متعددات حدود وينر-w للمسافة العرضية لمربعي درب و دارة ومكعب- m

علي عزيز علي   أسماء صلاح عزيز

كلية علوم الحاسبات والرياضيات
جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث٢٣ /٥ /٢٠٠٧   تاريخ قبول البحث ٢٨ /٦ /٢٠٠٧

ABSTRACT

Let G be a k_0-connected graph ,and let $d_w(u,v)$, $1 \le w \le k_0$,be the w-width distance between the two vertices u,v in G. The w-Wiener polynomial of the width distance of G is defined by:

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

The w-Wiener polynomials of the square of a path P_t^2, the square of a cycle C_t^2 ,and of an m-cube Q_m are obtained in this paper . The diameter with respect to the width distance –w ,and the Wiener index for each such graphs are also obtained .

الملخص

ليكن G بيانا متصلاً عامل اتصاله k_0 وأن $1 \le w \le k_0$، وأن $d_w(u,v)$ هي المسافة العرضية-w بين الرأسين u وv في G . تُعرف متعــددة حــدود وينــر –w نــسبة للمــسافة العرضية-w على أنها

$$W_w(G;x) = \sum_{u,v \in V(G)} x^{d_w(u,v)}$$

تضمن هذا البحث إيجاد متعددة حدود وينر –w نسبة إلى المسافة العرضية –w لكل من مربع درب P_t^2، ومربع دارة C_t^2، ومكعب –m ، كما تضمن البحث إيجاد القطر بالنسبة إلى المسافة العرضية-w ، وإيجاد دليل لكل من هذه البيانات .

1.المقدمة

ليكن u وv أي رأسين في بيان متصل G، تعرف **حاوية u وv** على أنها مجموعة دروب منفصلة داخليا تصل بين u وv ، ويرمز لها بـــ C(u,v).

يعرف **عرض(width)** الحاوية C(u,v) على أنه عدد الدروب u-v في C(u,v) ويرمز له بـ w(C(u,v))، أي أن

$$w(C(u,v)) = |C(u,v)|$$

كما يعرف **طول الحاوية C(u,v)** على أنه الطول لأطول درب في الحاوية ويرمز له بـ $\mathbf{l}(C(u,v))$. وأخيرا لأجل عدد صحيح موجب w نعرف **المسافة العرضية** أو (المسافة-w) بين رأسين u وv في بيان G [7] على أنها

$$d_w(u,v|\,G) = \min_{C(u,v)} \mathbf{l}(C(u,v)) \qquad .....(1.1)$$

حيث أن الأصغر يؤخذ على كل الحاويات C(u,v) ذات العرض w. وعندما لا يكون هناك التباس فسوف نعبر عن المسافة العرضية بين u وv بـ $d_w(u,v)$.

من الواضح أنه عندما يكون $w=1$ فان المسافة-w تصبح المسافة الاعتيادية بين u وv. وفي بحثنا سنحاول دراسة المسافة-w عندما $w \geq 2$ أما الحد الأعلى لـ w فانه عامل الاتصال k_0 [3,4] للبيان G. أي أن $1 \leq w \leq k_0$، وسوف نستبعد حالة كون w=1 من دراستنا لأنها تمثل المسافة الاعتيادية التي لها دراسات كثيرة ومتقدمة. أما لو كانت $w > k_0$ فان المسافة $d_w(u,v)$ تعد غير معرفة. عندما $w \neq 1$ فسوف نأخذ الرأسين u وv مختلفين ولا نأخذ حالة كون u =v.

يعرف **القطر-w** لبيان G والذي يرمز له بـ $diam_W(G)$ أو اختصارا بـ $d_w(G)$ أو δ_w بأنه أكبر المسافات العرضية-w قي G أي أن:

$$d_W(G) = \max_{u,v \in V(G)} d_W(u,v\,|\,G) \qquad .....(1.2)$$

واضح أن $d_W(G) \geq d(G)$

أما **دليل وينر-w** فهو مجموع المسافات العرضية-w في البيان G أي:

$$W_W(G) = \sum_{u,v \in V} d_W(u,v\,|\,G) \qquad .....(1.3)$$

وأعماما لمتعددة حدود وينر نسبة الى الدالة المسافة الاعتيادية d [5,6] نعرف **متعددة حدود وينر-w** نسبة الى الدالة المسافة العرضية d_w كالأتي:

$$W_W(G;x) = \sum_{u,v \in V} x^{d_W(u,v)} \qquad .....(1.4)$$

فإذا كان $C_w(G,k)$ يمثل عدد الأزواج غير المرتبة للرؤوس التي تساوي المسافة العرضية-w بينها k فأن:

$$W_w(G;x) = \sum_{k \geq 2}^{d_w} C_w(G,k)\, x^k \qquad .....(1.5)$$

لأنه عندما يكون $w \geq 2$ فان المسافة-w لا تقل عن 2.

من الواضح أن

$$W_w(G) = \frac{d}{dx} W_w(G;x)\Big|_{x=1} = \sum_{k\geq 2}^{d_w} k\, C_w(G,k) \qquad \ldots..(1.6)$$

ليكن v رأسا في بيان متصل G ولنفرض أن $C_w(v,G,k)$ يمثل عدد رؤوس G التي كل منها يبعد بمسافة عرضية-w تساوي k عن الرأس v إذ أن $k \geq 2$ و $w \geq 2$.

واضح أن

$$\sum_{v\in V} C_w(v,G,k) = 2C_w(G,k) \qquad \ldots..(1.7)$$

لكل $2 \leq k \leq d_w$

وتعرف **متعددة حدود وينر-w بالنسبة الى الرأس v** [1] بـ

$$W_w(v,G;x) = \sum_{k\geq 2}^{d_w} C_w(v,G,k)\, x^k \qquad \ldots..(1.8)$$

من (1.5) و(1.7) و(1.8) نستنتج أن [1]

$$\sum_{v\in V} W_w(v,G;x) = 2W_w(G;x) \qquad \ldots..(1.9)$$

تعريف [1]: يقال لبيان متصل G أنه **منتظم نسبة الى المسافة العرضية-w** إذا كان لكل k، $C_w(v,G,k)$ له القيمة نفسها لكل رأس v في G. أي أن عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة عرضية-w قيمتها k عن الرأس v هو نفسه بالنسبة الى كل v في G.

