دراسة مقارنة بين طريقة بيز وطريقة تعظيم دالة التوزيع اللاحق لتقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات

Using Simulation to Compare between Bayes and Maximum A Posteriori Methods to Estimate the Four–Parameter Weibull Growth Model

أ. م. د. باسم شليبه مسلم **أ. م. د. سيف الدين هاشم قمر**

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

١. مقدمة Introduction

تصف نماذج منحنيات النمو الزيادة في الوزن أو الارتفاع أو الطول أو غيرها بحسب نوع الظاهرة المدروسة قياساً بالزمن، وتختلف تلك النماذج وفقاً لشكل المنحنى وعدد المعلمات التي يتشكل منها، ومن أهمها نماذج نمو ويبل (Weibull Growth Models) ذات المعلمة الواحدة والمعلمتين والثلاث معلمات والأربع معلمات، ويُعد الإنموذج الأخير المفضل لدى أغلب الباحثين عند دراسة النمو للظواهر التي تتناسب مع اتجاه نمو المنحنى، واعتماداً على ذلك فقد ركزت هذه الدراسة على إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات ليُستهدف في التقدير وفقاً للطرائق المستخدمة وهي طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز وطريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي. وقد تناول الكثير من الباحثين نماذج منحنيات النمو بإسهاب وتفصيل لدراسة خصائصها وتطبيقاتها ومزاياها وكذلك عيوبها، فقد قدم (Shafii, B. et al) عام 1991 دراسةً تناول فيها بعض منحنيات النمو والتي من بينها منحنى ويبل، إذ تم توفيق تلك المنحنيات كنماذج رياضية وتجريبية لتمثيل عملية الإنبات التراكمي لبذور البصل من خلال تجنب القيود المرتبطة بطريقة العزوم Moment، ولقد قدمت النماذج المختلفة وصفاً عالياً لمسار الإنبات وبرز إنموذج ويبل ذو الأربع معلمات كأفضل تلك النماذج لتوفيقه

المعلمات عبر مجموعة متنوعة من أنواع البذور وظروف الإنبات المختلفة.

كما عرض (Fekedulegn, D. et al) عام 1999 مشتقات جزئية لبعض نماذج النمو غير الخطية والتي من بينها أنموذج ويبل، وتم تمثيل تلك المشتقات الجزئية في تقدير معلمات النماذج المختلفة باستخدام طريقة ماركاردت التكرارية للانحدار غير الخطية
Marquardt iterative method of nonlinear regression للحصول على أعلى ارتفاع بحسب العمر لشجرة الراتينجية النرويجية (Picea abies L)، وتم تحديد مجموعة من الصيغ التي توفر قيم أولية جيدة للمعلمات، ووجد أن إعطاء قيم أولية مناسبة لمعلمات النماذج غير الخطية في سياق النظام الذي يجري نمذجته ذات أهمية حاسمة في عملية تقدير المعلمات.

وهدفت دراسة (V.G. Narushin and C. Takma) عام 2003 لاختيار أفضل إنموذج تنبؤي لوصف معدل نمو وزن وكتلة البيضة للدجاج الأبيض التجاري البياض خلال الفترة الإنتاجية، وقد تم مقارنة إنموذج Narushin–Takma مع نماذج نمو مختلفة من بينها إنموذج نمو ويبل ، وقد أظهرت الدراسة أن النماذج الأخرى كانت ذا دقة عالية ومتقاربة وأن إنموذج ويبل كان الأعلى دقة مقارنة بالنماذج الأخرى فيما يتعلق بدراسة نمو وزن البيض، وأن إنموذج نمو اللوجستك منحني الأضلاع logistic–curvilinear كان الأفضل فيما يتعلق بدراسة نمو كتلة البيض.

