

الحل العددي لمعادلة جريان مائع في وعاء منحني

بدران جاسم سالم

كلية التربية الأساسية

جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث ٢٠٠٧ / ١١ / ٤

تاريخ استلام البحث ٢٠٠٧ / ٨ / ١٣

ABSTRACT

The Fluid Flow in a bend Duct equation had been solved numerically by using two methods. The first is **ADE** (Alternating Direction Explicit) method and the second is **ADI** (Alternating Direction Implicit) method. A comparison had been made between these two methods with the exact solution, and we find that the **ADI** method is the best and most accurate than the **ADE** method, the numerical solution is alternant and identical. This means that the solution is itself in every period. Therefore, we need lesser accounts and then to a short time.

المخلص

لقد تم حل معادلة جريان مائع في وعاء منحني باستخدام نوعين من الطرائق ، الأولى هي طريقة **ADE** (Alternating Direction Explicit) والثانية هي طريقة **ADI** (Alternating Direction Implicit) وقد تبين أن طريقة **ADI** تكون أفضل وأدق من طريقة **ADE** وذلك من خلال مقارنة نتائج كل طريقة مع الحل المضبوط (Exact solution) كما تبين إن الحل العددي يكون دوريا ومتناظرا أي أن الحل يكون نفسه لكل فترة ولذلك فإننا نحتاج إلى حسابات أقل ومن ثم إلى وقت أقل.

1. المقدمة: Introduction

تعتبر المعادلات التفاضلية خير وسيلة لوصف معظم المسائل الهندسية والرياضية والعلمية على حد سواء، إذ يتضح ذلك جليا في وصف عمليات انتقال الحرارة، جريان الموائع، الحركة الموجية، الدوائر الإلكترونية فضلا عن استخدامها في مسائل الهياكل الإنشائية والوصف الرياضي للتفاعلات الكيميائية، وكذلك في وصف معادلات الانتشار (Diffusion Equations) اللاخطية التي تؤدي دورا مهما في الأنظمة الحركية المشتتة. إن معادلات الانتشار هي مسائل قيم ابتدائية (Initial Value Problems) تكون في حالة معتمدة على الزمن (Time Dependent Equations) والحل لهذا النوع من المسائل يكون في

منطقة مفتوحة R تخضع لشروط حدودية، وتنتج هذه المسائل في دراسة موجات الضغط في السوائل وفي انتشار الجهد والإزاحة وانتشار الحرارة وغيرها، وبصورة عامة إن إمكانية الحصول على حلول تحليلية (Analytical Solution) لمسائل الانتشار هي معقدة كثيراً بالرغم من التطور المتزايد في المفاهيم والأساليب الرياضية المتبعة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية للاخطية لذلك فإن الحلول العددية (Numerical Solutions) هو الأسلوب الأمثل لدراسة خواص هذا النوع من المعادلات [7].

يولد وجود الانحناء (Curvature) في الأوعية الناقلة قوة طاردة مركزية (Centrifugal Force) تعمل في زاوية قائمة باتجاه الجريان الرئيسي (Main Flow) ويسبب هذا التأثير تشوهاً في حقل الجريان عن الجريان بالأوعية المستقيمة فضلاً عن أن تشكيل المنحني للوعاء يشيع في التطبيقات الهندسية، فهو يكثر في أنظمة نقل الموائع والمبادلات الحرارية (Heat Exchangers) والمفاعلات الكيميائية (Chemical Reactors) والأجهزة (Apparatus) والمعدات (Equipment) والمبتكرات (Devices) [12].

2. النموذج الرياضي: Mathematical Model:

أن طبيعة جريان مائع حقيقي معقدة جداً" إذ أن القوانين الأساسية التي تصف الحركة الكاملة لمائع لم تصغ بطريقة سهلة وان بعض الحلول الرياضية تحتاج إلى التجارب العلمية المرئية، وهذه المعادلات الأساسية في الجريان هي التي تمكننا من التنبؤ بسلوك المائع. إن المعادلات الأساسية لجريان المائع قد تم الحصول عليها ومعروفة باسم معادلات نافير-ستوكس والمتمثلة بمعادلة الاستمرارية (Equation of Continuity) ومعادلة الحركة (Equation of Motion) [8].

