# تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد/ كلية التربية للعلوم الصرفة

## الخلاصة

تهدف الدراسة إلى إيجاد نموذج امثل من بين النماذج الخطية وغير الخطية لبيانات مفترضة وهذه باستخدام الاشتقاق بطرق (المربعات الصغرى ودالة الإمكان الأعظم) ويعد هذا البناء من أهم الدراسات الحديثة.

واعتمدنا في بناء النماذج الرياضية على اختبار F أو T واختبارات حدود الثقة واكتفينا في هذا البحث باختبار الـF.

**الكلمات المفتاحية:** النموذج الأمثل، النماذج الخطية وغير الخطية

# Determine the optimal model between linear models and non-linear

**Lecture Arshed A. Ahmad\College of Education for Pure Science**

## Abstract

The study aims to find optimal model of linear models and non-linear data using this assumption and derivation methods (Least Squares and Maximum Likelihood function), and this building is one of the most recent studies.

And adopted in building mathematical models to test the F or T and tests the limits of confidence and just in this research tested the F.

**Keyword:** The optimal model, linear models and non-linear

## المقدمة

لما يوجد من أهمية بالغة في العلم الحديث لبناء النماذج وانتشار هذا العلم في البحوث الحديثة لما يقع من أهمية لهذه النماذج في بناء استراتيجيات ورؤى مستقبلية في جميع جوانب الحياة منها (اجتماعية واقتصادية ...) أردنا في هذا البحث المقارنة بين النماذج لمعرفة اي نموذج يمكن ان يكون أمثل من غيره في رسم هذه الاستراتيجيات.

قمنا بأخذ ثلاثة نماذج للمقارنة فيما بينهم وتبدأ:

1. النموذج العام وكيفية اشتقاق هذا النموذج بطريقتين المتعارف عليهما (طريقة المربعات الصغرى ودالة الإمكان الأعظم ) وكذلك كيفية بناء اختبار F والمقارنة بين هذه النماذج وكذلك بناء حدود الثقة لهم.
2. قمنا ببناء النموذج الخطي أيضا باشتقاقه بالطرق السابقة للنموذج وكذلك بناء النموذج ألأسي واللوغارتمي لبيانات مفترضة ربما قد نكون بنينا هذه النماذج وان نضع لمسه صغيرة في استخدام النماذج.

# تحديد النموذج الأمثل بين النماذج الخطية وغير الخطية

م.أرشد أدهم أحمد

يعد البناء من أهم الدراسات الحديثة في بناء ورسم الخطط فتعتمد أسلوب المقارنة كأساس لمعرفة إي النماذج تحتل الصدارة من حيث اقل MSE وقبول الفرضيات من عدمها في اختيار الـ F لهذا استطرق في هذا البحث جميع الاشتقاقات والطرق الرياضية في البناء.

## النموذج القياسي الخطي البسيط Simple Linear Model [1]

أن النموذج القياسي الخطي البسيط يصف وبوضع العلاقة بين متغيرين هما y,x بعلاقة دالية y=f(x) ويمكن التعبير عن هذه العلاقة رياضيا $y = \beta_0 + \beta_1 x$ وهذه العلاقة الرياضية هي علاقة محددة (Deterministic) أو مضبوطة ويدعى النموذج بالنموذج ألتحديدي وأن هذه المعادلة لا تعبر عن حقيقة العلاقة بين المتغيرين لذلك يتم إضافة المتغير العشوائي (Random Variable) أو حد الاضطراب (Distrubus term) إلى المعادلة الرياضية أعلاه وتكون $y = \beta_0 + \beta_1 x + u$ فتحول العلاقة من علاقة محددة إلى علاقة تصادمية (stochastic) ويدعى النموذج في هذه الحالة بالنموذج الاحتمالي (Probably Model) ويلاحظ إن النماذج التحديدية لا تسمح بوجود الأخطاء سواء كانت هذه الأخطاء في القياسات أو في المتغيرات، أن النماذج الاحتمالية تأخذ الأخطاء بنظر الاعتبار.

