	1	0	0	1	0
S_4	-1	-1	-1	-1	0	0	0	1

C = 1

R = 3

جدول (2.1.2)

Basic	V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	S_4
Z	3	0	1	2	0	0	3	0
S_1	-5	0	-4	-7	1	0	-5	0
S_2	-2	0	1	-5	0	1	-2	0
y_1	1	1	1	1	0	0	1	0
S_4	0	0	0	0	0	0	1	1

C = 2

R = 1

Dual simplex

جدول (2.1.3**)**

	V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	S_4
Z	1.75	0	0	0.25	0.25	0	1.75	0
y_2	1.25	0	1	1.75	-0.25	0	1.25	0
S_2	-3.25	0	0	-6.75	0.25	1	-3.25	0
y_1	-0.25	1	0	-0.75	0.25	0	-0.25	0
S_4	0	0	0	0	0	0	1	1

R = 2 C = 3Dual simplex

جدول (2.1.4)

	V	y_1	y_2	y_3	S_1	S_2	S_3	S_4
Z	1.63	0	0	0	0.26	0.04	1.63	0
y_2	0.41	0	1	0	-0.19	0.26	0.41	0
y_3	0.48	0	0	1	-0.04	-0.15	0.48	0
y_1	0.11	1	0	0	0.22	-0.11	0.11	0
S_4	0	0	0	0	0	0	1	1

ويكون الحل الأمثل هو :

$y_1 = 0.1111111$

$y_2 = 0.4074074$

$y_3 = 0.4814815$

اما قيم x_j فتستخرج من المعادلة :

$$X_j = \frac{y_j}{y_{n+1}}$$

n=2,

j= 1,2

$x_1 = 0.2307692$
$x_2 = 0.8461538$

وبالتعويض عن قيم x_j في دالة الهدف تكون القيمة العظمى لـ Z:

Max Z = 1.62963

2.2 - <u>حل المثال (2.1) السابق بخوارزمية الحل الجديدة</u>

1- ان الأنموذج الرياضي الاساسي للمسألة هو:

$$Max\ Z = \frac{3x_1 + 2x_2 + 1}{x_1 + x_2 + 1}$$

$$S.t. \quad 5x_1 + x_2 \le 2$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

2- نحول الانموذج الرياضي الى أنموذجين رياضيين هما :
الأنموذج الرياضي الاول هو:

$$Max\ Z_1 = 3x_1 + 2x_2 + 1$$

$$\left.\begin{aligned} S.t. \quad & 5x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1, \ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \ldots(1)$$

اما الأنموذج الرياضي الثاني فيكون:

$$Max\ Z_2 = x_1 + x_2 + 1$$

$$\left.\begin{aligned} S.t. \quad & 5x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1, \ x_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \ldots(2)$$

يُحل كل من الأنموذجين الرياضيين (1) و (2) بطريقة السمبلكس:[5],[3]

لحل الأنموذج الرياضي (1) بطريقة السمبلكس كالآتي :

1- يحول الأنموذج الرياضي الى الصيغة القياسية كالآتي :

$$Max\ Z_1 - 3x_1 - 2x_2 - 1 = 0$$

$$S.t. \quad 5x_1 + x_2 + S1 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 + S2 = 3$$
$$x_1, \ x_2, S1, S2 \ge 0$$

جدول (2.2.1)

	V	x_1	x_2	S1	S2
Max Z_1	1	-3	-2	0	0
S1	2	5	1	1	0
S2	3	2	3	0	1

C=1 , R=1

جدول (2.2.2)

	V	x_1	x_2	S1	S2
Max Z_1	2.2	0	-1.4	0.6	0
x_1	0.4	1	0.2	0.2	0
S2	2.2	0	2.6	-0.4	1

C = 2 , R = 2

جدول (2.2.3)

	V	x_1	x_2	S1	S2
Max Z_1	3.384615	0	0	0.384	0.538
x_1	0.230769	1	0	0.384	-7.69
x_2	0.84615	0	1	0.230	0.384

وعليه يكون الحل الامثل للأنموذج الرياضي (1) هو :