أوجدنا في هذا البحث متعددة وينر بالنسبة الىالمسافة العرضية – w لكل من P_t^2, C_t^2, Q_m

2 . مربع درب (The square of a path)

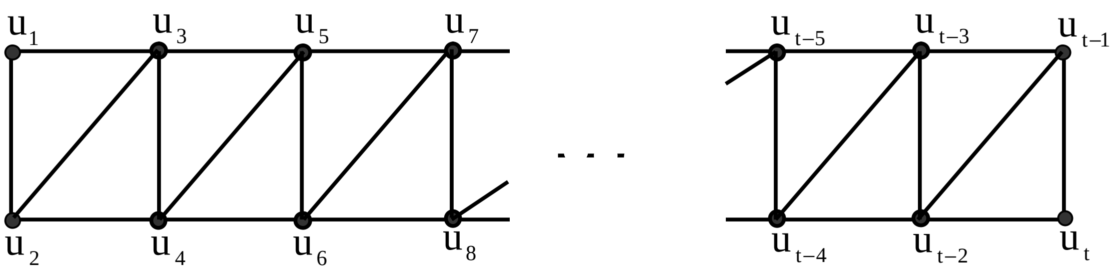
تعريف 2.1: [3] المربع G^2 لبيان $G=(V,E)$ هو بيان مجموعة رؤوسه $V(G^2)=V(G)$ وفيه u وv متجاوران في G^2 عندما يكون $d(u,v)\leq 2$ في G. بالمثل يعرف G^m، $m \geq 3$، كالآتي $V(G^m)=V(G)$ ويكون الرأسان u و v متجاورين في G^m فقط عندما يكون $d_G(u,v) \leq m$

نجد في هذا البند متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-w لمربع درب. نفرض أن P_t درب برتبة t مجموعة رؤوسه هي بالترتيب $u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t$،عندئذ يكون

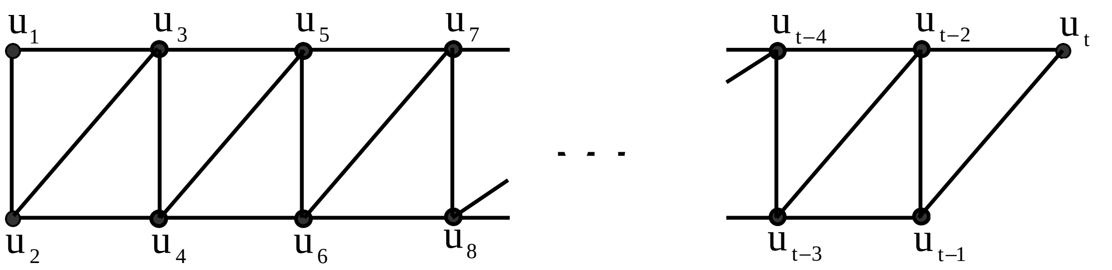
$V(P_t^2)=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_t\}=V$

$E(P_t^2)=\{uv: u,v\in V, 1\leq d_G(u,v)\leq 2\}, G=P_t$

الشكل 2.1 يوضح البيان P_t^2 عندما يكون t عددا زوجيا، والشكل 2.2 يبين لنا P_t^2 عندما يكون t عددا فرديا.



الشكل 2.1-البيان P_t^2، t عدد زوجي



الشكل 2.2-البيان P_t^2، t عدد فردي

بمجرد النظر إلى الشكلين 2.1 و 2.2 يتبين لنا أن $k_0 = 2$ وهذا يعني أن w =2.

عبارة 2.1: القطر للمسافة العرضية-2 للبيان P_t^2 هو

$$diam_2 P_t^2 = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \qquad .....(2.1)$$

البرهان:

من الشكل 2.1 نلاحظ أن $d_2(u,v) \le t/2$ عندما يكون t عددا زوجيا، وأن $d_2(u_1,u_t) = t/2$. إذا عندما يكون t زوجيا فان $diam_2 P_t^2 = \frac{t}{2}$.

ومن الشكل 2.2 نلاحظ أن لكل رأسين u و v يكون

عندما يكون t فرديا $d_2(u,v) \le (t+1)/2$,

كما أن $d_2(u_1,u_t) = (t+1)/2$. وعليه، فانه عندما يكون t فرديا فان

$$diam_2 P_t^2 = (t+1)/2$$

#

مبرهنة 2.2: متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان P_t^2، إذ أن $t \ge 5$، هي:

$$W_2(P_t^2;x) = 3(t-2)x^2 + \sum_{k=3}^{\lceil t/2 \rceil}(2t-4k+3)x^k \qquad .....(2.2)$$

البرهان:

للحصول على متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 نجد معامــل x^k، أي $C_2(P_t^2,k)$ لكل $2 \le k \le \lceil t/2 \rceil$.

نفرض أن k =2 ولنأخذ الرأس u_i مع كل رأس من الرؤوس u_j حيث أن $i < j \le t$ نلاحــظ أن $d_2(u_i,u_j) = 2$ عندما $j = i+1, i+2, i+3$ ولكل $1 \le i \le t-3$.

فضلا عن أن

$$d_2(u_{t-2},u_{t-1}) = d_2(u_{t-2},u_t) = d_2(u_{t-1},u_t) = 2 \qquad .....(2.3)$$

وبهذا نستنتج أن

$$C_2(P_t^2,2) = 3(t-2) \qquad .....(2.4)$$

أما إذا كانت $3 \le k \le \lceil t/2 \rceil$ ولغرض إيجاد $C_2(P_t^2,k)$ فنلاحظ أن $d_2(u_i,u_j) = k$ إذا وإذا فقط كان $j = i+2k-2, i+2k-1$.

