استخدام سلاسل ماركوف لتقييم و تنبؤ الوقت المحتمل لانتظار الزبـائن في شركة آسيا سيل للفترة (2014/9/١ حتى 2015/6/١)

م.م.ئاراس جلال محمد كريم م.م.ريناس أبو بكر أحمد أ.م.د. محمد محمود فقي
جامعة السليمانية / كلية الإدارة والاقتصاد

Use the Markov chains to evaluate and predict the Probabilistic Waiting Time for Asia Cell Customers Company for the period (1/9/2014 to 1/6/2015)

Assis. Prof. Dr. Mohammed M. F. Assis. Lec. Renas Abu baker N.
Assis. Lec. Aras j. M.
Sulaimani Uni./ College of Admin. and Econ.

تاريخ استلام البحث ٢٠١٥/٩/٢ تاريخ قبول النشر ٢٠١٥/١٠/١٢

المستخلص:

يتناول هذا البحث دراسة وتحليل النواحي النظرية والتطبيقية ومسألة التنبؤ لوقت الانتظار لزبائن شركة آسيا سيل للاتصالات باستخدام الطرائق الإحصائية التي تساعد في تحليل الظاهرة ودراستها، ويتطرق البحث إلى بيان الأساس النظري للمصفوفة الماركوفية وإمكانية تطبيقه في تحديد و تنبؤ وقت انتظار الزبائن. تستخدم سلاسل ماركوف في التنبؤ بالحالة المستقبلية باستعمال مصفوفة احتمالات الانتقال من الحالة السابقة لتساعد في تحديد حالات الظاهرة من فترة إلى أخرى، ومن مزايا أسلوب تحليل ماركوف إنه لا يعتمد على أسباب حدوث الظاهرة ليتم تحليلها والتنبؤ بحالتها المستقبلية، والغرض من هذا البحث هو تقييم و تنبؤ بوقت الانتظار للزبائن في شركة آسيا سيل من خلال تقدير احتمالات التغير بالوقت الحالي والتنبؤ باحتمالات التغير في الوقت اللاحق. وتوصل هذا البحث إلى تدعيم نظام استقبال المكالمات من قبل الشركة لتقليل وقت انتظار الزبائن للمستقبل.

الكلمات المفتاحية: سلاسل ماركوف.

Abstract:

This study contains theoretical and practical analysis of customer waiting time forecasting for Asia Cell Communication company, using a statistical technique agrees with analysis of phenomenon, this study leads to markov chain matrix and its application ability to identify and forecasting for customer waiting time. Markov chain can be used to forecast of future state which depends on current state by using transition probability matrix from previous state to another period that helps to identify states of phenomenon, the advantage of markov chain technique is: it doesn’tdepend on happen of phenomenon factors to apply analyzing and forecasting in future states. The aim of the study is evaluate and forecasting of customer waiting time in the Asia Cell company from estimate probability change in current time and then forecast for it by probability change in next time. The result of the study is that the company must be improve their incoming call system to reduce customer waiting time in the future.

Key words: Markov Chain.

1–المقدمة:

تحتل نظرية عمليات ماركوف مكانة كبيرة وهامة جدا في نظرية العمليات العشوائية. تعزز هذه المكانة تعدد التطبيقات التي تتمتع بها عمليات ماركوف في النماذج الفيزيائية والبيولوجية وعلم الاجتماع والهندسة وعلم الإدارة فضلاً عن تطبيقاتها المتعددة في الكثير من النماذج الإحصائية و الهندسية وفي نظرية الموثوقية.

إذ يتم تفسير سلسلة ماركوف على أنها عبارة عن متتابعة من الحالات التي يمكن أن يكون فيها نظام ما عند أي لحظة زمنية t، أو متتابعة من المواضع التي يحتلها جسيم متحرك. نقدم فيما يلي التعريف الرياضي لسلسلة ماركوف.