وفي عام 2005 قدم (Mohammad Tabatabai at el) دراسة تناولت تطبيق نماذج اللوجستك وجومبرتز وريتشاردز وويبل على دراسات طبية وإحيائية، إذ أن هذه النماذج الرياضية تصف حركية النمو وهي مهمة جدا للتنبؤ بالعديد من الظواهر البيولوجية مثل حجم الورم، وسرعة تطور المرض، وتحديد جدول الإشعاع الأمثل و / أو العلاج الكيميائي، إذ استعملت طريقة نيوتن رافسن التكرارية لتقدير المعلمات بعد تطبيق مبدأ تصغير مجموع مربعات البواقي بافتراض أن الأخطاء العشوائية مستقلة وتتوزع توزيعاً طبيعياً، وخلصت الدراسة إلى أن تلك النماذج يمكن أن تكون أداة تنبؤية قيمة في العديد من مجالات البحوث الطبية الحيوية والوبائية مثل السرطان أو نمو الخلايا الجذعية وتفشي الأمراض المعدية.

وهنالك دراسة قدمها (Denis Cousineau and Sebastien Helie) عام 2013 استعمل برنامج تعليمي وصف فيه تقنية تقدير المعلمات باستخدام طريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي Maximum A Posteriori

بالاعتماد على المنوال Mode للتوزيع البعدي، وتمت مناقشة العلاقة بين طريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي وطريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز من خلال عرض المحاكاة النموذجية باستخدام توزيع ويبل. وتبين أن المقدرات باستعمال المنوال يعطي نتائج أقل تحيزاً وأعلى موثوقيةً للمعلمات المقدرة مقارنةً بالمتوسط Mean أو الوسيط Median للتوزيع البعدي. كما توصل إلى أفضلية تقليل قيم معلمتي الشكل والمقياس لتوزيع ويبل عند استخدام توزيع جاوس Gaussian كتوزيع قبلي وذلك للتعويض عن التحيز الكامن في طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز، كما ناقش البرنامج المزايا والقيود لطريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي.

وقارنت دراسة (A. O. Raji1 at el) عام 2014بين سبعة نماذج نمو باستخدام قياسات وزن الجسم لـ 300 سلالة تم الحصول عليها من آباء محددين تمثل طائر السمان الياباني Japanese quail التي تعيش في نيجيريا، وأجريت الدراسة التي استمرت لمدة 20 أسبوعاً في مزرعة جامعة مايدوجوري Maiduguri، إذ أعطى إنموذج ويبل أعلى قيمة لمعامل التحديد. R^2 مقارنةً ببقية النماذج، بينما أعطى أقل قيمة لكل من الانحراف المعياري SD و AIC (Akaikes Information Criterion).

وهدفت دراسة (A. O. Raji1 at el) عام 2014لمناقشة بعض الخصائص لثلاثة نماذج نمو ويبل ذات المعلمتين والثلاث والأربع معلمات وتطبيقها على أشجار الغابات، وتم تقدير معلمات هذه النماذج باستخدام طريقة نيوتن–رافسون لمتوسط قطر بيانات ارتفاع المقدمة وبيانات نمو ارتفاع القمة لشجرة الراتينجية النرويجية. كما تم استخدام متوسط ارتفاع 12 شجرة كرز هيغان Higan المزروعة في واشنطن العاصمة، وتوصلت الدراسة إلى أن إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات هو الأفضل توفيقاً لنمو أشجار الغابات.

Abstract

Using Simulation to Compare between Bayes and Maximum A Posteriori Methods to Estimate the Four-Parameter Weibull Growth Model

The Weibull growth model is an important model especially for

describe the growth in stability, therefore in this paper, two methods Bayes and Maximum A Posteriori for estimating the four-parameter Weibull growth model has been presented and compared between these methods. To achieve this aim it is necessary to use a simulation technique to generate the samples and perform the required comparisons, using varying sample sizes (10, 15, 20, 25 and 30) and models depending on the standard deviation (0.5). It has been shown from the computational results which gives the best estimates is Bayes method.