## الخطأ العشوائي وأسبابه Error stochastic term [2]

أن من أهم المشاكل التي يواجهها باحث هو مشكل عدم التأكد (uncertainly) لذلك يعتمد القياس بشكل أساس على الاستدلال الإحصائي والذي يعتمد بدوره على قوانين الاحتمالات بالتالي على وجود الأخطاء في التقديرات. وتستوجب مشكل عدم التأكد ادخال المتغير العشوائي (u) في النموذج لتحول الى نموذج احتمالي أما سبب أضافة المتغير العشوائي الى النموذج وذلك لقياس أثر المتغيرات الأخرى التي حذفت من النموذج بسبب جهل الباحث بوجودها أو كيفية قياسها أو للقياسات الناتجة عن المعاينة (Sampling) أو عن قياس المتغير التابع او عدم معرفة الباحث بالشكل الصحيح لعلاقة الدالية بين المتغيرات، أو لصعوبة تحديد سلوك البشر مسبقا، أو لوجود بعض المتغيرات غير المتوقعة ذات التأثير القليل على المتغير التابع، أن النموذج الخطي البسيط يكون بالشكل التالي $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$

حيث $y_i$ هو المتغير التابع أو المعتمد أو الداخل أو مقدار الاستجابة، $x_i$ هو متغير مستقل أو خارجي أو متغير توضيحي.

$u_i$ هو متغير عشوائي، حد الخطأ، حد الاضطراب.

## طريقة المربعات الصغرى Ordinary least square method [3]

تعتمد على أن تجعل انحراف القيم التقديرية أقل ما يمكن وتكتب اختصارا O.L.S وهي طريقة لتقدير (estimate) معلمات النموذج القياسي ويتلخص مبدأ هذه الطريقة بجعل مجموع مربعات انحرافات القيم التقديرية عن القيم الحقيقية أقل ما يمكن (جعل مجموع مربعات الخطأ أقل ما يمكن)، أما سبب استخدام هذه الطريقة فسهولة حساب تقدير المعلمات بواسطة O.L.S مقارنة بالطرق الأخرى، بالإضافة إلى أن تقدير المعلمات باستخدام O.L.S تتصف بصفتها أكثر فعالية من الطرق وكذلك مقطعية النتائج المستحصله بهذه الطريقة.

## اشتقاق طريقة المربعات الصغرى [3]

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u$$

بالاشتقاق نحصل على

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i / n}{\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2 / n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\beta_0 = \hat{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

الصيغة التقديرية حول نقطة الأصل للمعادلة $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$

**خصائص مقدرات المربعات الصغرى The properties of O.L.S [3]**

أن مقدرات المربعات الصغرى $\hat{\beta}_0 , \hat{\beta}_1$ تمتاز بخاصية أفضل مقدر خطي غير متميز (best liner un bisd estimate) ويرمز لها اختصار (BLUE) وتعني كلمة (best) بأنه المقدر له اقل تباين (Minimum Variance) في حين انه طريقة (M.L.E) تعطينا مقدر غير متميز ذو أقل تباين (MVUE) بما أن العلاقة بين المتغير المستقل $x_i$ والمتغير التابع $y_i$ هي خطية بالإضافة إلى ثابت المتغير المستقل فأننا نحتاج إلى تقدير المعالم $\beta_1 , \beta_0$ .