ومن أجل دراسة أهمية وجود الانحناء على قوة اللزوجة في الاتجاه المحوري فإنه من الضروري إيجاد السرعة من دون الجريان الثانوي ولغرض النموذج الحالي فإن الضغط يعد ثابتاً" وبذلك يمكن تمثيل معادلة جريان مائع في وعاء منحني بالشكل الآتي:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\Delta q}{mL} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{w}{R^2} \quad \dots(1)$$

حيث

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y)$$

$$0 \leq x \leq L$$

$$0 \leq y \leq L$$

$$m > 0$$

$$t > 0$$

$$w(L, L, t) = g(t)$$

$$w(0, 0, t) = f(t)$$

المعادلة (1) هي معادلة دراسة تأثير الانحناء من دون الجريان الثانوي بالاعتماد على معامل الزمن، حيث R هو نصف قطر الانحناء، V هي اللزوجة الكينماتية (Kinematic Viscosity)، $\frac{w^2}{R}$ هي القوة الطاردة المركزية (Centrifugal Force)، q هو الضغط، L نصف ضلع المقطع، m ثابت اختياري. [8].

اهتم Shiragami & Inaue في عام (1988) [12] بدراسة جريان المائع بعد أن يأخذ شكله الكامل في وعاء منحن باستخدام التقنيات العددية وقام بدراسة تأثير الانحناء من دون الجريان الثانوي وتوصل إلى الحل التحليلي اللازم للحالة كما أكد أن تأثير الانحناء يمكن إهماله.

كما عرض Misra & Kar في عام (1990) [6] تطوير النموذج الرياضي لدراسة تأثير جريان الدم في الشرايين (Arteries) عند ارتجاج جسم، وبين أن الإنسان أو الكائنات الراقية غالبا ما تتعرض إلى ظروف ارتجاجية في أشكال متعددة فعندما يوضع جسم ما على منضدة ذات اهتزازات فان ارتجاج الجسم ككل سوف يتوزع بشكل سريع فضلا عن أن عند ركوب المركبات أو التحليق بطائرة أو سفينة فضائية فان الإنسان غالبا ما يتعرض إلى ارتجاجات جسدية لا إرادية.

أجرى Buses & Clever عام (1994) [3] الحسابات العددية المعتمدة على توسيع طريقة كلاركين للتغيرات المعتمدة وقد طبقت للجريانات الثابتة الزمنية الدورية ثلاثية الأبعاد، كما أن استقرارية الحلول الثابتة قد تم تحليلها .

قام Athanassenas في عام (1997) [1] بتطوير تناسقية الدوران على السطوح ذات n من الأبعاد في R^{n+1} للحجم المغلق V ومع حدود في صفتين متوازيتين ومع المحافظة

على الحجم وبوجود الجريان المنحني وقد حصل فيما يتعلق بالحجم على تقديرات منحدره تقود إلى بقاء الجريان إلى فترة أطول.

استنتج Auer & Busse في عام (1998) [2] في مشكلة تيلر - بينارد (Taylor-Benard) حد الفجوة الضيق لجريان مائع بين اسطوانتين متعددي المحاور وذات دوران مختلف والتي تحفظ بدرجات حرارية متفاوتة ، وعندما يتم تسخين الاسطوانة الداخلية فان القوة الطاردة المركزية تتعدى الجاذبية.

حلل Mosa & Ibrahim في عام (2001) [8] استقرارية جريان مائع مزعج في وعاء منحن، وتبين من خلال التحليل أن الاستقرارية تعتمد على نصف قطر الانحناء والعدد الموجي وقد وجدا منحني الاستقرارية المتعادل الذي يفصل بين منطقتي المائع.