وهذا يصح لكل $1 \le i \le t+1-2k$، فضلا عن أن:

$$d_2(u_{t+2-2k},u_t) = k \qquad .....(2.5)$$

ومما تقدم تبين أن لكل $3 \le k \le \lceil t/2 \rceil$

$$C_2(P_t^2,k) = 2t-4k+3 \qquad .....(2.6)$$

وأخيرا نحصل من (2.4) و(2.6) على (2 .2) وبهذا يتم البرهان.

#

نتيجة 2.3: دليل وينر للمسافة العرضية-٢ للبيان P_t^2 هو

$$W_2(P_t^2) = tn(n+1) - \frac{1}{6}n(n+1)(8n-5) - 1 \qquad .....(2.7)$$

حيث أن $n = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil$.

البرهان:

باشتقاق الصيغة (2.2) والتعويض عن x=1 نحصل على العلاقة (2.7).

3. مربع دارة C_t^2 (The square of a cycle):

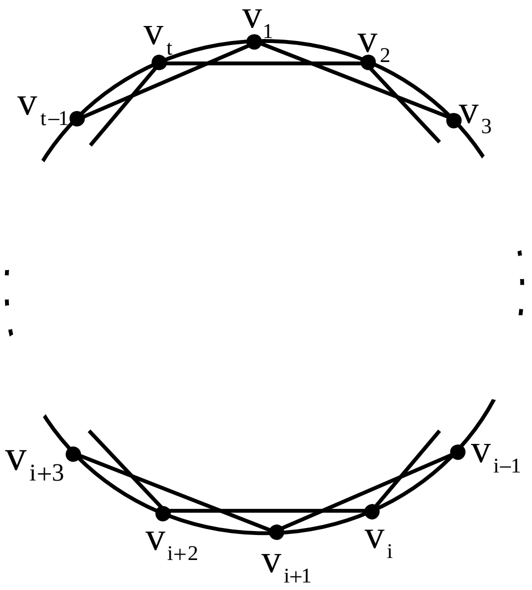
بما أن $C_4^2 = K_4$ و $C_5^2 = K_5$ فسوف نفرض أن $t \geq 6$.

من الواضح أن عامل الاتصال k_0 للبيان C_t^2 هو 4 لذلك فان $2 \leq w \leq 4$. لنفرض مجموعة رؤوس C_t^2 هي:

$V(C_t^2) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$

كما هو مبين في الشكل3.1.

لاحظ أن C_t^2 يكون منتظما بالنسبة الى المسافة العرضية-w لذا سنركز على إيجاد متعددة الحدود $W_w(v_1, C_t^2; x)$ لكل $2 \leq w \leq 4$.



الشكل3.1 البيان C_t^2

(أولاً) متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 للبيان C_t^2:

عبارة3.1: القطر للمسافة العرضية-2 للبيان C_t^2 هو

$$diam_2 C_t^2 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

البرهان:

يكن u و v رأسين من رؤوس C_t^2 بحيث أن $d(u,v|C_t) = r$ هو القطر للبيان C_t . وليكن Q هو أقصر درب بين u و v في البيان C_t . لدينا أربع حالات:

1.إذا كان t=4s عندها يكون r=2s وتتجزأ حافات C_t إلى دربين u-v منفصلين داخليا همـــا Q و Q' وعليه يوجد دربان u-v منفصلان داخليا في البيان C_t^2 كل منهما بطول s.
أحدهما في Q^2 والأخر في Q'^2 [لاحظ العبارة2.1]لهذا السبب فان

$$diam_2 C_t^2 = s = \frac{t}{4} = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

2. إذا كان t=4s+1 فان $d(u,v|C_t) = 2s$. إذا يوجد دربان u-v منفصلان داخليا في Q^2
أحدهما بطول s والآخر بطول s+1 ولما كانت رتبة Q هي ٢s+1 فان
$diam_2 Q^2 = s+1$ ولما كان Q' برتبة 2s+2 فانه لا يؤدي إلى دربين منفصلين داخليا بين u وv وبطول أقل من s+1. لذلك فان

$$diam_2 C_t^2 = s+1 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

3. إذا كان t=4s+2 فان الدرب Q يكون برتبة 2s+2 ويكون Q' أيضا برتبة 2s+2 وكل منهما يؤدي إلى أقصر درب u-v في Q^2 و Q'^2 وبطول s+1 (بموجب العبارة 2.1) وهذه الحالة مشابهة للحالة الأولى. وهكذا يكون

$$diam_2 C_t^2 = s+1 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

4. إذا كان t=4s+3 فان $d(u,v|C_t) = 2s+1 = r$ ويكون Q برتبة 2s+2 أما Q' فيكون برتبة 2s+3، لذلك نأخذ الدربين u-v المنفصلين داخليا من Q^2 اللذين يؤديان إلى حاوية C(u,v) بأقصر طول. ولما كان $diam_2 Q^2 = s+1$ فان

$$diam_2 C_t^2 = s+1 = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$$

وبهذا يتم البرهان. #

وسوف نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-w للبيان C_t^2 لكل من القيم الثلاثة لـــ w وهي 2,3,4

مبرهنة3.2: لتكن $t \ge 7$ ولنفرض أن $m = \left\lfloor \frac{t-7}{4} \right\rfloor$ ، $n = t-3-4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$ ،
فان متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-2 لمربع دارة C_t^2،هي:

$$W_2(C_t^2;x) = t\,x^2 + 2t\sum_{k=2}^{m+2} x^k + \begin{cases} 0 & ,when\ n=0 \\ t\,x^{m+2}/2 & ,\ when\ n=1 \\ t\,x^{m+3} & ,when\ n=2 \\ 3t\,x^{m+3}/2 & ,when\ n=3 \end{cases}$$

البرهان:

بما أن C_t^2 منتظم بالنسبة إلى المسافة العرضية-w، أي أن لكل k، يكون لـ $C_w(v,C_t^2,k)$ القيمة نفسها لكل رأس v في C_t^2، لذلك فان:

$$W_2(C_t^2;x)=\frac{1}{2}tW_2(v_1,C_t^2;x), \qquad .....(3.1)$$

نلاحظ من الشكل 3.1 أن:

$$d_2(v_1,v_i)=2$$

عندما يكون $i=2,3,4,t-2,t-1,t$، وعليه فان

$$C_2(v_1,C_t^2,2)=6 \qquad .....(3.2)$$

باستثناء الرؤوس التي تبعد بمسافة عرضية-2 مقدارها2 عن v_1، نجد أن الرؤوس المتبقية يمكن أن تجزأ إلى m من المجاميع التي يتكون كل منها من أربعة رؤوس لها المسافة العرضية- 2 ذاتها عن v_1. ومسافاتها العرضية تتدرج تصاعديا من 3 إلى m+2. بعبارة أخرى لكل k، حيث $3\le k\le m+2$ ولقيم i، $5\le i\le t-3$، فان $d_2(v_1,v_i)=k$ عندما يكون $i=2k-1,2k,t-2k+2,t-2k+3$ وعليه فان

$$C_2(v_1,C_t^2,k)=4 \qquad .....(3.3)$$

أخيرا بقي لدينا إيجاد المسافة العرضية-٢ بين v_1 و n من الرؤوس المتبقية، وواضح أن قيم n الممكنة هي: n =0,1,2, or 3.

فإذا كان n=0 فلا يوجد رأس باق.

وإذا كان n=1 يبقى رأس واحد وهو الرأس $v_{t/2+1}$، وأن

$$d_2(v_1,v_{t/2+1})=m+2 \qquad .....(3.4)$$

إذا كان n=2 فيبقى رأسان وهما $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$، وأن

$$d_2(v_1,v_{(t+1)/2})=d_2(v_1,v_{(t+3)/2})=m+3 \qquad .....(3.5)$$

إذا كان n=3 يبقى ثلاثة رؤوس وهي $v_{t/2+2}$، $v_{t/2+1}$ و $v_{t/2}$، وأن

$$d_2(v_1,v_{t/2})=d_2(v_1,v_{t/2+1})=d_2(v_1,v_{t/2+2})=m+3 \qquad .....(3.6)$$

مما تقدم في العلاقات (3.2)،(3.3)،(3.4)،(3.5) و(3.6) نحصل على الصيغة الآتية لأجل $t\ge 7$.

$$W_2(v_1,C_t^2;x)=2x^2+4\sum_{k=2}^{m+2}x^k+\begin{cases}0 & ,when\ n=0\\ x^{m+2} & ,when\ n=1\\ 2x^{m+3} & ,when\ n=2\\ 3x^{m+3} & ,when\ n=3\end{cases}$$

وبالرجوع إلى (3.1) نحصل على صيغة $W_2(C_t^2;x)$ المذكورة في المبرهنة.

#

وبالنسبة الى قيم $3\le t\le 6$، فان $C_3^2=K_3$ و $C_4^2=K_4$ و $C_5^2=K_5$ أما إذا كان $t=6$ فنجد مباشرة أن

$$W_2(C_6^2;x)=15x^2$$

نتيجة3.3: دليل وينر للمسافة العرضية-2، للبيان C_t^2 هو:

$$W_2(C_t^2)=t(m^2+5m+6+a)$$

حيث أن

$$a=\begin{cases}0 & ,when\ n=0\\ (m+2)/2 & ,when\ n=1\\ m+3 & ,when\ n=2\\ 3(m+3)/2 & ,when\ n=3\end{cases}$$

$$m=\left\lfloor\frac{t-7}{4}\right\rfloor \text{، } n=t-3-4\left\lfloor\frac{t-3}{4}\right\rfloor .$$

#

(ثانيا) متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2:

العبارة الآتية تعطينا القطر للمسافة العرضية-2 للبيان C_t^2.

العبارة 2.4: القطر الى المسافة العرضية-3 للبيان C_t^2، $t\ge 6$، هو

$$diam_3C_t^2=\begin{cases}t/2-1, & when\ t\ is\ even\\ (t-1)/2, & when\ t\ is\ odd\end{cases}\qquad\text{.....(3.7)}$$

البرهان:

بما أن C_t^2 منتظم بالنسبة للمسافة العرضية ، فإننا نلاحظ من الشكل 3.1 أن

$$diam_3C_t^2=\max_{u\in V}\{d_3(v_1,u)\}=d_3(v_1,v_3)$$

أصغر حاوية $C(v_1,v_3)$ تتكون من الدروب

$P_1 = v_1 v_3$, $P_2 : v_1, v_2, v_3$, $P_3 : v_1, v_{t-1}, v_{t-3}, v_{t-5}, \ldots v_5, v_3$.

إذا كان t عددا زوجيا، وبذلك فان طول هذه الحاوية هو $t/2-1$.

أما إذا كان t عددا فرديا فان أصغر حاوية $C(v_1,v_3)$ تتكون من الدروب P_1 ، P_2 و $P'_3 : v_1, v_t, v_{t-2}, v_{t-4}, \ldots, v_5, v_3$ الذي طوله $(t-1)/2$ ، لذلك فان طول هذه الحاوية هو $(t-1)/2$.

وبذلك يتم البرهان. #

والآن نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 . ونأخذ لأجل ذلك حالتين في حالة كون t عددا زوجيا أو t عددا فرديا.