**دالة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood function [4]**

$$y == x\underline{\beta} + \underline{u}$$

$$E(y) = E(x\underline{\beta}) + E(\underline{u})$$

$$= x\underline{\beta} + 0 + x\underline{\beta}$$

$$\operatorname{var}(y) - \operatorname{cov}(y) = \sigma^2 I_n$$

$$y \sim N(x\underline{\beta}, \sigma^2 I_n)$$

$$M.L.E = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}u'u}$$

$$y = x\underline{\beta} + \underline{u}$$

$$\underline{u} = y - x\underline{\beta}$$

$$M.L.E = (2\pi\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y - x\beta)'(y - x\beta)\right]$$

$$= (2\pi)^{\frac{-n}{2}} (\sigma^2)^{\frac{-n}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(y'y - y'x\beta - \beta'x'y + \beta'x'x\beta)\right]$$

$$\ln M.L.E = \frac{-n}{2}\ln 2\pi - \frac{-n}{2}\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}(y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta)$$

$$\frac{\partial \ln M.L.E}{\partial \beta} = -\frac{1}{2\sigma^2}(2x'y + 2\hat{\beta}x'x) = 0$$

$$\hat{\beta} = (x'x)x'\underline{y}$$

$$\frac{\partial \ln M.L.E}{\partial \sigma^2} = \frac{-n}{2}\frac{1}{\sigma^2} - (y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta)\left(-\frac{1}{2\sigma^4}\right)$$

$$= \frac{-n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}(y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(y - x\beta)'(y - x\beta)}{n} = S^2 = \frac{e'e}{n} = MSE = \frac{SSE}{n}$$

$$E\left(S^2\right)=\sigma^2$$
$$\underline{y}=x\underline{\beta}+\underline{u}$$
$$\underline{u}=\underline{y}-x\underline{\beta}$$
$$\underline{y}=x\underline{\hat{\beta}}+e \qquad estimate\ Model$$
$$\underline{\hat{\beta}}=(x'x)^{-1}x'y$$
$$\underline{e}=\underline{y}-x\underline{\hat{\beta}}=\underline{y}-x(x'x)^{-1}x'y=\left(x\underline{\beta}+\underline{u}\right)-x(x'x)^{-1}x'\left(x\underline{\beta}+\underline{u}\right)$$
$$=u-x(x'x)^{-1}x'\underline{u}=\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]\underline{u}$$

$$let\ A=I_n-x(x'x)^{-1}x' \quad then\ \underline{e}=A\underline{u}$$

A is symmetric and independent matrix then

$$A'=\left[I_n-x(x'x)^{-1}x\right]'=I_n'-x(x'x)^{-1}x'=I-x(x'x)^{-1}x'=A$$
$A\ is\ symmetric$

$$A'A=\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]'\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]=\left[I_n-x\left(x^Tx\right)^{-1}x^T\right]'\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]$$
$$=I_n-x(x'x)^{-1}x'=A$$
$$e'e=(A\underline{u})'A\underline{u}=u'A'Au=\underline{u}'A\underline{u}=\underline{u}'\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]\underline{u}$$
$$E(e'e)=E\left[\underline{u}'\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]\underline{u}\right]=E(\underline{u}'\underline{u})tr\left[I_n-x(x'x)^{-1}x'\right]=\sigma^2I_n\left[trI_n-tr(x'x)^{-1}x'x\right]$$
$$=\sigma^2I_n[n-(k+1)]$$

$$E(e'e)=\sigma^2[n-k-1]$$
$$\frac{E(e'e)}{n-k-1}=\sigma^2$$
$$E\left(S^2\right)=\sigma^2$$

**النموذج الخطي العام General Linear Model (GLM)** [5]

في معظم الظواهر يكون النموذج بشكل نموذج خطي عام ونقصد بالنموذج الخطي العام هو أن المتغير المعتمد $y_i$ يكون داله لكثر من متغيرين مستقلين $\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ أن يكون $y_i=f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)$ ويمكن كتابته بشكل نموذج خطي عام $y_i=\beta_0+\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\ldots+\beta_kx_{ik}+u_i$ حيث أن $i=1,2,\ldots,n,\quad j=0,1,\ldots,k$

$$y_i=\sum_{j=0}^{k}\beta_jx_{ij}+u_i$$

حيث إن عدد المعالم هو (k+1) ويمكن كتابة النموذج أيضا بشكل مصفوفات $\underline{y}=x\underline{\beta}+\underline{u}$