2-المبحث الأول

٢-١ مصفوفة ماركوف:

إن أسلوب تحليل ماركوف هو أسلوب يتعامل مع احتمالات حدوث حدث معين و المستقبل مستندا إلى تحليل بعض الاحتمالات، أي أنه أسلوب علمي لدراسة و تحليل ظاهرة في الفترة الحالية للتنبؤ بسلوكها في المستقبل وهو أحد أشكال المصفوفات وتعرف بأنها مصفوفة مربعة الشكل كل عنصر من عناصرها m_{ij} تحقق المتراجحة التالية (Coolen ACC, 2009) و(الربيعي، فاضل محسن و عبد، صلاح حمزة، ٢٠٠٠):

$$m_{ij} \leq 1 \leq ٠$$

$$Amn=(mij)= \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \ldots & m_{1j} \\ m_{21} & m_{22} & m_{2j} \\ & \vdots & \\ m_{i1} & m_{i2} \ldots & m_{ij} \end{pmatrix} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2-1)$$

٢-٢ خواص مصفوفة ماركوف

تتمتع المصفوفة الماركوفية بخواص عديدة نذكر منها (Coolen ACC, 2009):

١- بفرض أن m عدد طبيعي و A(n,n) مصفوفة ماركوفية فإن المصفوفة A^m هي مصفوفة ماركوفية أيضاً.

٢- بفرض أنَّ كلاً من M وN مصفوفة ماركوفية فإن M * N هي مصفوفة ماركوفية أيضاً.

٣- أن يكون جميع القيم موجبة أي ($m_{ij} > 0$).

٢-٣ العمليات العشوائية:

تعرف نظرية العمليات العشوائية بأنَّها دراسة الفترات الزمنية المحددة $\{t_k\}$، إذ إنَّ $(k = 1,2, \ldots)$، لو فرضنا أنζt_k يمثل قيمة عشوائية التي تصف حالة نظام في اللحظة المحددةt_k، اذن فإنَّ منحنى القيم الاحتمالية يمثل عملية عشوائية، وإنَّ مجموعة الحالات المحتملة في اللحظة t_kهيζt_k عناصرها Et_k، أي أن تحقق أحدى حالة في تلك اللحظة ينفي تحقيق حالة أخرى من تلك المجموعة في تلك اللحظة، وعدد الحالات يمكن أن يكون محدوداً أو غير محدود مثلا توزيع بواسون (Coolen ACC, 2009).

٢-٤ عمليات ماركوف

توضح عمليات ماركوف السلوك العشوائي لنظام معين، وجوده على حالة ما يتوقف على حالة النظام السابقة فقط، وبالتالي إذا كانت $t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n$ إذ:$(n = 0,1,2, \ldots \ldots)$ تمثل فترات زمنية، فإن مجموعة القيم العشوائية {ζtn} تشكل عملية ماركوفية إذا حققت الخاصة الماركوفية التالية (Jin Y. Wang, 2009) و(Coolen ACC, 2009):

$$P\{\xi_{tn} = X_n | \xi_{tn-1}, \ldots \xi_{t0} = X_0\} = P\{\xi_{tn} = X_n | \xi_{tn-1} = X_{n-1}\} \ldots \ldots \ldots (2-2)$$

لجميع القيم الممكنة : $\xi_{t0}, \xi_{t1}, \ldots \ldots \ldots \ldots, \xi_{tn}$

الاحتمالات : $P_{xn-1}X_n = P\{\xi_{tn} = X_n | \xi_{tn-1} = X_{n-1}\}$

في اللحظة t_n، إذا كان في اللحظة الزمنية t_{n-1} على الحالة X_{n-1} وهذه الاحتمالات تسمى الانتقالية وحيدة الخطوة (لمرحلة واحدة)، لأنها توضح تغير حالة النظام بين اللحظة t_{n-1} واللحظة t_n أي الاحتمالات الانتقالية لـ m خطوة تعطى بالعلاقة (Jin Y. Wang, 2009) و (Coolen ACC, 2009):

$$P_{xn,xn+m} = P\{\xi_{tn+m} = X_{n+m} | \xi_{tn} = X_n\} \qquad \ldots \ldots \ldots (2-3)$$

وبشكل آخر: تتكون عملية ماركوف من مجموعة من العناصر، ومجموعة من الحالات بحيث إنَّ:

١- عند أي وقت يجب أن يكون كل عنصر في حالة معينة(مميزة)، والعناصر المميزة ليست في حاجة لكي تكون في حالة مميزة.

٢- احتمال أن ينتقل أحد العناصر من حالة إلى حالة أخرى (والتي قد تكون مماثلة للحالة الأولى) في فترة زمنية واحدة يعتمد على هاتين الحالتين فقط.