مبرهنة3.5: إذا كان t عددا زوجيا و $t \geq 8$ ، وليكن $n = t-3-4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$ ، فان

$$W_3(C_t^2;x) = t\,x^2 + \begin{cases} 2t\displaystyle\sum_{k=t/4+1}^{t/2-1} x^k + \frac{t}{2} x^{t/4+1}, & when\, n=1 \\ 2t\displaystyle\sum_{k=(t+6)/4}^{t/2-1} x^k + \frac{3}{2} t\, x^{(t+2)/4}, & when\, n=3 \end{cases}$$

البرهان:

من الواضح أن $d_3(v_1,v_2) = d_3(v_1,v_t) = 2$

أما القطر الذي هو $t/2-1$ فانه يتحقق لأزواج الرؤوس المكونة من v_1 مع كل من $v_{t-2}, v_{t-1}, v_4, v_3$. وبذلك فان

$C_3(v_1, C_t^2, 2) = 2$, $C_3(v_1, C_t^2, t/2-1) = 4$.

بما أن t عدد زوجي فان باقي قسمة $t-3$ على 4 هو 1 أو 3، أي أن n=1,3. وبذلك نعالج حالتين:

(أ) فإذا كان t من مضاعفات العدد ٤ فان n=1، وفي هذه الحالة يكون $d_3(v_1,v_i)$ لكل $i = 3,4,5, \ldots, t/2$ ، كالأتي:

$$d_3(v_1,v_i) = \begin{cases} (t-i+1)/2, & when\ i\ is\, odd \quad \ldots.(3.8) \\ (t-i+2)/2, & when\ i\ is\, even \quad \ldots..(3.9) \end{cases}$$

كما أن لكل $i = 3,4,5, \ldots, t/2$ ،

$d_3(v_1, v_{t-i+2}) = d_3(v_1, v_i)$ .....(3.10)

نلاحظ من (3.8) و (3.9) أنه إذا كان i فرديا، $3 \le i \le t/2$، فان

$$d_3(v_1, v_i) = d_3(v_1, v_{i+1})$$

ومن (3.10) أيضا نلاحظ أن كل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-1}, v_{t-2}, v_{t-3}, \dots, v_{t/2+2}$ يكون لهما المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1. وبهذا يكون لكل k، $t/4+1 \le k \le t/2-1$، فانه توجد أربعة رؤوس لها المسافة العرضية-3 عن v_1 هي k، وعليه يكون

$C_3(v_1, C_t^2, k) = 4\,, \quad t/4+1 \le k \le t/2-1$ .....(3.11)

فضلا عن ذلك فان

$d_3(v_1, v_{t/2+1}) = t/4+1$ .....(3.12)

وبهذا يتم حساب المسافة العرضية-3 من v_1 إلى كل الرؤوس الأخرى في C_t^2 عندما n=1.

(ب) إذا كان n=3 فان العدد t ليس من مضاعفات العدد ٤، وأن العلاقتين (3.8) و(3.9) تصحان لقيم i الآتية: $i = 3,4,5, \dots, t/2-1$.

وأيضا يكون لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، حيث $i = 3,5,7, \dots, t/2-2$، المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1،

كما أن:

$d_3(v_1, v_{t-i+2}) = d_3(v_1, v_i)$ .....(3.13)

لكل $3 \le i \le t/2-1$.

كما أن كل رأسين متتاليين في المتتابعة $v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_{t/2+3}$ لهما المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1. وبذلك فان لكل $(t+6)/4 \le k \le t/2-1$ نحصل على

$$C_3(v_1, C_t^2, k) = 4$$

الرؤوس الباقية وهي الثلاثة الآتية $v_{t/2}$، $v_{t/2+1}$ و $v_{t/2+2}$. ونجد من الشكل3.1 أن:

$$d_3(v_1, v_{t/2}) = d_3(v_1, v_{t/2+1}) = d_3(v_1, v_{t/2+2}) = (t+2)/4$$

وبتلخيص ما تقدم نحصل على:

$$W_3(v_1, C_t^2; x) = 2x^2 + \begin{cases} 4\displaystyle\sum_{k=t/4+1}^{t/2-1} x^k + x^{t/4+1}\,, & when\, n=1 \\ 4\displaystyle\sum_{k=(t+6)/4}^{t/2-1} x^k + 3x^{(t+2)/4}\,, & when\, n=3 \end{cases}$$

وبالضرب في t/2 نحصل على $W_3(C_t^2;x)$ كما هي معطاة في نص المبرهنة 3.5.

#

نتيجة3.6: إذا كان t عددا زوجيا و $t \geq 8$، وليكن $n = t-3-4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$، فان دليل وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 هو

$$W_3(C_t^2) = \begin{cases} \frac{t}{4}(\frac{3}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + 10)\,, & when\, n = 1 \\ \frac{t}{4}(\frac{3}{4}t^2 - \frac{5}{2}t + 8)\,, & when\, n = 3 \end{cases}$$

#

والآن نجد $W_3(C_t^2;x)$ عندما يكون t عددا فرديا.

مبرهنة3.7: إذا كان t عددا فرديا، $t \geq 9$، وليكن $n = t-5-4\left\lfloor \frac{t-5}{4} \right\rfloor$ فان:

$$W_3(C_t^2;x) = t\,x^2 + t\,x^{(t-1)/2} + \begin{cases} 2t \sum_{k=(t+3)/4}^{(t-3)/2} x^k\,, & when\, n = 0 \\ 2t \sum_{k=(t+5)/4}^{(t-3)/2} x^k + t\,x^{(t+1)/4}\,, & when\, n = 2 \end{cases}$$

البرهان:

من الواضح أن هنالك رأسين فقط هما v_2 و v_t بحيث أن

$$d_3(v_1,v_2) = d_3(v_1,v_t) = 2$$

وعليه فان

$$C_3(v_1, C_t^2, 2) = 2 \qquad .....(3.14)$$

بالنسبة الى قطر المسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 الذي قيمته $(t-1)/2$ بموجب العبارة3.4 فان هنالك رأسين فقط هما v_3 و v_{t-1} بحيث أن

$$d_3(v_1,v_3) = d_3(v_1,v_{t-1}) = (t-1)/2$$

وعليه فان

$$C_3(v_1, C_t^2, (t-1)/2) = 2 \qquad .....(3.15)$$

وواضح أن باقي قسمة $t-5$ على 4 أي n هو 2 أو0 لأن t عدد فردي. وبذلك تكون لدينا حالتان:

(أ) عندما $n=0$ وهي تتحقق عندما تكون $(t-1)$ من مضاعفات العدد 4 وفي هذه الحالــة تكون المسافة العرضية-3 لكل $4 \le i \le (t+1)/2$ كالأتي:

$$d_3(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+1)/2, & 4\le i\le (t-1)/2 \quad \text{when } i \text{ is even}\\ (t-i+2)/2, & 5\le i\le (t+1)/2 \quad \text{when } i \text{ is odd}\end{cases} \qquad .....(3.16)$$

ومنها نجد أن كل رأسين متتــاليين v_i و v_{i+1}، $i=4,6,8,\dots,(t-1)/2$، تكــون لهمـــا المـــسافة العرضية-3 نفسها عن v_1.

وبالمقابل فان لكل $4 \le i \le (t+1)/2$

$$d_3(v_1,v_{t-i+2})=d_3(v_1,v_i) \qquad .....(3.17)$$

كما يكون لكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-2},v_{t-3},\ \dots\ ,v_{(t+3)/2}$ المسافة العرضـــية-3 نفسها عن v_1.

أي أن لكل k، حيث أن $(t+3)/4 \le k \le (t-3)/2$، يكون

$$C_3(v_1,C_t^2,k)=4 \qquad .....(3.18)$$

(ب) عندما $n=2$ أي أن $(t-1)$ ليس من مضاعفات العدد ٤ فان العلاقـــة (3.16) تـــصح حسب قيم i الآتية: $i=4,5,6,\dots,(t-1)/2$.

كما نلاحظ أن

$$d_3(v_1,v_{t-i+2})=d_3(v_1,v_i) \qquad .....(3.19)$$

وهذه تعني أن كل رأسين متتاليين من متتابعة الـــرؤوس $v_{t-2},v_{t-3},\ \dots\ ,v_{(t+5)/2}$ يكـــون لهمـــا المسافة العرضية-3 نفسها عن v_1.

أي أن لكل k حيث أن $(t+5)/4 \le k \le (t-3)/2$، فان

$$C_3(v_1,C_t^2,k)=4 \qquad .....(3.20)$$

أما الرأسان الباقيان فانهما $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$ وأن مسافتهما العرضية-3 عن v_1 هي:

$$d_3(v_1,v_{(t+1)/2})=d_3(v_1,v_{(t+3)/2})=(t+1)/4 \qquad .....(3.21)$$

إذا

$$C_3(v_1,C_t^2,(t+1)/4)=2$$

مما تقدم وحسب ما ذكر في الفقرتين (أ) و (ب) نحصل على ما يأتي:

$$W_3(v_1,C_t^2;x)=2x^2+2x^{(t-1)/2}+\begin{cases}4\sum_{k=(t+3)/4}^{(t-3)/2}x^k\ , & when\, n=0\\ 4\sum_{k=(t+5)/4}^{(t-3)/2}x^k+2x^{(t+1)/4}, & when\, n=2\end{cases} \quad .....(3.22)$$

وبضرب (3.22) في t/2 نحصل على $W_3(C_t^2;x)$ المذكورة في نص المبرهنة 3.7.

#

لاحظ أنه عندما t=7 يكون لدينا:

$$W_3(C_7^2;x)=14x^2+7x^3$$

نتيجة3.8: إذا كان t عددا فرديا، $t\geq 9$، وكان $n=t-5-4\left\lfloor\frac{t-5}{4}\right\rfloor$، فان دليل وينر للمسافة العرضية-3 للبيان C_t^2 هو

$$W_3(C_t^2)=\begin{cases}t(3t^2-10t+39)/16, & when\, n=0\\ t(3t^2-10t+35)/16\ , & when\, n=2\end{cases}$$

#

(ثالثا) متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-4 للبيان C_t^2:

والان نعالج حالة كون w =4 أي نجد متعددة حدود وينر للمسافة العرضية-4 للبيان C_t^2.

عبارة3.9: لكل $t\geq 6$،

$$diam_4C_t^2=\begin{cases}t/2, & when\ t\ \ is\ \ even\\ (t-1)/2\ , & when\ t\ \ is\ \ odd\end{cases}$$

البرهان:

واضح من الشكل3.1 أنه عندما يكون t عددا زوجيا، فان:

$$d_4(v_1,v_3)=t/2$$

وعندما يكون t عددا فرديا فان أكبر مسافة عرضية-4 من v_1 هي إلى الرأس v_3 أيضا ويكون طول الحاوية لها هو $(t-1)/2$.

#

لغرض إيجاد $W_4(C_t^2;x)$ نأخذ حالتين الأولى عندما يكون t عددا زوجيا والثانية عندما يكون t عددا فرديا.

مبرهنة3.10: إذا كان t عددا زوجيا، $t \geq 6$، ولنفرض أن $n=(t-1)-4\left\lfloor \frac{t-1}{4} \right\rfloor$، فان

$$W_4(C_t^2;x)=\begin{cases} 2t\sum\limits_{k=(t+6)/4}^{t/2} x^k+\frac{t}{2}x^{(t+2)/4}, & when\ \ n=1 \\ 2t\sum\limits_{k=t/4+2}^{t/2} x^k+\frac{3}{2}t\,x^{t/4+1}, & when\ \ n=3 \end{cases}$$

البرهان:

واضح أن n هو باقي قسمة $t-1$ على 4، ونظرا لكون t عددا زوجيا فان $n=1$ أو $n=3$. سوف نعالج كلا من الحالتين على حده.