حيث أن $\underline{y}$ يمثل موجة المشاهدات للمتغير المعتمد ذات بعد $n\times 1$

x يمثل مصفوفة المشاهدات للمتغير المستقل ذات بعد $n\times k+1$

$\underline{\beta}$ يمثل موجة المعالم المطلوب تقديرها ويكون ذات بعد $k+1\times 1$

$\underline{u}$ هو موجة الأخطاء الناتجة من الفرق بين القيمة الحقيقية والتقديرية للمتغير المعتمد ذات بعد $n\times 1$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$1-u \sim N\left[0,\sigma^2 I_n\right]$$

$$2-E\left(u_i u_j\right)=0 \qquad when\ i\neq j$$

$$3-E\left(u_i x_i\right)=0$$

بالإضافة إلى الفروقات أعلاه (٣) يجب أن لا تكون هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما أن عدد المشاهدات يجب أن لا تزيد عن عدد المعالم المطلوب تقديرها وهذا يعني أن عدد أعمدة المصفوفة x في النموذج والبالغة (k+1) يجب أن تكون أقل من عدد صفوفها والبالغة n وبعبارة أخرى $rank\ x = k+1 < n$ وهذا الفرض لا يتحقق عندما تكون قيمة أحد المتغيرات المستقلة ثابت وذلك لان محدد المصفوفة يكون مساو إلى الصفر وبالتالي لا يمكن أيجاد معكوس المصفوفة.

$$E(\underline{u})=\begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\operatorname{var}(\underline{u})=\begin{bmatrix} \operatorname{var}(u_1) \\ \operatorname{var}(u_2) \\ \vdots \\ \operatorname{var}(u_n) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{var}(\underline{u})-\operatorname{cov}(\underline{u})=E(uu')=E\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 I_n$$

$$\underline{u} = \underline{y} - x\underline{\beta}$$

$$\underline{u}\underline{u}' = (\underline{y} - x\underline{\beta})(\underline{y} - x\underline{\beta})' = (\underline{y} - x\underline{\beta})(\underline{y}' - x'\underline{\beta}')$$

$$\frac{\partial \underline{u}\underline{u}'}{\partial \underline{\beta}} = -2x'y + 2x'x\underline{\beta} = 0$$

$$\underline{\beta} = (x'x)^{-1}x'y$$

$$and \;\; \underline{\hat{\beta}} = (x^T x)^{-1} x^T y$$

أن أفضل تقدير خطي غير متميز المعالم نموذج (G.L.M) يعني التقدير الذي يتمتع بالخصائص التالية:

١. أن يكون تشكيله خطية Linear computation
٢. أن يكون غير متميز un bised
٣. أن يكون تباينه أصغر من تباين أي مقدر أخر.

والإثبات أن المعالم $\underline{\tilde{\beta}}$ هي أفضل تقدير خطي من مشاهدات العينة

**اختبار $H\underline{\beta} = \underline{h}$ (linear hypothesis)** [6]

نفرض النموذج الخطي العام $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \beta_4 x_{i4} + e_i, \quad i = 1,2,\ldots,n$

١. اختبار linear hypothesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2$

$$\beta_1 - \beta_2 = 0$$

$$H = [0 \quad 1 \quad -1 \quad 0 \quad 0], \; \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \; \underline{h} = [0]$$

٢. اختبار linear hypothesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2, \quad H_0 : \beta_3 = \beta_4$

$$\beta_1 - \beta_2 = 0, \qquad \beta_3 - \beta_4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \; \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٣. اختبار linear hypothesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 6$

$$\beta_1 = 6, \qquad \beta_2 = 6$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4], \; \underline{h} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

٤. اختبار linear hypothesis $H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 0$

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \beta_4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_5,\ \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4],\ \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٥. اختبار $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4$ linear hypothesis

$$\beta_1 = \beta_2,\ \beta_1 = \beta_3,\ \beta_1 = \beta_4$$

$$\beta_1 - \beta_2 = 0,\ \beta_1 - \beta_3 = 0,\ \beta_1 - \beta_4 = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},\ \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4],\ \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