٣- تتميز بخاصية فقدان الذاكرة (Memory Less).

الأعداد الصحيحة للفترات الزمنية التالية للحظة التي تبدأ فيها العملية تمثل مراحل العملية، والتي قد تكون محدودة أو غير محدودة. إذا كان عدد الحالات محدوداً أو غير محدود عددياً، فإنَّ عملية ماركوف تسمى سلسلة ماركوف. وسلسلة ماركوف المحدودة هي سلسلة لها عدد محدود من الحالات. نرمز لاحتمال الانتقال من i إلى حالة j في فترة زمنية واحدة بالرمز P_{ij}ولسلسلة ماركوف ذات N حالة (إذ إنَّ N عدد صحيح موجب ثابت) المصفوفة P ذات $[P_{ij}]$=N×N هي المصفوفة التصادفية أو الانتقالية المرتبطة بالعملية. وبالضرورة، فإنَّ عناصر كل صف من مصفوفة p مجموعها 1 (الربيعي، فاضل محسن، عبد، صلاح حمزة، ٢٠٠٥) و (.Jin Y Wang, 2009) و(Coolen ACC, 2009).

٢-٥ سلاسل ماركوف:

لتكن المجموعة $(E_1, E_2, \ldots\ldots E_n \ : j = 0,1,2,3, \ldots\ldots)$ وتمثل جميع الحالات التي يمكن أن يأخذ النظام إحداها (حالات متنافية)، وفي أي لحظة زمنية، في اللحظة الابتدائية t_0، النظام يكون على إحدى هذه الحالات بفرض أن aj (حيث $j = 0,1,2, \ldots$) الاحتمالات الأولية لأن يكون النظام على الحالة E_j في اللحظة t_iوبفرض أن النظام المدروس ماركوفي:

$$P_{ij} = p\{\xi_{tn} = j, \xi_{tn} - 1 = i\} \qquad \ldots\ldots\ldots(2-4)$$

احتمالات انتقال النظام بخطوة وحيدة من الحالة (i) في اللحظة (t_{n-1}) إلى الحالة(j) في اللحظة(t_n) ، وبفرض أنَّ هذه الاحتمالات مستقرة (لا تتغير مع مرور الزمن) عرض الاحتمالات الانتقالية من الحالة E_iإلى الحالة E_jعلى شكل مصفوفة (Jin Y. Wang, 2009) و (شذا زبيدة، ٢٠١٠):

$$P= \begin{pmatrix} P_{02} & P_{01} & P_{00}\ldots\ldots\ldots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22}\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & & \end{pmatrix} \ldots \qquad (2\text{-}5)$$

المصفوفة P تسمى مصفوفة الاحتمالات الانتقالية وتسمى السلسلة الماركوفية متجانسة إذا كانت Pij مستقلة عن الزمن ويجب أن تحقق الشروط التالية:

$(P_{ij} > 0)$ وان $\sum P_{ij} = 1$ ،

أصبح بالإمكان إعطاء تعريف لسلاسل ماركوف، مصفوفة الاحتمالات الانتقالية P مع الاحتمالات الأولية المقابلة للحالات (Ei) تشكل سلسلة ماركوفية، عادة تصف سلاسل ماركوف آلية انتقال نظام ما من حالة لأخرى بنهاية فترات زمنية منتظمة ويصادف حالات تكون الفترة الزمنية مرتبطة بطبيعة النظام.

٢-٦ شروط تحليل سلاسل ماركوف:

يستند تحليل ماركوف إلى عدة افتراضات أساسية هي:

١. فضاء الحالة (State Space) لهذه العملية يكون منفصلاً (منفصلة الحالة).

٢. فضاء المعلمة (Parameter Space) لهذه العملية يكون منفصلاً (منفصلة الزمن).

٣. تحقق هذه العملية خاصية ماركوف:أي خاصية فقدان الذاكرة (Memory Less) (شذا زبيدة، ٢٠١٠).

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i,\ X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \ \ldots(2-6)$$

ومن ثم فإنَّ سلسلة ماركوف $\{X_n : n \in T\}$ تكون عبارة عن عملية ماركوف، بمعنى إنَّ قيمة المتغير العشوائي X_{n+1} تعتمد فقط على قيمة X_n ولا تتأثر بقيم المتغيرات $X_1, X_2, ..., X_{n-1}$، وأن فضاء المعلمة (الزمن) لها يكون منفصلاً أما فضاء الحالة فيكون منفصلاً منتهياً (محدود) أو غير منتهي ولكنه قابل للعد (شذا زبيدة، ٢٠١٠).