ناقش Mosa في عام (2001) [9] الاستقرارية لحركة المائع الممغنط في طبقة أكمين على لوحة مسامية، آذ وجد أن الإزعاج للنظام يقل (يضمحل) ويكون النظام مستقرا "دائما" إذا كان $N < K^2$ حيث N معلمة مغناطيسية (Magnetic Parameter) و K العدد الموجي.

وفي هذا البحث ستم دراسة الحل العددي لمعادلة جريان مائع في وعاء منحن باستخدام طريقتين، الأولى هي طريقة ADE والثانية طريقة ADI ومقارنة الطريقتين مع الحل المضبوط وبيان الطريقة المثلى لحل معادلة جريان مائع في وعاء منحن.

3- الطرائق العددية:

أ. طريقة ADE (Alternating Direction Explicit):

في هذه الطريقة تعرف الإحداثيات (x, y, t) على نقاط الشبكة بالشكل الآتي:

$$x = nh$$

$$y = mk$$

$$t = p dt$$

$$n, m = 1, 2, \dots, M \quad , \quad p = 1, 2, \dots, N$$

حيث أن N, M هي أعداد صحيحة و $dt = \Delta t$ ، $k = \Delta y$ ، $h = \Delta x$ ، وعليه

فان نقاط W على الشبكة تكون بالشكل الآتي :

$$w(nh, mk, p dt) = w_{n,m,p}$$

وعليه يكون التقريب العددي للمشتقة الجزئية الأولى والثانية للدالة (w) نسبة إلى (x) ، (y) ،
 (t) وباستخدام مفكوك تايلر كما يأتي [13]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}}{dt} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{w_{n+1,m,p} - w_{n-1,m,p}}{2h} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{w_{n,m+1,p} - w_{n,m-1,p}}{2k} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{w_{n+1,m,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n-1,m,p}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{w_{n,m+1,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n,m-1,p}}{k^2}\end{aligned}$$

وباستخدام التقريبات أعلاه في المعادلة (1) ينتج:

$$\begin{aligned}\frac{1}{v} \left(\frac{w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}}{dt} \right) + \frac{\Delta q}{mL} &= \frac{w_{n+1,m,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n-1,m,p}}{h^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{w_{n+1,m,p} - w_{n-1,m,p}}{2h} \right) \\ &+ \frac{w_{n,m+1,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n,m-1,p}}{k^2} - \frac{w_{n,m,p}}{R^2} \\ \Rightarrow \frac{1}{v} (w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}) + \frac{\Delta q}{mL} dt &= \frac{dt}{h^2} (w_{n+1,m,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n-1,m,p}) \\ &+ \frac{dt}{R} \left(\frac{w_{n+1,m,p} - w_{n-1,m,p}}{2h} \right) \\ &+ \frac{dt}{k^2} (w_{n,m+1,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n,m-1,p}) - \frac{dt(w_{n,m,p})}{R^2}\end{aligned}$$

نفرض أن

$$\begin{aligned}r &= \frac{dt}{h^2} \\ h &= k\end{aligned}$$

نحصل على ما يأتي:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} (w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}) + \frac{\Delta q}{mL} dt &= r(w_{n+1,m,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n-1,m,p}) \\
 &+ \frac{rh}{2R} (w_{n+1,m,p} - w_{n-1,m,p}) \\
 &+ r(w_{n,m+1,p} - 2w_{n,m,p} + w_{n,m-1,p}) - \frac{dt(w_{n,m,p})}{R^2} \\
 \Rightarrow \frac{1}{v} (w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}) + \frac{\Delta q}{mL} dt &= r(w_{n+1,m,p} + w_{n,m+1,p} + w_{n,m-1,p} + w_{n-1,m,p} - 4w_{n,m,p}) \\
 &- \frac{dt(w_{n,m,p})}{R^2} + \frac{rh}{2R} (w_{n+1,m,p} - w_{n-1,m,p}) \\
 \Rightarrow w_{n,m,p+1} &= vr(w_{n,m+1,p} + w_{n,m-1,p}) - \left(\frac{vdt}{R^2} + 4vr - 1 \right) w_{n,m,p} \\
 &+ \left(vr + \frac{vrh}{2R} \right) w_{n+1,m,p} + \left(vr - \frac{vrh}{2R} \right) w_{n-1,m,p} - \frac{\Delta q}{mL} vdt \quad \dots(2)
 \end{aligned}$$