١-١ هدف البحث:

مما تقدم يلاحظ أن التقدير لمعلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات اختلف وفقاً لاسلوب التقدير الذي غالباً ما تكتنفه الصعوبة والتعقيد كونه انموذج غير خطي، لذا جاء هدف البحث لعرض إنموذج نمو ويبل على وفق صيغته ذو الأربع معلمات كإنموذج من نماذج النمو الملتوية التماثل (Sigmoidal)، وتم توظيفه لمقارنة تقديرات معلمات الإنموذج باستخدام طريقتي بيز وتعظيم دالة التوزيع البعدي، ولتحقيق ذلك فقد اعتمد البحث أسلوب المحاكاة للتوصل للنتائج، وتبين أن طريقة بيز هي الأفضل قياساً بالطريقة الأخرى. ولغرض تحقيق هدف البحث فقد تم تقسيمه إلى **ستة** مباحث: تناول المبحث الأول مقدمة ضمت استعراض تاريخي بسيط للموضوع مع توضيح هدف ومنهجية البحث، فيما عرض المبحث الثاني الجانب النظري الذي تضمن تعريف لإنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات والطرائق المستعملة لتقدير معلماته، وخُصص المبحث الثالث للجانب التجريبي المتضمن وصف تجربة المحاكاة، فيما تناول المبحث الرابع مناقشة نتائج البحث، وعرض المبحث الخامس والسادس الاستنتاجات وأهم التوصيات المقترحة.

٢. الجانب النظري:

٢-١ إنموذج نمو ويبل Weibull growth model

يندرج إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات ضمن النماذج غير الخطية، وبالتالي فإن عملية التعامل معه لا تخلوا من التعقيد الذي

يصاحب تلك النماذج، ويمكن أن يأخذ هذا الإنموذج الشكل الآتي (Fekedulegn, D. at el, 1999):

$$\omega(t) = \beta_0 - \beta_1 \exp(-\beta_2 t^{\beta_3}) + \varepsilon \quad (1)$$

إذ أن:

$\omega(t)$ تمثل حجم النمو عند الزمن t .

β_0 تمثل حجم النمو الأعظم أي عند $t \to \infty$

β_1 معلمة المقياس scale وترتبط بالقيمة الأولية.

β_2 تمثل معدل النمو النسبي.

β_3 تمثل معلمة الشكل shape.

ε يمثل حد الخطأ العشوائي.

وأن جميع المعلمات تكون أكبر من الصفر في التطبيقات البيولوجية، فضلاً عن $\beta_1 < \beta_0$.

ويُعد الإنموذج من نماذج النمو الملتوية التماثل عندما تكون $\beta_3 > 1$ وفيما عدا ذلك فلا توجد نقطة انقلاب (U. P. Grosjean, 2001, pp. 157-163)، وكأي إنموذج نمو ملتوي يكون له جزء يتزايد فيه شكل منحنى الإنموذج بزيادة متزايدة ثم ينقلب عند نقطة محددة إلى الزيادة المتناقصة، مما يولد شكلاً ملتوياً يتماثل فيه جزئي المنحنى بدرجة كبيرة، أما في تحليلات النمو البيولوجي فتكون β_2 و β_3 موجبة دائماً (Dimpal Jyoti Mahanta and Munindra Borah, 2014).

ويمكن إعادة صياغة إنموذج ويبل الموضح في المعادلة (1) بصيغة الانحدار كالآتي:

$$\omega(t_i) = f(t_i;\beta) + \varepsilon_i \quad (2)$$

حيث أن $f(t_i;\beta) = \beta_0 - \beta_1 \exp(-\beta_2 t_i^{\beta_3})$ تمثل دالة الاستجابة غير الخطية الموضحة في الصيغة (1)، وأن $\omega(t_i)$ متغير الاستجابة للمشاهدة (i)، علماً أن i=1, 2, …, n.

وبافتراض أن الأخطاء العشوائية غير مرتبطة وتمتلك توزيعاً متعدد المتغيرات

الطبيعي (Multivariate Normal) أي ($\varepsilon \sim MVN(0, \sigma^2 I_n)$). وباستخدام مفكوك سلسلة تايلر للاستجابة غير الخطية $f(t_i;\beta)$ الموضحة في الصيغة (2) (Sohn, J. K. and Kang, S. G., 1996)، واختصار هذا المفكوك عند المشتقة الأولى ينتج:

$$f(t_i;\beta) = f(t_i;\beta^{(0)}) + \sum_{j=1}^{4}\left[\frac{\partial f(t_i;\beta)}{\partial \beta_j}\right]_{\beta=\beta^{(0)}} (\beta_j - \beta_j^{(0)})$$