٢-٧احتمال الانتقال في خطوة واحدة:

لتكن $\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ سلسلة ماركوف بفضاء الحالة $S = \{0,1,2,\cdots\}$. احتمال انتقال العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j خلال خطوة واحدة يرمز له بالرمز $p_{ij}^{(n,n+1)}$ ويعرف كما في العلاقة التالية (Coolen ACC, 2009) و (Jin Y. Wang, 2009):

$$p_{ij}^{(n,n+1)} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \qquad ....(2-7)$$

$$i, j = 0,1,2,...$$

يسمى هذا الاحتمال الشرطي باحتمال الانتقال في الخطوة الواحدة. وهذا الاحتمال يمثل شرط أساسي لدراسة خواص سلاسل ماركوف. وعموما يعتمد هذا الاحتمال على n، لكن في العديد من التطبيقات التي يستخدم فيها سلاسل ماركوف فإنه لايعتمد على n. وسوف نتقيد في الحالات ($p_{ij}^{(n,n+1)}$)، بمعنى أنَّ: (Jin Y. Wang, 2009) و(حسن عبد الهادي حسن، ٢٠١٢)

$$P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_1 = j \mid X_0 = i) \quad \forall n \qquad ....(2-8)$$

وهذا يعني، على سبيل المثال، أن:

$$P(X_3 = j \mid X_2 = i) = P(X_7 = j \mid X_6 = i) = P(X_{32} = j \mid X_{31} = i), ... \qquad ....(2-9)$$

احتمالات الانتقال في هذه الحالة تسمى باحتمالات الانتقال المستقرة (Stationary transition) كما تسمى العملية العشوائية$\{X_n, n = 0,1,2,\cdots\}$ بسلسلة ماركوف المتجانسة (homogenous Markov chain). وبالتالي فإنه يمكن كتابة احتمال الانتقال في خطوة بالصورة التالية (Coolen ACC, 2009):

$$p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \ \forall n \qquad ....(2-10)$$

ومن ثم فإنَّ p_{ij} يكون عبارة عن احتمال أنَّ العملية ستكون في الحالة j بعد خطوة واحدة، بشرط أنها كانت في الحالة i وأن هذا الاحتمال لا يعتمد على n.

٢-٨ احتمال الانتقال في الخطوة النونية:

احتمال انتقال العملية العشوائية $\{X_n : n = 0,1,2,\cdots\}$ من الحالة i إلى الحالة j بعد عدد

nمن الخطوات يسمى باحتمال الانتقال في الخطوة النونية، وسنرمز له بالرمز $p_{ij}^{(n)}$ ويعرف بالعلاقة التالية (Jin Y. Wang, 2009):

$$p_{ij}^{(n)} = P(X_{n+m} = j \mid X_m = i) \qquad ....(2-11)$$

$$n \geq 0, \; i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

يشير هذا الاحتمال إلى احتمال انتقال العملية العشوائية من الحالة i إلى الحالة j بعد عدد n من الانتقالات. بالمثل لحالة احتمال الانتقال من حالة إلى أخرى في خطوة واحدة، يمكن كتابة احتمالات انتقال العملية العشوائية بعد n خطوة في شكل مصفوفة، نرمز لها بالرمز $P^{(n)}$، على الصورة التالية (Jin Y. Wang, 2009):

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & p_{02}^{(n)} & \cdots \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & p_{12}^{(n)} & \cdots \\ p_{20}^{(n)} & p_{21}^{(n)} & p_{22}^{(n)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \qquad ....(2-12)$$

تسمى المصفوفة $P^{(n)}$ بمصفوفة احتمالات الانتقال بعد الخطوة n.