٦. اختبار $H_0 : \beta_1 + 2\beta_2 = 6$, $H_0 : \beta_1 - 2\beta_2 = 4\beta_3$ linear hypothesis

$$\beta_1 - 2\beta_2 - 4\beta_3 = 0, \qquad \beta_1 + 2\beta_2 = 6$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \underline{\beta}' = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4],\ \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لاحظ ان كل الفرضيات المذكورة اعلاه هي حالة خاصة من $H\underline{\beta} = \underline{h}$ حيث H هو $(p \times q)$ مصفوفة و $\underline{h}$ هو $(1 \times q)$ مصفوفة عمودية، p هو عدد المعاملات في النموذج و q هو عدد من القيود.

١. $H\underline{\beta} = \underline{h}$ هي مجموعة متناسقة من المعاملات.

٢. H هو مصفوفة من حجم $(p \times q)$ مع رتبة q (HH' is full rank)

## فترات الثقة Confidence interval [2]

تحديد قيم (Limiting values) باستخدام $\hat{\beta}_i$ بحيث نظمن وقوع القيمة الحقيقية للمعلمة $\beta$ داخل تلك الحدود بدرجة ثقة معينة وتسمى الفترة مابين حدي الثقة بفترة الثقة عند استخدام مستوى ثقة 0.95 فهذا يعني ان 0.95 من القيمة الحقيقية للمعلمة تقع داخل فترة الثقة وان 0.05 تقع خارج فترة الثقة ويرمز الى فترة الثقة (C.I) وان فترة الثقة للمعلمتين $\beta_1, \beta_0$

$$t=\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\hat{\operatorname{var}}(\hat{\beta}_0)}},\qquad \operatorname{var}(\hat{\beta}_0)=S^2\left(\frac{1}{n},\frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2}\right)$$

$$pr\left[-t_{(d.f,\alpha/2)}\le t\le t_{(d.f,\alpha/2)}\right]=1-\alpha$$

$$pr\left[-t_{(d.f,\alpha/2)}\le\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{\sqrt{\hat{\operatorname{var}}(\hat{\beta}_0)}}\le t_{(d.f,\alpha/2)}\right]=1-\alpha$$

$$pr\left[\hat{\beta}_0-t_{(d.f,\alpha/2)}\sqrt{\hat{\operatorname{var}}(\hat{\beta}_0)}\le\hat{\beta}_0\le\hat{\beta}_0+t_{(d.f,\alpha/2)}\sqrt{\hat{\operatorname{var}}(\hat{\beta}_0)}\right]=1-\alpha$$

وأن

$$pr\left[\hat{\beta}_1-t_{(d.f,\alpha/2)}\sqrt{\hat{\operatorname{var}}(\hat{\beta}_1)}\le\hat{\beta}_1\le\hat{\beta}_1+t_{(d.f,\alpha/2)}\sqrt{\hat{\operatorname{var}}(\hat{\beta}_1)}\right]=1-\alpha$$

**اختبار نسبة الأحتمال العامة لأختبار $H\underline{\beta}=\underline{h}$ :** [7]

الآن نريد ان نستنتج اختبار للاختبار $H_0:H\underline{\beta}=\underline{h}$ ضد $H_1:H\underline{\beta}\neq\underline{h}$ في GLM،حيث $\underline{y}=x\underline{\beta}+e_i,\ e_i\sim N(\underline{0},\sigma^2I_n)$ سنقوم باستخدام GLRT التي هي على النحو التالي:

$$K(y)=\frac{\max\limits_{(\beta,\sigma^2)in\,w}\left[L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{y})\right]}{\max\limits_{(\beta,\sigma^2)in\,\Omega}\left[L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{y})\right]}=\frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})}$$

حيث يتم اعطاء مساحة العينة $\Omega$و$W$ من قبل:

$$\Omega=\left\{(\underline{\beta},\sigma^2):\underline{\beta}\in E_p,\sigma^2>0\right\}$$
$$W=\left\{(\underline{\beta},\sigma^2):\underline{\beta}\in E_p,\ H\underline{\beta}=\underline{h},\quad\sigma^2>0\right\}$$

القاسم في *K(y)* هي دالة الأمكان الأعظم التي تعطي اعلى قيمة للمعالم $\underline{\beta}$ و $\sigma^2$.