(3)

وبافتراض أن $f_i^{(0)} = f(t_i;\beta^{(0)})$ و $\theta_j^{(0)} = \beta_j - \beta_j^{(0)}$ ، وأن: $Z_{ij}^{(0)} = \left[\frac{\partial f(t_i;\beta)}{\partial \beta_j}\right]_{\beta=\beta^{(0)}}$

وبالتعويض عن الصيغة (3) باستخدام الرموز المفترضة أعلاه في الإنموذج المعطى في الصيغة (2) نحصل على الآتي:

$$\omega(t_i) = f_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{4} Z_{ij}^{(0)} \theta_j^{(0)} + \varepsilon_i$$

ومنه يمكن الحصول على:

$$\omega(t_i) - f_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{4} Z_{ij}^{(0)} \theta_j^{(0)} + \varepsilon_i$$

(4)

والصيغة (4) هي صيغة خطية يمكن كتابتها بصيغة المصفوفات كالآتي:

$$\omega^*(t) = Z^{(0)}\theta^{(0)} + \varepsilon$$

(5)

إذ أن:

$\omega^*(t)$: متجه من مرتبة $(n\times1)$ لمتغير الاستجابة ($\omega^*(t) = \omega(t) - f^{(0)}$)

$Z^{(0)}$: مصفوفة من مرتبة $(n\times4)$ للمتغيرات التوضيحية .

$\theta^{(0)}$: متجه المعلمات المجهولة من مرتبة (4×1).

ε : متجه الأخطاء العشوائية من مرتبة $(n\times1)$، إذ أن $\varepsilon \sim MVN(0, \sigma^2 I_n)$

٢-٢ طريقة بيز Bayes Method

بالاعتماد على الصيغة (5) يمكن إيجاد الدالة المشتركة للمتغيرات $\omega^*(t)$ (دالة الإمكان الأعظم) كالآتي:

$$L\left(\omega^*(t), Z^{(0)}, \theta^{(0)}\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\omega^*(t) - Z^{(0)}\theta^{(0)}\right)'\left(\omega^*(t) - Z^{(0)}\theta^{(0)}\right)\right]\right\} \quad (6)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي والاشتقاق الجزئي لمتجه المعلمات وحل المعادلات بعد مساوة المشتقات الجزئية للصفر نحصل على صيغة التقدير الآتية:

$$\hat{\theta}^{(0)} = (Z^{(0)'} Z^{(0)})^{-1} Z^{(0)'} \omega^*(t) \quad (7)$$

والرموز تم تعريفها سابقاً.

والمعادلة (7) تمثل صيغة تقدير الإمكان الأعظم (MLE) للمعلمات (θ) والتي تكون مكافئة لصيغة تقدير المربعات الصغرى (LS) [*]، وبالتالي فإن التقدير على وفق الصيغة (7) يُضاف إلى التقدير الأولي للحصول على تقدير MLE لمعلمات الإنموذج غير الخطي المتعدد الموضح في الصيغة (2) بالنسبة لمتجه المعلمات (β)، وبالاعتماد على عملية التكرار يتم استخراج التقدير النهائي للمعلمات باستخدام طريقة الإمكان الأعظم والذي من الممكن أن يأخذ الرمز $(\hat{\beta}_{MLE})$.

وباستخدام أسلوب بيز يمكن تقدير معلمات الإنموذج الخطي الموضح في الصيغة (5)، فبالاعتماد على دالة الإمكان الموضحة في الصيغة (6) يمكن كتابة دالة الكثافة الاحتمالية لـ$(\omega^*(t))$ بشكل تناسبي كالآتي:

$$L\left(\omega^*(t)/\theta, \sigma\right) \propto \frac{1}{\sigma^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[v\hat{\sigma}^2 + \left(\theta - \hat{\theta}\right)' Z' Z\left(\theta - \hat{\theta}\right)\right]\right\}$$

(*) تم الاعتماد في هذا البحث على الدالة nlm باستعمال لغة R للحصول على تقديرات الإمكان الأعظم للمعلمات والتي تمثل تقدير المربعات الصغرى (LS) نفسها باستخدام طريقة نيوتن رافسن على وفق مبدأ تصغير مجموع مربعات الخطأ. (W. N. Venables and et al, 1999-2004, pp. 66-68)