إن المعادلة (2) هي صيغة طريقة ADE لمعادلة جريان مائع في وعاء منحن ونلاحظ أن هذه المعادلة تحتاج إلى توافر خمس نقاط في المستوى p .

ب- طريقة ADI (Alternating Direction Implicit):

هذه الطريقة طورها العالمان (Peaceman) و (Rachford) عام 1955 وبيننا أنها تتطلب خزنًا قليلًا في الحاسبة كما أنها طريقة دقيقة، وفي تقريب طريقة ADI المعادلة تكتب في صيغة كميات في مستويين من مستويات x وبشكل عام تقريبيين استخدمنا بالتعاقب احدهما لحساب التقدم من المستوي $p-1$ إلى المستوي $p+1$ والثاني لحساب التقدم من المستوي p إلى المستوي $p+2$. [13].

في هذه الطريقة تشمل كل من الخطوتين الحركة في كل من الاتجاهين x و y ، وفي الخطوة الأولى الحركة في الاتجاه x تصاغ ضمناً والحركة في الاتجاه y تصاغ بشكل صريح. أما في الخطوة الثانية فإن الحركة باتجاه x فتصاغ بشكل صريح والحركة في الاتجاه y تصاغ ضمناً.

في الخطوة الأولى يمكن تمثيل الحركة من المستوى $p-1$ إلى المستوى $p+1$ باستبدال $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ بالتقريبات الضمنية عند المستوى $p+1$ و استبدال $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ بالتقريبات الصريحة عند المستوى $p-1$ وكما يأتي [13]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t} &= \frac{w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}}{dt} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{w_{n+1,m,p+1} - w_{n-1,m,p+1}}{2h} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{w_{n,m+1,p-1} - w_{n,m-1,p-1}}{2k} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{w_{n+1,m,p+1} - 2w_{n,m,p+1} + w_{n-1,m,p+1}}{h^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= \frac{w_{n,m+1,p-1} - 2w_{n,m,p-1} + w_{n,m-1,p-1}}{k^2}\end{aligned}$$

وباستخدام التقريبات أعلاه في المعادلة (1) ينتج:

$$\frac{1}{v} \left(\frac{w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}}{dt} \right) + \frac{\Delta q}{mL} = \frac{w_{n+1,m,p+1} - 2w_{n,m,p+1} + w_{n-1,m,p+1}}{h^2} + \frac{1}{R} \left(\frac{w_{n+1,m,p+1} - w_{n-1,m,p+1}}{2h} \right) + \frac{w_{n,m+1,p-1} - 2w_{n,m,p-1} + w_{n,m-1,p-1}}{k^2} - \frac{w_{m,n,p}}{R^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{v} (w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}) + \frac{\Delta q(dt)}{mL} &= \frac{dt}{h^2} (w_{n+1,m,p+1} - 2w_{n,m,p+1} + w_{n-1,m,p+1}) \\ &+ \frac{dt}{2hR} (w_{n+1,m,p+1} - w_{n-1,m,p+1}) \\ &+ \frac{dt}{k^2} (w_{n,m+1,p-1} - 2w_{n,m,p-1} + w_{n,m-1,p-1}) - \frac{w_{m,n,p} dt}{R^2}\end{aligned}$$