البسط في *K(y)* هي دالة الأمكان الأعظم تعويضية لقيود $H\underline{\beta}=\underline{h}$في دالة الأحتمال

$$L(\underline{\beta},\sigma^2;\underline{y})=(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}Exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(\underline{y}-x\underline{\beta})'(\underline{y}-x\underline{\beta})\right],$$

$$L(\hat{\Omega})=(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2\Omega)^{-n/2}Exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}^2\Omega}(\underline{y}-x\underline{\hat{\beta}})'(\underline{y}-x\underline{\hat{\beta}})\right]\quad but\ \ \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}(\underline{y}-x\underline{\hat{\beta}})'(\underline{y}-x\underline{\hat{\beta}})$$

$$L(\hat{\Omega})=(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2\Omega)^{-n/2}Exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}\Omega}(n\hat{\sigma}^2\Omega)\right]$$

$$L(\hat{\Omega})=(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2\Omega)^{-n/2}e^{-n/2}$$

الأن نفرض $\underline{b}$ هو مقدار لـ( $\underline{\beta}$ ) و $W$

$$L(\hat{W}) = (2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2 w)^{-n/2} Exp\left[-\frac{1}{2\hat{\sigma}w}(\underline{y} - x\underline{b})'(\underline{y} - x\underline{b})\right]$$

$$where \quad \hat{\sigma}^2 w = \frac{1}{n}(\underline{y} - x\underline{b})'(\underline{y} - x\underline{b})$$

$$K(y) = \frac{L(\hat{W})}{L(\hat{\Omega})} = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2 w)^{-n/2} e^{-n/2}}{(2\pi)^{-n/2}(\hat{\sigma}^2 \Omega)^{-n/2} e^{-n/2}}$$

$$[K(y)]^{-2/n} - 1 = \frac{\hat{\sigma}^2 w - \hat{\sigma}^2 \Omega}{\hat{\sigma}^2 \Omega}$$

نفرض G تكون $[(p-q)\times p]$ مصفوفة من رتبة $(p-q)$ ، $0<q<p$، حيث G متعامد على H و p هو عدد العاملات في النموذج، q هو عدد القيود في المعاملات، $(p-q)$ هو عدد غير مقيد من المعاملات.

نفرض بان $(q\times p)$ مصفوفة وتقسيمها على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} H_{(q\times p)} \\ G_{(p-q)\times p} \end{bmatrix}$$

نكتب $\underline{y} = x\underline{\beta} + \underline{e}$

عندما $H_0 : H\underline{\beta} = \underline{h}$ ، فان النموذج يصبح:

$$W = \frac{\left(\frac{1}{q}\right)\underline{z}'[x(x'x)^{-1}x' - B(B'B)^{-1}B']\underline{z}}{\left(\frac{1}{n-p}\right)\underline{z}'(I - x(x'x)^{-1}x')\underline{z}} = \frac{\left(\frac{1}{q}\right)\underline{z}'A_3\underline{z}}{\left(\frac{1}{n-p}\right)\underline{z}'A_1\underline{z}} = \frac{\frac{1}{q}u_3}{\frac{1}{n-p}u_1}$$

هناك تركيب خطي بين $\underline{z}$ و $\underline{y}$ ومن ثم $\underline{z}$ يتم توزيعه $\underline{y}$ بشكل طبيعي مع المتوسط والتباين.