(أ) إذا كان n=1 فان t ليس من مضاعفات العدد 4. ولكل $2 \leq i \leq t/2$، فان

$$d_4(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+2)/2, & 2 \leq i \leq t/2-1,\ when\ \ i\ \ is\ \ even \\ (t-i+3)/2, & 3 \leq i \leq t/2,\ \ \ when\ \ i\ \ is\ \ odd\end{cases} \quad .....(3.23)$$

ومنها نجد أن لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، $i=2,4,6,\ldots,t/2-1$، المسافة العرضية-4 ذاتها عن v_1، كما نجد أن

$$d_4(v_1,v_{t-i+2})=d_4(v_1,v_i)$$

إذ $2 \leq i \leq t/2$.

كما يكون لكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_t,v_{t-1},v_{t-2},\ldots,v_{t/2+2}$ المسافة العرضية-4 نفسها عن v_1، وبهذا لكل k، حيث $(t+6)/4 \leq k \leq t/2$ فان

$$C_4(v_1,C_t^2,k)=4 \quad .....(3.24)$$

والرأس المتبقي هو $v_{t/2+1}$ ومسافته العرضية-4 عن v_1 هي:

$$d_4(v_1,v_{t/2+1})=(t+2)/4 \quad .....(3.25)$$

وبهذا وجدنا المسافات العرضية-4 من الرأس v_1 إلى باقي رؤوس C_t^2 كلها.

(ب) عندما n=3 فان t من مضاعفات العدد 4 وأن العلاقة (3.23) تتحقق لقيم i الآتية:

$i=2,3,4,\ldots,t/2-1$

تكون المسافتان العرضيتان -4 عن v_1 لكل رأسين متتاليين v_i و v_{i+1}، حيث أن $i=2,4,6,\ldots,t/2-2$، متساويتين أيضا.

كما أن $2 \leq i \leq t/2-1$ و $d_4(v_1,v_{t-i+2})=d_4(v_1,v_i)$

وكل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_t,v_{t-1},v_{t-2},\ldots,v_{t/2+3}$ لهما المسافة العرضية-4 نفسها عن v_1، وبهذا لكل k، $\frac{t}{4}+2 \leq k \leq t/2$، توجد أربعة رؤوس بالمسافة العرضية-4 بقيمة k عن v_1 أما الرؤوس الثلاثة الباقية وهي: $v_{t/2},v_{t/2+1},v_{t/2+2}$. فان لها

$$d_4(v_1,v_{t/2})=d_4(v_1,v_{t/2+1})=d_4(v_1,v_{t/2+2})=t/4+1$$

وبتلخيص ما تقدم ينتج

$$W_4(v_1,C_t^2;x)=\begin{cases}4\sum_{k=(t+6)/4}^{t/2}x^k+x^{(t+2)/4}\ , & when\ \ n=1\\ 4\sum_{k=t/4+2}^{t/2}x^k+3\ x^{t/4+1}, & when\ \ n=3\end{cases} \qquad .....(3.26)$$

وبضرب (3.26) في t/2 نحصل على $W_4(C_t^2;x)$ المذكورة في المبرهنـــة (3.10) وبهــذا يــتم البرهان

#

مبرهنة3.11: إذا كان t عددا فرديا، $t\geq 7$، ولتكن $n=(t-3)-4\left\lfloor\frac{t-3}{4}\right\rfloor$، فان

$$W_4(C_t^2;x)=t\,x^{(t-1)/2}+\begin{cases}2t\sum_{k=(t+5)/4}^{(t-1)/2}x^k\ , & when\ \ n=0\\ 2t\sum_{k=(t+7)/4}^{(t-1)/2}x^k+t\,x^{(t+3)/4}, & when\ \ n=2\end{cases}$$

البرهان:

بما أن t عدد فردي فان قيمة القطر هي $(t-1)/2$. وهي تتحقــق لــستة أزواج مــن الرؤوس من ضمنها زوجان مكونان من v_1 مع كل من الرأسين v_2 و v_t أي أن

$$d_4(v_1,v_2)=d_4(v_1,v_t)=(t-1)/2$$

أما الأزواج الأربعة المتبقية فان كلا منها مكون من v_1 مع أحد الرؤوس v_3,v_4,v_{t-1},v_{t-2} التـــي سوف تذكر ضمن الفقرتين (أ) و(ب). إن باقي قسمة $t-3$ على 4 الذي هو n يكون له قيمتـــان إما 0 أو2 وسنعالج كل حالة منهما.

(أ) إذا كان n=0 فان $t-1$ ليس من مضاعفات العدد 4 عندئذ يكون:

$$d_4(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+2)/2, & 3\leq i\leq(t-1)/2,\ when\ \ i\ \ is\ \ odd\\ (t-i+3)/2\ , & 4\leq i\leq(t+1)/2,\ when\ \ i\ \ is\ \ even\end{cases} \qquad .....(3.27)$$

حسب ما ذكر في العلاقة (3.27) نجد أن كل رأسين متتـــالين v_i و v_{i+1}، $i=3,5,7,\ldots,(t-1)/2$ تكون لهما المسافة العرضية-4 نفسها عن v_1.

كما أن

$$d_4(v_1,v_{t-i+2})=d_4(v_1,v_i)$$

حيث أن $3 \le i \le (t+1)/2$. وكل رأسين متتاليين من متتابعة الــرؤوس $v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_{(t+3)/2}$ لهما المسافة العرضية-4 ذاتها عن v_1، وبهذا يكون لكل k، $(t+5)/4 \le k \le (t-1)/2$، فان

$$C_4(v_1, C_t^2, k) = 4 \qquad \text{.....(3.28)}$$

عندها نكون قد وجدنا المسافات العرضية-4 للرأس v_1 نسبة إلى كل مــن الــرؤوس الأخــرى لــ C_t^2 عندما n =0.