٢–٩ أنواع سلاسل ماركوف

٢–٩–١ سلاسل ماركوف متقطعة الزمن:

إذا تمت ملاحظة نظام ما في فترات منتظمة مثلاً يومياً أو أسبوعياً، عندئذ يمكن توصيف إجراء التخمين العشوائي الحركي بواسطة مصفوفة تمثل احتمالات التحرك إلى كل حالة من الحالات الأخرى في فترة زمنية واحدة، بفرض أنَّ هذه المصفوفة لا تتغير بمرور الزمن، فإنَّ هذا الإجراء يدل على سلسلة ماركوف متقطعة الزمن، تتوافر على تقنيات حسابية لحساب مجموعة مختلفة من قياسات النظام التي يمكن استخدامها في تحليل وتقييم أنموذج سلاسل زمن ماركوف المتقطعة (شذا زبيدة، ٢٠١٠).

٢–٩–٢ سلاسل ماركوف مستمرة الزمن:

تعرف هذه السلاسل في إجراءات التخمين العشوائي الحركي ذات الزمن المستمر إذ تتوزع مدة كل حالة متغيرة على الشكل الأسي، ويكون الزمن عاملاً مستمراً، يحقق الإجراء شرط ماركوف (أي أنَّ الطريق الذي يسلكه الإجراء في المستقبل يعتمد فقط على الحالة الحالية، و ليس على سلسلة الحالات التي حدثت قبل الحالة الحالية). تدعى هذه السلسلة بسلسلة ماركوف مستمرة الزمن، وتوصف بمصفوفة تمثل معدل الانتقال من كل حالة إلى كافة الحالات الأخرى (شذا زبيدة، ٢٠١٠).

٢-١٠ الإستقرارية للعمليات العشوائية:

إن مفهوم الإستقرارية بشكل عام يعني عدم تغير الصفات الإحصائية للعملية التصادفية بمرور الزمن، و حالة الثبات تظهر عندما تستمر العملية التصادفية لزمن طويل إذ تستقر نسب عدد الانتقالات لكل حالة عند قيمة معينة، وتدعى بالاحتمالات المستقرة لتلك الحالة، أي يظهر سلوك $p_{ij}^{(m)}$ عندما (∞m) لذلك يمكن تعرف التوزيع المستقر كالآتي: إذا كانت ($\underline{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n]$) تمثل المتجه الاحتمالي، و($0 \le \underline{\pi} \le 1$) و($\sum_{i=1}^{n} \underline{\pi} = 1$)، يمكن إيجاد التوزيع المستقر للفترة القادمة حسب الصيغة (إبراهيم العلي، محمد عكروش، سلمان احمد، ٢٠٠٩) و(شذا زبيدة، ٢٠١٠) و (Seneta E, 1995):

$$\pi p = \pi \qquad \dots\dots\dots (2-13)$$

٢-١٠ تطبيقات سلاسل ماركوف (Konstantopoulos, Takis, 2009):

١- **في العلوم الفيزيائية:** تظهر أنظمة ماركوف بشكل واضح في الفيزياء من خلال ظاهرة القصور الحرارية وانتثار الغازات وبشكل خاص في الميكانيك الإحصائي.

٢- **نظريـة الصفوف:** إذ يمكن استخدام سلاسل ماركوف لإعطاء نماذج العمليات المختلفة في نظرية الصفوف والإحصاء. كما أنَّ أنظمة الهواتف الخليوية في العالم تعتمد على خوارزمية فيتربي من أجل خطأ التصحيح بينما نماذج ماركوف المخفية (Hidden Markov Models) تستخدم بكثافة في التعرف الكلامي وهي إمكانية إدخال البيانات شفهياً.