نفرض أن

$$\begin{aligned}r &= \frac{dt}{h^2} \\ h &= k\end{aligned}$$

نحصل على ما يأتي:

$$\frac{1}{v} (w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}) + \frac{\Delta q(dt)}{mL} = r(w_{n+1,m,p+1} - 2w_{n,m,p+1} + w_{n-1,m,p+1}) + \frac{rh}{2R} (w_{n+1,m,p+1} - w_{n-1,m,p+1}) + r(w_{n,m+1,p-1} - 2w_{n,m,p-1} + w_{n,m-1,p-1}) - \frac{w_{m,n,p} dt}{R^2}$$

$$\frac{1}{v} (w_{n,m,p+1} - w_{n,m,p}) = r(w_{n+1,m,p+1} - 2w_{n,m,p+1} + w_{n-1,m,p+1} + w_{n,m+1,p-1} - 2w_{n,m,p-1} + w_{n,m-1,p-1}) + \frac{rh}{2R} (w_{n+1,m,p+1} - w_{n-1,m,p+1}) - \frac{w_{m,n,p} dt}{R^2} - \frac{\Delta q(dt)}{mL}$$

$$\left(\frac{1}{v} + 2r\right) (w_{n,m,p+1}) - \left(r + \frac{rh}{2R}\right) w_{n+1,m,p+1} - \left(r - \frac{rh}{2R}\right) w_{n-1,m,p+1} = r(w_{n,m+1,p-1} - 2w_{n,m,p-1} + w_{n,m-1,p-1}) - \frac{\Delta q(dt)}{mL} + \left(\frac{1}{v} - \frac{dt}{R^2}\right) w_{n,m,p} \dots (3)$$

المعادلة (3) تمثل صيغة ألد (ADI) لمعادلة جريان مائع في وعاء منحن. بالنسبة الى النقاط في المستوي $p+1$ لدينا ثلاث نقاط مجهولة وأربع نقاط معلومة في المستوي $p-1$ والمستوي p .

4-التطبيق العملي:

نأخذ معادلة جريان مائع في وعاء منحن المتمثلة بالمعادلة (1) على المنطقة المستطيلة $0 \leq x \leq 2p$ ، $0 \leq y \leq 2p$. بالشروط الحدودية :

/1

$$w(x, y, 0) = \sin(x) \cdot \sin(y)$$

$$w(2p, 2p, t) = 0$$

$$w(0, 0, t) = 0$$

[9]

/2

$$w(x, y, 0) = \sin^2(2px) \cdot \sin^2(2py)$$

$$w(2p, 2p, t) = 0$$

$$w(0, 0, t) = 0$$

[10]

الجدول (1)

الحل العددي لـ (1) باستخدام الطرائق ADE و ADI لقيم مختلفة لـ (ν, R, m, d)

ADE Method (fourth level)	ADI Method (fourth level)	Exact
h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.1,R=0.5 $\Delta q = 1 \quad m = 0.5$, L=2 $d = 1$	h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.1,R=0.5 $\Delta q = 1 \quad m = 0.5$, L=2 $d = 1$	h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.1,R=0.5 $\Delta q = 1 \quad m = 0.5$, L=2 $d = 1$
W(x ,y ,t)	W(x ,y, t)	W(x , y, t)
0	0	0
0.1936	0.2359	0.2528
0.3001	0.4057	0.4252
0.4351	0.5613	0.5799
0.5422	0.6499	0.6611
0.6628	0.6963	0.7089
0.5409	0.6523	0.6644
0.4602	0.5694	0.5801
0.3423	0.4093	0.4233
0.1958	0.2652	0.2819
0	0	0
- 0.1936	- 0.2359	- 0.2528
- 0.3001	- 0.4057	- 0.4252
- 0.4351	- 0.5613	- 0.5799
- 0.5422	- 0.6499	- 0.6611
- 0.6628	- 0.6963	- 0.7089
- 0.5409	- 0.6523	- 0.6644
- 0.4602	- 0.5694	- 0.5801
- 0.3423	- 0.4093	- 0.4233
- 0.1958	- 0.2652	- 0.2819
0	0	0