$$E(\underline{z}) = E(\underline{y} - x\overline{H}\,\underline{h}) = E(\underline{y}) - x\overline{H}\,\underline{h} = x\underline{\beta} - x\overline{H}\,\underline{h}$$

$$\mathrm{var}(\underline{z}) = \mathrm{var}(\underline{y} - x\overline{H}\,\underline{h}) = \mathrm{var}(\underline{y}) = \sigma^2 I$$

$$\underline{z} \sim N(x\underline{\beta} - x\overline{H}\,\underline{h}, \sigma^2 I)$$

نلاحظ بان $\underline{z}'[x(x'x)^{-1}x' - B(B'B)^{-1}B']\underline{z}$ و $(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})$ هي نفس النتيجة التي هي $\underline{z}'(H\overline{x})'(H\overline{x})\underline{z}$ ثم $\underline{z}'[x(x'x)^{-1}x' - B(B'B)^{-1}B']\underline{z} = (H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})$ ثم

$$W = \frac{(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})'[H(x'x)^{-1}H']^{-1}(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h})}{\underline{y}'[I - x\overline{x}]\underline{y}}\left(\frac{n-p}{q}\right)$$

$$W \sim F_{(q,n-p,\lambda)}$$

وهذا يعني $\underline{y}'[I - x\bar{x}]\underline{y}$ و $\left(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}\right)'\left[H(x'x)^{-1}H'\right]^{-1}\left(H\hat{\underline{\beta}} - \underline{h}\right)$ تكون مستقلة.

**١. باستخدام النموذج $e^x$:**

نفرض النموذج الخطي $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1^2 + e$ باختبار الفرضيات التالية:

$$H_0 : \beta_3 = 0,\quad H_0 : \beta_1 = \beta_2,\quad H_0 : \beta_1 - \beta_2 + \beta_3 = 0,\quad H_0 : 2\beta_1 - 2\beta_2 + 3\beta_3 = 0$$

حيث $y' = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 9 & 3 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$$x' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix},\quad \underline{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad \underline{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$$

$$x'x = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},\quad (x'x)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/6 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 1/6 & 1/6 \\ -1/2 & 0 & 1/6 & 3/4 \end{bmatrix},\quad x'\underline{y} = \begin{bmatrix} 42 \\ 4 \\ 38 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta}'_\Omega = \begin{bmatrix} 11/3 & 1 & 3 & 11/6 \end{bmatrix}$$

$$SST = \underline{y}'\underline{y} = 316,\quad SSR = \hat{\underline{\beta}}'x'\underline{y} = 312.33$$

$$SSE = SST - SSR = \underline{y}'\underline{y} - \hat{\underline{\beta}}'x'\underline{y} = 3.67$$

$$MSE = S^2 = \frac{SSE}{n-p} = \frac{3.67}{3} = 1.22 = \hat{\sigma}^2_\Omega$$

$$MSR = \frac{SSR}{p} = \frac{312.33}{4} = 78.08$$

$$\hat{y} = \frac{11}{3} + x_1 + 3x_2 + \frac{11}{6}x_1^2 \qquad predicate\ \ \mathrm{mod}\,el$$

$$F = 4.97$$

$$F_{(q,n-p,\alpha)} = F_{(2,3,0.05)} = 9.55$$

علينا ان نقبل $H_0$، ثم النموذج هو $y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + e$ :

باستخدام المعادلات التالية:

$$\hat{\beta}_w = \hat{\beta}_\Omega - (x'x)^{-1}H\left[H(x'x)^{-1}H'\right]^{-1}\left(x\underline{\hat{\beta}_\Omega} - \underline{h}\right)$$

$$\hat{\sigma}_w^2 = \hat{\sigma}_\Omega^2 + \frac{1}{q}\left(x\underline{\hat{\beta}_\Omega} - \underline{h}\right)'\left[H(x'x)^{-1}H'\right]^{-1}\left(x\underline{\hat{\beta}_\Omega} - \underline{h}\right)$$

$$F = \left(\frac{\hat{\sigma}_w^2 - \hat{\sigma}_\Omega^2}{\hat{\sigma}_\Omega^2}\right)\left(\frac{n-p}{q}\right)$$