(8)

إذ أن: $\hat{\sigma}^2 = \frac{\left(\omega^*(t) - Z\hat{\theta}\right)'\left(\omega^*(t) - Z\hat{\theta}\right)}{v}$, $\hat{\theta} = (Z'Z)^{-1}Z'\omega^*(t)$, $v = n - 4$

وللحصول على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية التي عن طريقها يُستخرج مقدر بيز يستوجب معرفة دالة الكثافة الاحتمالية القبلية، إذ تم اعتماد دالة كثافة احتمالية قبلية مرافقة طبيعية Natural Conjugate Prior Probability Density Function، وإن هذا النوع من التوزيعات القبلية يمتلك دالة كثافة احتمالية ملائمة تُفترض بالاعتماد على المعلومات المتوافرة حول المعلمات المراد تقديرها، (Judje, G. G. at el, 1980, p. 97).

بافتراض إنموذج الانحدار الخطي المتعدد الموضح في الصيغة (5) وعندما نمتلك معلومات نظرية متواضعة حول معلمة الانحراف المعياري (σ) والمتمثلة بالحدود الدنيا والعليا، من هنا يمكن استخدام القاعدة الثانية المقترحة من قبل الباحث (Jeffery) وبمجال مقيد للمعلمة (σ) أي سيكون لدينا التوزيع الآتي (Halpern, E. F., 1973):

$$f(\sigma) \propto \frac{1}{\sigma} \quad , \quad \sigma > 0$$

(9)

ومتجه المعلمات (θ) يتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات (Multivariate normal)

$$f(\theta/\sigma) = \frac{1}{\sigma^4}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\theta - \bar{\theta}\right)' Q^{-1}\left(\theta - \bar{\theta}\right)\right]\right\} \quad , -\infty < \theta < \infty$$

(10)

ومن الصيغتين (9) و (10) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية القبلية المشتركة للمعلمات (θ, σ) وهي:

$$f(\theta/\sigma) = \frac{1}{\sigma^5}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(\theta - \bar{\theta}\right)' Q^{-1}\left(\theta - \bar{\theta}\right)\right]\right\}$$

(11)

وبتوظيف الصيغة (11) مع دالة الإمكان الموضحة بحسب الصيغة (6) نحصل على دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة للمعلمات (θ, σ) وهي:

$$f\left(\beta,\sigma/\omega^*(t)\right)\propto\frac{1}{\sigma^{(n+5)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(\theta-\bar{\theta})'Q^{-1}\left(\theta-\bar{\theta}\right)+\left(\omega^*(t)-Z\theta\right)'\left(\omega^*(t)-Z\theta\right)\right]\right\}$$

(12)

دالة الكثافة الاحتمالية البعدية المشتركة لمتجه المعلمات (θ) يمكن الحصول عليها؛ وذلك بأخذ التكامل على طرفي الصيغة (12) بالنسبة إلى حدود (σ) وهي:

$$f\left(\theta/\omega^*(t)\right)\propto\left[1+(\theta-E)'\,\frac{\theta^*}{M}(\theta-E)\right]^{-\frac{(n+4)}{2}}$$

(13)

إذ أن: $\theta^*=\left(Z'Z+Q^{-1}\right)\ ,\ M=\left(\omega^{*'}(t)\ \omega^*(t)+\bar{\theta}'Q^{-1}\ \bar{\theta}\right)-E'\ \theta^*\ E$

والصيغة (13) هي دالة كثافة احتمالية تمثل توزيع (t) متعدد المتغيرات بدرجة حرية (n) وبمتجه الأوساط (E) الذي يمثل تقدير بيز بالنسبة لمتجه المعلمات (θ) باعتماد دالة خسارة تربيعية أي:

$$E=\left(Z'Z+Q^{-1}\right)^{-1}\left(Q^{-1}\ \bar{\theta}+Z'\,\omega^*(t)\right)$$

(14)