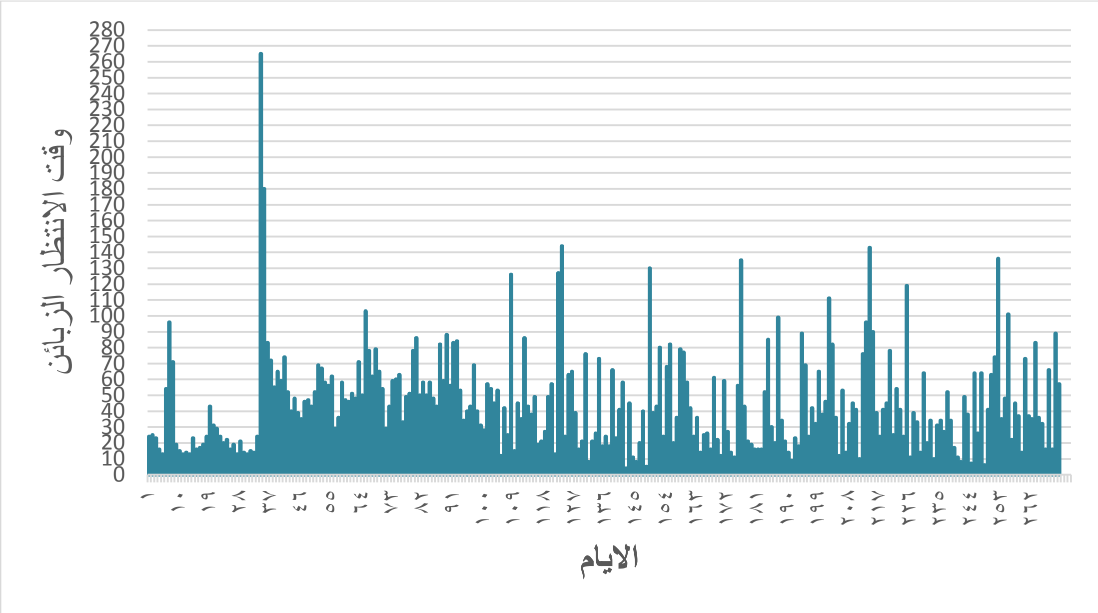
٣- **العلوم الإحصائية:** أصبحت أيضاً طرق سلاسل ماركوف مهمة جداً لتوليد متتاليات من الأعداد العشوائية لكي تعكس بدقة توزيعات احتمالية معقدة مطلوبة.

٤- **الرياضيات الحيوية:** لسلاسل ماركوف تطبيقات عديدة مثل عمليات التعداد السكاني.

٣- المبحث الثاني

٣-١ وصف البيانات:

تم الحصول على بيانات هذا البحث من شركة آسيا سيل للاتصالات في محافظة السليمانية. وتتمثل البيانات على شكل سلسلة زمنية لتسعة أشهر في السنة ٢٠١٤ وستتم دراسة حالتين لانتظار للزبائن على الخط وهي(وقت انتظار الزبائن أقل من معدل وقت الانتظار الكلي، ووقت انتظار الزبائن أكبر من معدل وقت الانتظار الكلي)، ويمكن تمثيل البيانات كما في الشكل (٣-١):



شكل رقم (٣-١)

وقت انتظار الزبائن على الخط حسب الأيام

٣-٢ تكوين المصفوفة و أنموذج ماركوف لزبائن شركة آسيا سيل:

لكي يمكن وضع أنموذج ماركوف لزبائن الشركة لابد من الرجوع إلى أوقات انتظار زبائن حسب الأجهزة الموجودة في قسم خدمات الشركة ويجب أن نستخرج معدل وقت انتظار الزبائن التي تساوي (٤٥.٧ ثانية)، وتوصيف عدد حالات الانتقال من حالة إلى أخرى للحالات تحت الدراسة (أقل وقت للانتظار من معدل وقت انتظار الكلي، أكبر وقت للانتظار من معدل وقت انتظار الكلي) ومن ثم قسمة عناصر الصف الأول على المجموع الكلي للصف الأول وقسمة عناصر الصف الثاني على المجموع الكلي للصف الثاني لغرض الحصول على مصفوفة ماركوف، والجدول (٣-١) يبين عدد الانتقالات للحالات تحت الدراسة.

جدول رقم (٣-١)

عدد حالات الانتقال

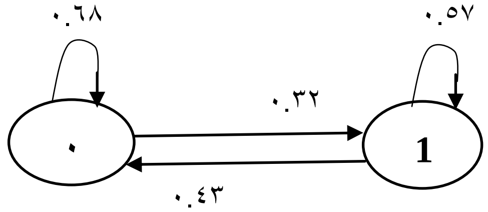
الحالة	اقل و اقل	اقل و اكبر	مجموع
عدد الزبائن	١٠٧	٥٠	١٥٧
الحالة	اكبر و اقل	اكبر و اكبر	
عدد الزبائن	٤٩	٦٤	١١٣
المجموع كلي	٢٧٠		

ويتم تكوين مصفوفة ماركوف (الانتقالية) من خلال مشاهدة السلسلة لوقت الانتظار للزبائن.