الجدول (2)

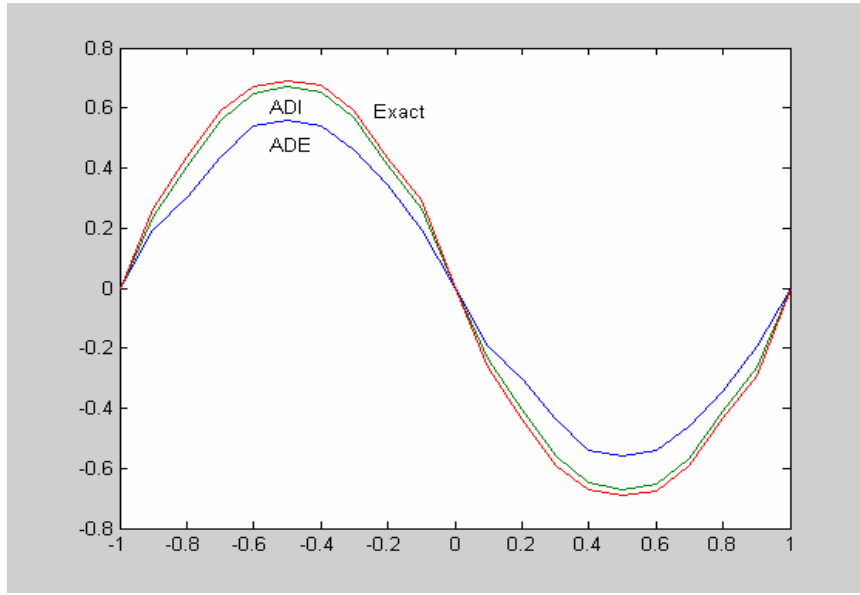
الحل العددي لـ (1) باستخدام الطرائق ADE و ADI لقيم مختلفة لـ (v, R, m, d)

ADE Method (fourth level)	ADI Method (fourth level)	Exact
h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.2,R=0.6 m = 0.6 $\Delta q = 1$ d = 1.5 , L=2	h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.2,R=0.6 m = 0.6 $\Delta q = 1$ d = 1.5 , L=2	h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.2,R=0.6 m = 0.6 $\Delta q = 1$ d = 1.5 , L=2
W(x , y , t)	W(x , y , t)	W(x , y , t)
0	0	0
0.2185	0.2559	0.2673
0.3999	0.4887	0.5095
0.5022	0.5998	0.6118
0.5972	0.6687	0.6899
0.6881	0.7195	0.7404
0.5991	0.6766	0.6972
0.5081	0.6116	0.6398
0.4025	0.5021	0.5259
0.2528	0.2719	0.2946
0	0	0
-0.2185	-0.2559	-0.2673
-0.3999	-0.4887	-0.5095
-0.5022	-0.5998	-0.6118
-0.5972	-0.6687	-0.6899
-0.6881	-0.7195	-0.7404
-0.5991	-0.6766	-0.6972
-0.5081	-0.6116	-0.6398
-0.4025	-0.5021	-0.5259
-0.2528	-0.2719	-0.2946
0	0	0

الجدول (3)