تحدد قيم المتجه $(\bar{\theta})$ بالاعتماد على القيم الافتراضية لمعلمات المتجه (θ)، أما قيم المصفوفة (Q) فتكون كالآتي:

$$\sigma^2Q=\sigma^2\left(Z'Z\right)^{-1}$$

التقدير وفق الصيغة (14) يُضاف إلى التقدير الأولي ليتم الحصول على تقدير بيز للإنموذج غير الخطي المتعدد الموضح في الصيغة (2) بالنسبة لمتجه المعلمات (β) باعتماد دالة خسارة تربيعية، وبالاعتماد على عملية التكرار نصل إلى التقدير النهائي للمعلمات والذي يُرمز له $\left(\hat{\beta}_{BAY}\right)$.

٢-٣ طريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي Maximum a Posteriori MAP Method

تُعد هذه الطريقة شكل من أشكال تقدير بيز الذي يعتمد على إيجاد التوزيع البعدي لمعلمات الإنموذج المحدد المتمثل بالصيغة (5) باختلاف أن هذه الطريقة تعتمد على البيانات بدلا من المتوسط في إيجاد التقدير وبافتراض أن σ معلومة، وكالآتي:

$$f(\theta/\omega^{*}(t),\sigma)=\frac{L\left(\omega^{*}(t)/\theta,\sigma\right)f(\theta/\sigma)}{f(\omega^{*}(t))}$$

إذ أن:

$f(\theta/\sigma`)$: التوزيع القبلي للمعلمات (θ) بمعلومية σ ولا يحتوي على أي قيمة من $\omega^{*}(t)$.

$L(\omega^{*}(t)/\theta,\sigma)$: دالة الإمكان.

$f(\omega^{*}(t))$: دالة التوزيع الاحتمالي للبيانات وهو مستقل عن (θ) وتستخرج كالآتي:

$$f(\omega^{*}(t))=\int L(\omega^{*}(t)/\theta,\sigma)\,f(\theta/\sigma)\,d\theta$$

ويتم الحصول على تقدير MAP بتبسيط الصيغة (15) كالآتي (Denis Cousineau and Sebastien Helie, 2013):

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_{MAP}&=\operatorname{org}\underset{\theta}{Max}\,f(\theta/\omega^{*}(t),\sigma)\\&=\operatorname{org}\underset{\theta}{Max}\left\{\log L(\omega^{*}(t)/\theta,\sigma)+\log f(\theta/\sigma)-\log f(\omega^{*}(t))\right\}\\&=\operatorname{org}\underset{\theta}{Max}\left\{\log L(\omega^{*}(t)/\theta,\sigma)+\log f(\theta/\sigma)\right\}\end{aligned}$$

$$\hat{\theta}_{MAP}=\operatorname{org}\underset{\theta}{Max}\left\{\pm\log f(\theta/\sigma)-\frac{n}{2}\log\left(2\pi\sigma^{2}\right)-\frac{\left(\omega^{*}(t)-Z\hat{\theta}\right)'\left(\omega^{*}(t)-Z\hat{\theta}\right)}{2\sigma^{2}}\right\}$$

$$\hat{\theta}_{MAP}=\operatorname{org}\underset{\theta}{Min}\left\{\pm\log f(\theta/\sigma)+\frac{n}{2}\log\left(2\pi\sigma^{2}\right)-\frac{\left(\omega^{*}(t)-Z\hat{\theta}\right)'\left(\omega^{*}(t)-Z\hat{\theta}\right)}{2\sigma^{2}}\right\}$$

(16)

الصيغة (16) هي صيغة مكافئة لطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية بعد إضافة التوزيع الأولي. التقدير وفق الصيغة (16) يُضاف إلى التقدير الأولي للحصول على تقدير MAP لمعلمات الإنموذج غير الخطي المتعدد الموضح في الصيغة (2) بالنسبة لمتجه المعلمات (β)، وبالاعتماد على عملية التكرار يتم استخراج التقدير النهائي للمعلمات والذي من الممكن أن يأخذ الرمز $(\hat{\beta}_{MAP})$. وعلى الرغم من أن تقديرات طريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي MAP تعطي تباينات أكبر من تقديرات بيز بشكل عام، إلا إنها تتميز بسهولتها في التعامل مع نماذج النمو غير الخطية متعددة المعلمات، إذ لا تُشترط الحصول على التوزيع البعدي بصيغته الكاملة وإنما تكتفي بصيغته المقربة، مما ينسحب باتجاه عدم ضرورة إجراء التكامل العددي.