نلاحظ أنَّ وضع الزبائن في شركة آسيا سيل يكون مصفوفة ماركوفية بحالتين كما موضح في الشكل (٣-٢) وهي:

١- $\mathbf{E_0}$ أو (٠): تشير إلى وقت انتظار الزبائن أقل من معدل وقت الانتظار الكلي.

٢- $\mathbf{E_1}$ او (1): تشير إلى وقت انتظار الزبائن أكبر من معدل وقت الانتظار الكلي.



شكل رقم (٣-٢)

أنموذج سلسلة ماركوف بيانيا

وبالتالي فإنَّ مصفوفة ماركوف تكون بالشكل الآتي:

$$P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 0 & \quad 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{107}{157} & \frac{50}{157} \\ \frac{49}{113} & \frac{64}{113} \end{pmatrix} \end{array} = \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.43 & 0.57 \end{pmatrix}$$

إذ إنَّ:

- احتمال الانتقال من حالة أقل وقت الانتظار إلى حالة أقل وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٦٨)، أي أنَّ احتمال حدوث حالتين متتاليتين وقت انتظار أقل من وقت انتظار المعدل الكلي تساوي (٠.٦٨).
- احتمال الانتقال من حالة أقل وقت الانتظار إلى حالة أكبر وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٣٢)، أي أنَّ احتمال حدوث حالة وقت انتظار أقل من معدل وقت الانتظار الكلي ويتبعه حالة وقت انتظار أكبر من معدل وقت الانتظار الكلي تساوي (٠.٣٢).
- احتمال الانتقال من حالة أكبر وقت الانتظار إلى حالة أقل وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٤٣)، أي أنَّ احتمال حدوث حالة وقت انتظار أكبر من معدل وقت الانتظار الكلي ويتبعه حالة وقت انتظار أقل من معدل وقت الانتظار الكلي تساوي (٠.٤٣).
- احتمال الانتقال من حالة أكبر وقت الانتظار إلى حالة أكبر وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٥٧)، أي أنَّ احتمال حدوث حالتين متتاليتين وقت انتظار أكبر من وقت انتظار معدل الكلي تساوي (٠.٥٧).

٣-٣ التنبؤ باحتمالات التغير في الوقت اللاحق:

يمكن التنبؤ بالحالات تحت الدراسة للفترتين المقبلتين عن طريق تربيع مصفوفة ماركوف P وكما يلي:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0.60 & 0.40 \\ 0.54 & 0.46 \end{pmatrix}$$

إذ إنَّ:

- احتمال الانتقال من حالة أقل وقت الانتظار إلى حالة أقل وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٦٠)، أي أنَّ احتمال حدوث حالتين متتاليتين وقت انتظار أقل من وقت انتظار معدل الكلي تساوي (٠.٦٠).
- احتمال الانتقال من حالة أقل وقت الانتظار إلى حالة أكبر وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٤٠)، أي أنَّ احتمال حدوث حالة وقت انتظار أقل من معدل وقت الانتظار الكلي ويتبعه حالة وقت انتظار أكبر من معدل وقت الانتظار الكلي تساوي (٠.٤٠).
- احتمال الانتقال من حالة اكبر وقت الانتظار إلى حالة أقل وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٥٤)، أي أنَّ احتمال حدوث حالة وقت انتظار أكبر من معدل وقت الانتظار الكلي ويتبعه حالة وقت انتظار أقل من معدل وقت الانتظار الكلي تساوي (٠.٥٤).
- احتمال الانتقال من حالة أكبر وقت الانتظار إلى حالة أكبر وقت الانتظار اللاحق تساوي (٠.٤٦)، أي أنَّ احتمال حدوث حالتين متتاليتين وقت انتظار أكبر من وقت انتظار معدل الكلي تساوي (٠.٤٦).

٣-٤ حالة الاستقرار:

يمكن الوصول إلى حالة الاستقرار كما يلي:

$$(\pi_0 \quad \pi_1) * \begin{pmatrix} 0.68 & 0.32 \\ 0.43 & 0.57 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \pi_1 \end{pmatrix}$$

ثم:

$$0.68\,\pi_0 + 0.43\,\pi_1 = \pi_0 \quad \dots\dots\dots (3-1)$$
$$0.32\pi_0 + 0.57\pi_1 = \pi_1 \quad \dots\dots\dots (3-2)$$