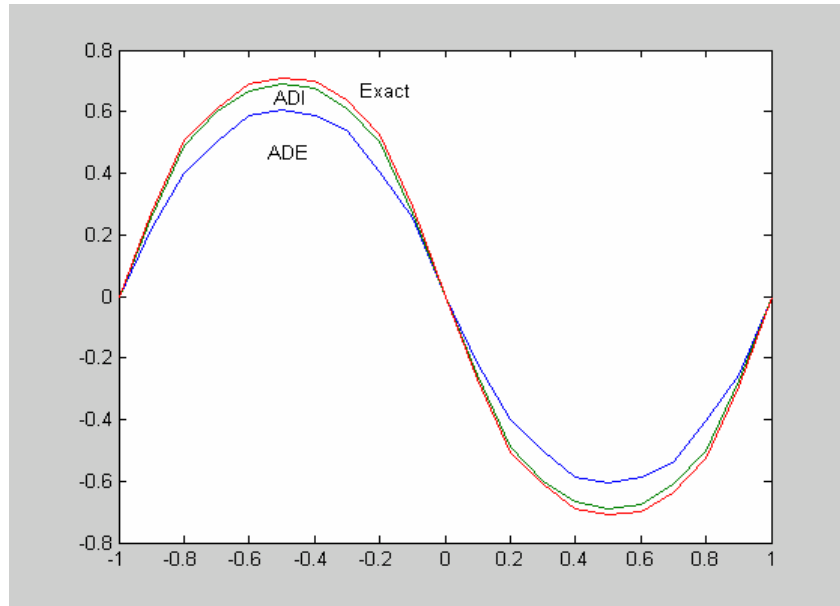
الحل العددي لـ (2) باستخدام الطرائق ADE و ADI لقيم مختلفة لـ (v, R, m, d)

ADE Method (fourth level)	ADI Method (fourth level)	Exact
h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.1,R=0.5 m = 0.5 $\Delta q = 1$ d = 1, L=2	h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.1,R=0.5 m = 0.5 $\Delta q = 1$ d = 1, L=2	h=k=0.31415927 r=0.22214415 v=0.1,R=0.5 m = 0.5 $\Delta q = 1$ d = 1, L=2
W(x, y, t)	W(x, y, t)	W(x, y, t)
0	0	0
0.2418	0.2766	0.2845
0.3999	0.4154	0.4389
0.5175	0.5799	0.5915
0.5864	0.6811	0.7001
0.7055	0.7249	0.7428
0.5900	0.6895	0.7129
0.5278	0.5800	0.6088
0.4021	0.4231	0.4545
0.2550	0.2849	0.2999
0	0	0
-0.2418	-0.2766	-0.2845
-0.3999	-0.4154	-0.4389
-0.5175	-0.5799	-0.5915
-0.5864	-0.6811	-0.7001
-0.7055	-0.7249	-0.7428
-0.5900	-0.6895	-0.7129
-0.5278	-0.5800	-0.6088
-0.4021	-0.4231	-0.4545
-0.2550	-0.2849	-0.2999
0	0	0



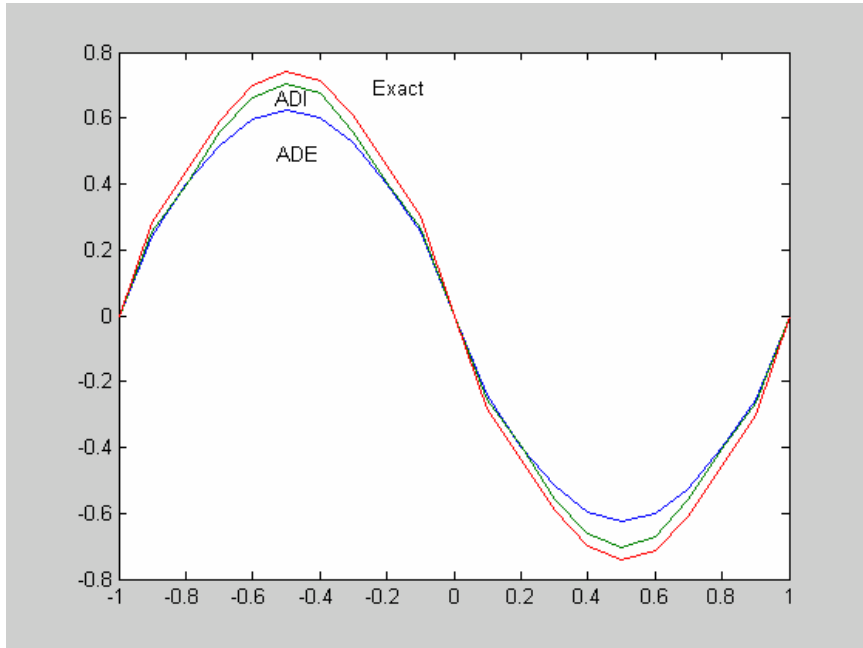
الشكل (1)