$x_1 =$ 0.230769230769

$x_2 =$ 0.846153846

Max $Z_1 =$ 3.3846153846

وبالطريقة نفسها يكون الحل الأمثل للأنموذج الرياضي (2):

$$Max\ Z_2 = x_1 + x_2 + 1$$

$$\begin{aligned} S.t.\quad & 5x_1 + x_2 \le 2 \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 3 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

هو:

$x_1 =$ 0.23076923

$x_2 =$ 0.846153846

$Max\ Z_1 =$ 2.07692307692308

واستنادا الى خوارزمية الحل الجديدة يكون الحل لامثل للمسألة هو :

$$Max Z = \frac{Max\ Z_1}{Max\ Z_2} = \frac{3.3846153846}{2.07692307692308}$$

$$= 1.62963$$

وبمقارنة الحل الناتج من هذه الطريقة مع طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية نجد بان النتائج متساوية .

ونلاحظ ايضا بان قيم المتغيرات x_1 & x_2 هي نفس القيم لم تتغير.

مثال (2.3):

لناخذ المثال الآتي :[4]

$$Max\ Z = \frac{3x_1 + 5x_2}{x_1 + x_2 + 1}$$

$$\begin{aligned} S.t.\quad & x_1 + x_2 \ge 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \le 1 \\ & 3x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ & 5x_1 + 5x_2 \le 25 \\ & x_1,\ x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل // يكون الحل الامثل بنفس الاسلوب السابق لطريقة التحويلات الخطية كالآتي.[4]:

x_1 =	0
x_2 =	3
Max Z =	3.75

وعند تقسيم الانموذج الرياضي الى أنموذجين رياضيين .

يكون الحل الامثل للانموذج الرياضي الاول :

$$\begin{aligned} &Max\ Z_1 = 3X_1 + 5X_2 \\ &S.t. \quad X_1 + X_2 \geq 1 \\ &\quad 2X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ &\quad X_1 - X_2 \leq 1 \\ &\quad 3X_1 + 3X_2 \geq 6 \\ &\quad 5X_1 + 5X_2 \leq 25 \\ &\quad X_1 ,\ X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

هو:

x_1 =	0
x_2 =	3
Max Z_1 =	15

اما الحل الأمثل للأنموذج الرياضي (2)

$$Max\ Z_2 = x_1 + x_2 + 1$$

$$\begin{aligned} S.t.\quad & x_1 + x_2 && \geq 1 \\ & 2x_1 + 2x_2 && \leq 6 \\ & x_1 - x_2 && \leq 1 \\ & 3x_1 + 3x_2 && \geq 6 \\ & 5x_1 + 5x_2 && \leq 25 \\ & x_1 \,,\ x_2 && \geq 0 \end{aligned}$$

فيكون:

x_1 = 0

x_2 = 3

Max Z_2 = 4

وعليه يكون الحل الأمثل للمسألة الأصلية هو :

$$Max\ Z = \frac{Max\ Z_1}{Max\ Z_2} = \frac{15}{4} = 3.75$$

وهو نفس الحل للمسألة الاصلية .

<u>مثال (2.4):[4]</u>

$$Max\ \ Z = \frac{2x_1 + 6x_2}{3x_1 + 4x_2 + 1}$$

$$\begin{aligned} S.t.\quad & 3x_1 + 5x_2 \geq 15 \\ & x_1 + x_2 \leq 9 \\ & 6x_1 + 4x_2 \geq 24 \\ & x_1 + x_2 \leq 7 \\ & x_1 \,,\ x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل :

يكون الحل الامثل بنفس الاسلوب السابق لطريقة التحويلات الخطية كالآتي:[4]

x_1 =	***0***
x_2 =	***7***
Max Z =	**1.448276**

وعند تقسيم الانموذج الرياضي الى أنموذجين رياضيين .