من خلال معادلة رقم (٣-١) و (٣-٢) يمكن الحصول على قيمتين (π_0) و (π_1) كما يلي:

$$\pi_1 = \frac{0.35}{0.75} \quad \text{و} \quad \pi_0 = \frac{0.4}{0.75}$$

٤- الاستنتاجات والتوصيات

٤-١ الاستنتاجات:

يمكن توضيح النتائج التي توصلنا إليها بما يلي:

من مصفوفة (P^2) قيمة (أقل وقت الانتظار إلى أقل وقت الانتظار اللاحق) قلت بمقدار (٠.٠٨) وهذا لاتكون لصالح الشركة وكذلك (أقل وقت الانتظار الى أكبر وقت الانتظار للاحقها)

ازدادت بمقدار (٠.٠٨) وهذا ايضا لاتكون لصالح الشركة، وان احتمال الانتقال (أكبر وقت الانتظار إلى أقل وقت الانتظار للاحقها) ازدادت بمقدار (٠.١١) وهذا تكون لصالح الشركة، وإنَّ احتمال الانتقال (أكبر وقت الانتظار إلى أكبر وقت الانتظار للاحقها) قلت بمقدار (٠.١١) وهذا تكون لصالح الشركة. وبشكل عام حالة انتقال من أكبر وقت الانتظار إلى أقل وقت الانتظار اللاحق وأكبر وقت الانتظار إلى أكبر وقت الانتظار اللاحق تكون لصالح الشركة و حالة انتقال من اقل وقت الانتظار إلى أقل وقت الانتظار اللاحق وأقل وقت الانتظار إلى أكبر وقت الانتظار اللاحق لا تكون لصالح الشركة لذلك يجب على الشركة بالقيام بما ورد في التوصيات.

٤-٢ التوصيات:

إنَّ قدرة احتفاظ كل شركة بزبائنها تعتمد على إمكانية الخدمات المقدمة من قبل الشركة. بما أنَّ احتمال انتقال حالة أقل وقت الانتظار إلى حالة أقل وقت الانتظار اللاحق من المصفوفة المتنبئة بها تساوي (٠.٦٠) وهي أقل من قيمة (٠.٦٨) وكذلك انتقال حالة أقل وقت الانتظار إلى حالة أكبر وقت الانتظار اللاحق من المصفوفة المتنبئة بها تساوي (٠.٤٠) وهي أكبر من قيمة (٠.٣٢) وهذا يدل على أنَّ احتمال وقت انتظار الزبائن على الخط تزداد في خدمة المشتركين للشركة، لذا نوصي الشركة بتدعيم الأجهزة الاستقبالية بأجهزة أو نظام متطور وحديثة لإرضاء المشتركين.

المصادر

اولا: العربية

[١] ابراهيم العلي، محمد عكروش، سلمان احمد " **تحليل حركة السوق باستخدام سلاسل ماركوف – دراسة تطبيقية على الشركات التالية (شركة غزل حماه – شركة غزل جبلة – الوليد للغزل بحمص)**"، مجلة جامعة تشرين للبحوث والدراسات العلمية – سلسلة العلوم الاقتصادية والقانونية المجلد (٣١) العدد (١) ٢٠٠٩.

[٢] الربيعي، فاضل محسن، عبد، صلاح حمزة " **مقدمة في العمليات التصادفية**"، بغداد، ٢٠٠٥.

[٣] حسن عبد الهادي حسن "**احتساب معدل العطل الكلي للمكائن واحتمالات الانتقال من حالة تشغيلية لأخرى باستخدام سلاسل ماركوف**"، الغرى العلوم الاقتصادية والإدارية، السنة التاسعة، العدد التاسع والعشرون، ٢٠١٢.

[٤] شذا زبيدة. "**استخدام سلاسل ماركوف في التنبؤ**". جامعة حلب، كلية علوم، قسم الإحصاء الرياضي ٢٠١٠.

ثانيا: الاجنبية

[5] Coolen ACC. "**Markov Chains**" Compact Lecture Notes and Exercises, Department of Mathematics, King's College London, 2009.

[6] Jin Y. Wang "**Operation Research/Markov Chains**" College of Management, NCTU, 2009.

[7] Konstantopoulos, Takis "**Markov Chains and Random Walks**", lecture notes Introductory, Autumn 2009.

[8] Seneta E. "**Markov and the Birth of Chain Dependence**". International Statistical Review, 1995.