٣. الجانب التجريبي

تم إعداد برنامج خاص باستخدام لغة R للحصول على نتائج البحث، إذ تم توليد بيانات بحجم تكرار (1000) تجربة تمثل الأخطاء العشوائية بالاعتماد على طريقة ميرسن – تويستر (Mersenne–Twister) لإجراء المحاكاة، وتم توليد أخطاء عشوائية تتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي صفر وانحراف معياري (0.5) لمحاكاة بيانات انتاج النفط في العراق للمدة من سنة 2003 إلى سنة 2015 (منظمة الأقطار العربية المصدرة للبترول اوابك، 2003–2015) ، وفق خمس تجارب اعتماداً على طريقة إيجاد القيم الأولية التي افترضها (Dimpal Jyoti Mahanta and Munindra Borah, 2014) وكما مبين في جدول (١).

جدول (١) القيم الافتراضية لمعلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات

Experiment		1	2	3	4	5
Parameter	$\square_0$	3500	4000	4500	5000	5500
	$\square_1$	2122	2622	3122	3048	3548
	$\square_2$	0.050	0.044	0.039	0.034	0.031
	$\square_3$	1.394	1.313	1.258	0.803	0.766
n		10	15	20	25	30

المصدر: من إعداد الباحثان.

٤. النتائج

تمت مقارنة نتائج تقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات باستخدام الطريقتين (بيز BAY، تعظيم دالة التوزيع البعدي MAP)، ويبين الجدول (٢) قيم المعلمات المقدرة، كما يوضح الجدولين (٣) و (٤) نتائج المقارنة بين الطريقتين بالاعتماد على حساب مقدار متوسط مربعات الخطأ MSE للإنموذج المقدر وحساب الانحراف الكلي Total Deviation (TD) للمعلمات المقدرة وفق الصيغة:

$$TD = \left|\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\beta_0}\right| + \left|\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\beta_1}\right| + \left|\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{\beta_2}\right| + \left|\frac{\hat{\beta}_3 - \beta_3}{\beta_3}\right| \quad (17)$$

وأن □ تمثل المعلمة المفترضة، و $\hat{\beta}$ المعلمة المقدرة باستخدام إحدى الطريقتين المعروضين في البحث.

جدول (٢) تقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات باستخدام الطريقتين

Method	**Parameter**	**Experiment**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
BAY	$\square_0$	3499.81	3999.85	4500.02	4999.89	5499.94
	$\square_1$	2121.82	2621.82	3122.04	3621.88	4121.90
	$\square_2$	0.050	0.044	0.0390	0.035	0.032
	$\square_3$	1.394	1.313	1.258	1.218	1.188
MAP	$\square_0$	3499.61	3999.57	4499.38	4999.50	5499.45
	$\square_1$	2122.62	2622.64	3122.44	3622.60	4122.55
	$\square_2$	0.050	0.044	0.039	0.035	0.032
	$\square_3$	1.3938	1.3127	1.2578	1.2178	1.1878

المصدر: من إعداد الباحث.

جدول (٣) حساب متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات

Experiment	**BAY**	**MAP**	**Best Method**
1	0.1885	1.6294	**BAY**
2	0.1554	2.1596	**BAY**
3	0.4399	2.1018	**BAY**
4	0.2280	2.4300	**BAY**
5	0.2588	2.2601	**BAY**

المصدر: من إعداد الباحث.

جدول (٤) حساب الانحراف الكلي TD لتقدير معلمات إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات

Experiment	BAY	MAP	Best Method
1	0.0001	0.0006	BAY
2	0.0001	0.0006	BAY
3	0.0000	0.0004	BAY
4	0.0000	0.0004	BAY
5	0.0000	0.0004	BAY

المصدر: من إعداد الباحث.