يمثل مقارنة طريقة ADE وطريقة ADI مع الحل الحقيقي للجدول (1) عندما
 $(\nu = 0.1, R = 0.5, m = 0.5, d = 1)$



الشكل (2)

يمثل مقارنة طريقة ADE وطريقة ADI مع الحل الحقيقي للجدول (2) عندما
 $(\nu = 0.2, R = 0.6, m = 0.6, d = 1.5)$



شكل (3)

يمثل مقارنة طريقة ADE وطريقة ADI مع الحل الحقيقي للجدول (3)

5-الاستنتاجات:

من خلال ملاحظة النتائج و الأشكال ومقارنة الطريقتين مع الحل الحقيقي الذي اخذ من المصدر [4] نستنتج أن طريقة ADI تكون أفضل من طريقة ADE وإن الحل العددي يكون دوريا ومتناظرا كما في الجداول (1)، (2)، (3) والأشكال (1)، (2)، (3) أي أن الحل يكون نفسه لكل فترة ولذلك فإننا نحتاج إلى حسابات أقل ومن ثم إلى وقت أقل، كذلك من خلال ملاحظة الجدولين (1)، (2) والأشكالين (1)، (2) نجد انه كلما كان نصف قطر الانحناء واللزوجة الكينماتية كبيرين زادت القوة الطاردة المركزية لمعادلة جريان المائع في وعاء منحن ومن ثم يعطي نتائج أفضل.

المصادر

- [1] Athanassenas, M., (1997), Volume – Preserving mean Curvature Flow of Rotationally Summetric Surfaces, Comment, Math. Helv., Vol. 72, No.1, p.p.52-66.
- [2] Auer, M., and Busse, F.H. and Clever, R.M. (1998), Three-Dimensional Convection Driven by Centrifugal Buoyancy, J. Fluid Mech., Vol. 301, p.p. 371-382.
- [3] Busse, F.H., and Clever, R.M. (1994), Higher Order Bifurcations in Fluid Systems and Coherent Structures in Turbulence Non-Linear Coherent Structures in Physics and Biology. PP. 405-415.
- [4] Connell E.H., (2004) Linear and nonlinear partial Differential Equation 2999, USA
- [5] John H.M. & Kurtis D. F. (2003) Numerical Method Using Matlab prentice-Hall, Inc. 889.
- [6] Misra, J.C. and Kar, B.K.(1990), Unsteady Flow of Blood Through Arteries in Vibration Environments, Mathematical and Computer Modeling, Vol. 35, No.2, p.p. 712-727.
- [7] Mitchell, A.R. & Griffiths D. f., (1980), The Finite Difference Method In Partial Differential Equation, John Wiley & Sons. chichester .New York .515-353.QA37479.40626.
- [8] Mosa, M. F. and Ibrahim B. M.(2001), Stability analysis and chaos in a band duct, Raf, j, sci. vol. 12, no. 1, pp. 91-99.
- [9] Mosa, M. F. (2001) Conditions for stability of MHD Ekman layer on a porous plate , J. Educe. Sci. vol. (48), p.p.164-168.
- [10] Richard L.B. & faires J.D. (2001) Numerical Analysis.
- [11] Shan Thakumar, M., (1989), Computer Based Numerical Analysis, Khanna Publishers, 2.B nath market, Neisaraic Delhi – 110006 India.
- [12] Shiragami, N., and Inaue, I.,(1988), Fully Developed and Developed Laminar Velocity Profiles in Rectangular Bend, Int. J. of Engineering Fluid Nechanics, Vol. 1, No. 1, P.P. 100-133.
- [13] Younbae, J. and Tsun, Z. M. (2005) Domain decomposition method for parabolic problems 35487, USA.