**٢. باستخدام النموذج الخطي :**

النموذج الأصلي $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 + e$

لكن $\beta_3 = 0$ و $\beta_1 = \beta_2$ ولأن نقبل $H_0$ ، ثم $y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + e$

$z = x_1 + x_2,\ \beta_1 = \alpha_1,\ \beta_0 = \alpha_0$ ثم النموذج يصبح $y = \alpha_0 + \alpha_1 z + e$

$$z' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ z'z = \frac{1}{82}\begin{bmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 7 \end{bmatrix},\ z'y = \begin{bmatrix} 42 \\ 42 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\alpha} = (z'z)^{-1}z'y = \frac{12}{41}\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 210/41 \\ 84/41 \end{bmatrix}$$

$$SST = y'y = 316,\ SSR = \hat{\alpha}z'y' = 301.17,\ SSE = 14.83,\ p = 2,\ n = 7,\ q = 2$$

$$MSE = S^2 = \frac{SSE}{n-p-q} = \frac{14.83}{3} = 4.94 = \hat{\sigma}_w^2$$

$$F = 4.56$$

$$F_{(q,n-p,0.05)} = F_{(2,3,0.05)} = 9.55$$

الجدوليةF < المحسوبةF

$\therefore$ نقبل فرضية $H_0$

وبالتالي فان النموذج يكون أكثر قبولا $y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + x_2) + e$

**٣. باستخدام النموذج اللوغارتمي:**

$$x'x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 11 & 0 \\ 1 & 0 & 12 & 1 & 9 \\ 3 & 17 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 7 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$F=7.23$

Fالجدولية > Fالمحسوبة

∴ نقبل فرضية $H_0$

## الأستنتاجات:

١. النموذج الخطي لهذه البيانات كانت اقل F هو يكون النموذج الذي بني بهذه البيانات وهو خطي يكون ملائم لهذه البيانات حصرا.
٢. بالنظر إلى النماذج السابقة (الخطية-الآسية-اللوغارتمية) نجد إن باختبارات الـF إن نموذج الخطي لهذه البيانات يكون أصلح .
٣. وان بناء النموذج حسب طبيعة البيانات قد تكون متفاوتة حسب ملائمة النماذج السابقة وطبيعة البيانات لو كانت البيانات اقتصادية ويراد بناء نماذج لهذه البيانات نعتقد باختلاف النتائج.
٤. ان بقية النماذج الخطية واللوغارتمية ايضا قد تكون ملائمة لبناء نماذج لهذه البيانات.

## المقترحات:

١. أعتماد النماذج الغير خطية اذا كانت البيانات اقتصادية.
٢. ايجاد اكثر من اختبار في المستقبل للختيار من ناحية الأفضلية للنماذج وهذا ماسوف نقوم بدراستة مستقبلا.

## المصادر

١. عدنان غانم، مطانيوس مخول، السنة الثالثة "مبادئ الإحصاء" جامعة دمشق ٢٠٠٥-٢٠٠٦

٢. د. نعيم ثاني المحمد، د. خاشع محمود الراوي، د. مؤيد احمد يونس، د.وليد خضير المراني "مبادئ الإحصاء" جامعة بغداد لسنة ١٩٨٦

٣. د. خاشع محمود الراوي "مدخل الى الأحصاء" لسنة ١٩٨٤

٤. امير حنا هرمز "الأحصاء الرياضي" لسنة ١٩٨٥

5. Graybill F. A. "theory and application of the linear model" 1988, john wiley and sons.
6. GARY W. HEIMAN "Basic statistics for the behavioral sciences" 2003.
7. Robert V. Hogg, Allen T. Graig "Introduction to Mathematical statistics" 1970.