٥. الاستنتاجات

١) أظهرت النتائج التجريبية أن طريقة بيز أفضل من طريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي اعتماداً على حساب متوسط مربعات الخطأ MSE لأنموذج ويبل المقدر وحساب الانحراف الكلي TD للمعلمات المقدرة للإنموذج.

٢) تتميز طريقة تعظيم دالة التوزيع البعدي بسهولتها في التعامل مع نماذج النمو غير الخطية متعددة المعلمات ومنها إنموذج نمو ويبل ذو الأربع معلمات، إذ لا تُشترط الحصول على التوزيع البعدي بصيغته الكاملة وإنما تكتفي بصيغته المقربة.

٦. التوصيات

١) توظيف طريقتي البحث (بيز وتعظيم دالة التوزيع البعدي) في الظواهر التطبيقية بشكل عام والاقتصادية منها بشكل خاص لغرض التنبؤ بتلك الظواهر في المستقبل البعيد والتي تُعد ميزة من مميزات نماذج النمو.

٢) استخدام دوال قبلية prior مختلفة للحصول على التقديرات باستخدام الطريقتين المذكورتين في البحث والمقارنة بينها.

المصادر

١- منظمة الأقطار العربية المصدرة للبترول اوابك، (2015-2003)، "التقرير الإحصائي السنوي"، منظمة الأقطار العربية المصدرة للبترول اوابك، آخر مشاهدة بتاريخ ٢٠١٧/٧/٢٩: http://oapecdbsys.oapecorg.org:8080/apex/f?p=101:4:10908515.981572.

2- A. O. Raji1, S. T. Mbap and J. Aliyu, (2014), “COMPARISON OF DIFFERENT MODELS TO DESCRIBE GROWTH OF THE JAPANESE QUAIL (COTURNIX JAPONICA)”, Trakia Journal of Sciences, 2, 182-188.

3- Denis Cousineau and Sebastien Helie, (2013), “Improving maximum likelihood estimation using prior probabilities: A tutorial on maximum a posteriori estimation and an examination of the weibull distribution”, Tutorials in Quantitative Methods for Psychology, 9 (2), 61-71.

4- Dimpal Jyoti Mahanta and Munindra Borah, (2014), “Parameter Estimation of Weibull Growth Models in Forestry”, International Journal of Mathematics Trends and Technology, 8 (3), 157-163.

5-Fekedulegn, D., Mac Siurtain, M.P. and Colbert, J.J., (1999), “Parameter estimation of nonlinear growth models in forestry”, Silva Fennica, 33(4), 327–336.

6- Halpern, E. F., (1973), “Polynomial regression from a Bayesian approach”, Journal of the American Statistical Association, 68(341), 137-143.

7- Judje, G. G., Griffiths, W. E., Hill, R. C. and Lee, T. C., (1980), “Theory and Practice of Econometrics”, New York: John Wiley & Sons.

8-Mohammad Tabatabai, David Keith Williams and Zoran Bursac, (2005), “Hyperbolastic growth models: theory and application”, Theoretical Biology and Medical Modelling, 2 (14), 1-13.

9- Shafii, B., Price, W.J., Swensen, J.B., Murray, G.A., (1991), "Nonlinear estimation of growth curve models for germination data analysis", The Third Conference on Applied Statistics in Agriculture, Kansas State University, Manhattan, KS, 19-42.

10- Sohn, J. K. and Kang, S. G., (1996), “Bayesian Estimation Procedure in Multiprocessor Non–Linear Dynamic Generalized Model”, Communications in Statistics: Theory and Method, Taylor & Francis Group, London, 25, 2281–2296.

11-U. P. Grosjean, (2001), “Growth model of the reared sea urchin Paracentrotus lividus (Lamarck, 1816),” Thesis submitted in fulfilment of the degree of Doctor, Agronomic Sciences and Biological Engineering.

12- V.G. Narushin and C. Takma, (2003), “Sigmoid Model for the Evaluation of Growth and Production Curves in Laying Hens”, Biosystems Engineering, 84 (3), 343–348.W. N.

13- Venables, D. M Smith and the R Development Core Team, (1999-2004), “An Introduction to R”, R Development Core Team.