يكون الحل الامثل للانموذج الرياضي الاول:

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z_1 = 2X_1 + 6X_2 \\
&S.t.\quad 3X_1 + 5X_2 \ge 15 \\
&\qquad X_1 + X_2 \le 9 \\
&\qquad 6X_1 + 4X_2 \ge 24 \\
&\qquad X_1 + X_2 \le 7 \\
&\qquad X_1 \ , X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

فيكون الحل الأمثل للأنموذج الرياضي (1) هو :

x_1 =	***0***
x_2 =	***7***
Max Z =	**42**

اما الحل الأمثل للأنموذج الرياضي (2) :

$$
\begin{aligned}
&Max\ Z_2 = 3X_1 + 4X_2 + 1 \\
&S.t.\quad 3X_1 + 5X_2 \ge 15 \\
&\qquad X_1 + X_2 \le 9 \\
&\qquad 6X_1 + 4X_2 \ge 24 \\
&\qquad X_1 + X_2 \le 7 \\
&\qquad X_1 \ , X_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

فيكون :

$x_1 =$ 0

$x_2 =$ 7

Max Z = 29

وعليه يكون الحل الأمثل للمسألة الأصلية بوجب الطريقة الجديدة هو :

$$Max\,Z = \frac{Max\,Z_1}{Max\,Z_2} = \frac{42}{29} = 1.448276$$

وهو نفس الحل للمسألة الاصلية .

3. *الاستنتاجات :*

1- ان النتائج المستحصلة من الحل بالخوارزمية الجديدة هو نفس الحل الناتج بالطرق الثلاثة لحل مسائل البرمجة الكسرية .

2- الخوارزمية الجديدة استغرقت وقت اقل ومراحل اقل من الحل الناتج بالطرق الثلاثة لحل مسائل البرمجة الكسرية .

3- الطريقة الجديدة بالحل تكون اقل تعقيدا من خوارزمية الحل بالطرق الثلاثة لحل مسائل البرمجة الكسرية .

المصادر :

[1] . إسماعيل ،احمد عبد الجبار، التميمي، ماجدة عبد اللطيف ، "تطبيقات بحوث العمليات.

[2] . ذياب ،آوس نضال ، "تحسين طريقة لاك ا رنج لحل مسائل البرمجة الخطية"، رسالة ماجستير ،قسم العلوم التطبيقية، الجامعة التكنولوجية 2008 .

[3] . أ.د. لطفي لويز سيفن ، بحوث العمليات ، المنهج الكمي لاتخاذ القرارات ، دار الجامعات المصرية ، 1977.

[4] . وليد خالد، دراسة وتحليل طرائق حل مسائل البرمجة الكسرية ، رسالة ماجستير مقدمة الى قسم العلوم التطبيقية ، الجامعة التكنولوجية، ايلول 2004.

[5] . د. هلال هادي صالح - د. خالد جرجيس عبو - ثناء رشيد صادق ، بحوث العمليات وتطبيقاتها ، قسم علم الحاسبات - الجامعة التكنولوجية ، 1990.

[6] . Cambini A., Castagnoli E., Martein L., Mazzoleni P. and Schaible S., Generalized Convexity and Fractional Programming with Economic Applications. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 345, Springer, Berlin, (1990).

[7] . Crouzeix J.P., . Ferland J.A and Schaible S., An algorithm for generalized fractional programs Journal of Optimization Theory and Applications vol., 47, no. 1, pp.35-49 , (1985) .

[8] . Hamdy A.T.," operations research an introduction " seventh ed. Canada ,by Maxwell publishing company ,(2004) .

[9] . Freund R.W. and Jarre F., An interior-point method for

multifractional programs with convex constraints, Journal of Optimization Theory and Applications,vol. 85, no. 1, 125-161, (1995).

[10] . Gugat M., Fractional Semi-infinite Programming, Doctoral Dissertation, University of Trier,(1994).

[11] . Hashizume S., Fukushima M., Katoh N. and Ibaraki T., Approximation algorithms for combinatorial fractional programming problems,Mathematical Programming,vol. 37, no. 3,pp. 255-267, (1987).

[12] . Lai H.C., Liu J.C. and Tanaka K., Necessary and sufficient conditions for minimax fractional programming, Journal of Mathematical Analysis and Applications,vol. 230, no. 2,pp. 311-328, (1999).

[13] . Lai H.C. and Liu J.C., On minimax fractional programming of generalized convex set functions, Journal of Mathematical Analysis and Applications vol. 244, no. 2,pp. 442-465,(2000).

[14] . Swarup, K., " linear Fractional programming", Operations Research, Vol. 10, P. 380-387, 1962.