(ب) إذا كان n=2 فان $t-1$ من مضاعفات العدد 4 وأن

$$d_4(v_1,v_i)=\begin{cases}(t-i+2)/2, & 3\le i\le(t-3)/2, \text{ when } i \text{ is odd}\\ (t-i+3)/2, & 4\le i\le(t-1)/2, \text{ when } i \text{ is even}\end{cases}$$

كما يكون فيها لكــل رأســين متتــاليين v_i و v_{i+1}، حيــث $i = 3,5,7,\dots,(t-3)/2$، المــسافة العرضية-4 ذاتها عن v_1، كما نجد أن

$$d_4(v_1, v_{t-i+2}) = d_4(v_1, v_i)$$

حيث $3 \le i \le (t-1)/2$،

إذا كل رأسين متتاليين من متتابعة الرؤوس $v_{t-1}, v_{t-2}, \dots, v_{(t+5)/2}$، لهما المسافة العرضــية-4 نفسها عن v_1.

وبهذا فان لكل k، $(t+7)/4 \le k \le (t-1)/2$، يكون

$$C_4(v_1, C_t^2, k) = 4 \qquad \text{.....(3.29)}$$

والرأسان الباقيان هما $v_{(t+1)/2}$ و $v_{(t+3)/2}$ وان مسافتهما عن v_1 هي

$$d_4(v_1, v_{(t+1)/2}) = d_4(v_1, v_{(t+3)/2}) = (t+3)/4 \qquad \text{.....(3.30)}$$

أخيرا وبتلخيص ما تقدم في الفقرتين (أ) و (ب) نحصل على:

$$W_4(v_1,C_t^2;x)=2x^{(t-1)/2}+\begin{cases}4\displaystyle\sum_{k=(t+5)/4}^{(t-1)/2}x^k\,, & \text{when } n=0\\ 4\displaystyle\sum_{k=(t+7)/4}^{(t-1)/2}x^k+2x^{(t+3)/4}, & \text{when } n=2\end{cases} \qquad \text{.....(3.31)}$$

وبضرب العلاقة (3.31) في t/2 نحصل على $W_4(C_t^2;x)$ المذكورة ضمن نص المبرهنة3.11 .

#

نتيجة3.12:

(أ) لأجل $t \geq 6$، t عدد زوجي، ولتكن $n = (t-1) - 4\left\lfloor \frac{t-1}{4} \right\rfloor$، فان

$$W_4(C_t^2) = t(3t^2 + 2t - 8)/16,$$

وهذه العلاقة عندما n=1,3.

(ب) لأجل $t \geq 7$، t عدد فردي، ولتكن $n = (t-3) - 4\left\lfloor \frac{t-3}{4} \right\rfloor$، فان

$$W_4(C_t^2) = \begin{cases} t(3t^2 + 2t - 17)/16, & when \;\; n = 0 \\ t(3t^2 + 2t - 21)/16, & when \;\; n = 2 \end{cases}$$

#

4. مكعب -m (m-Cube):

يعرف المكعب-m والذي يرمز له Q_m باسلوب تكراري كالآتي [4]: $Q_1 = K_2$ و $Q_m = Q_{m-1} \times K_2$ لأجل $m \geq 2$. ويمكن بسهولة ملاحظة أن $p(Q_m) = 2^m$ ، $q(Q_m) = m2^{m-1}$، كما أنه منتظم بدرجة m. إضافة إلى ذلك فان عامل الاتصال للرؤوس وكذلك للحافات للمكعب Q_m هو m، وبذلك فان هنالك m من الدروب المنفصلة داخليا بين كل رأسين مختلفين. وبناء على ذلك سوف نفرض فيما يأتي $2 \leq w \leq m$. من المفيد التعبير عن رؤوس Q_m بمتتابعات-m في النظام الثنائي $(a_1 a_2 \;...\; a_m)$ حيث أن a_i هو 0 أو 1 لكل $1 \leq i \leq m$. وعندئذ يكون رأسان في Q_m متجاورين إذا وإذا فقط اختلف التمثيل الثنائي لهما بموقع واحد فقط. أي أن $(a_1 a_2 \;...\; a_m)$ و $(b_1 b_2 \;...\; b_m)$ متجاوران إذا وفقط إذا كان $a_i \neq b_i$ لقيمة واحدة فقط ل i وفيما عدا ذلك فان $a_j = b_j$ لكل $j \neq i$.

عبارة4.1: إذا كان $u,v \in V(Q_m)$ بحيث أن التمثيل الثنائي لـ u و v يختلف بـ n من المواقع، فان $d(u,v) = n$.

البرهان:

إذا كان u و v يختلفان بـ n من المواقع في التمثيل الثنائي للرؤوس فان هنالك دربا u-v بطول n. إذا $d(u,v) \leq n$ ومن جهة أخرى، إذا كان Q أقصر درب بين u و v وكان $Q: u, u_1, u_2, \ldots, u_t (= v)$ فان كل رأسين متتالين على Q يختلفان بموقع واحد فقط، وبذلك فان u

و v يختلفان بـ t من المواقع، إذا $d(u,v)=t$ ، لأن Q أقصر درب وطوله t. وعليه، فان $d(u,v)=t=n$.

#

مبرهنة 4.2: إذا كان $u,v\in V(Q_m)$ وكان $d(u,v)=t$ فان هنالك t من الدروب u-v المنفصلة داخليا وكل منها بطول t.

البرهان:

ليكن $u=(a_1\,a_2\ \dots\ a_m)$ و $v=(b_1\,b_2\ \dots\ b_m)$ بما أن $d(u,v)=t$ فانه بموجب العبارة 4.1 يوجد t من الأدلة j بحيث أن $a_j\neq b_j$ ، ولنرمز لهذه الأدلة بـ $r_1,r_2,\dots,r_t$ بحيث أن $r_1<r_2<\dots<r_t$ ، أي أن

$$a_{r_i}\neq b_{r_i}\ \ ,\ i=1,2,\dots,t$$
$$a_k=b_k\ \ ,\ \forall k\notin\{r_1,r_2,\dots,r_t\}.$$

ليكن $u_j^{(1)}$ هو الرأس الذي نحصل عليه من u بتغيير قيم المواقع $r_1,r_2,\dots,r_j$ ، حيث أن $j=1,2,\dots,t$ إذا $Q_1:u,u_1^{(1)},u_2^{(1)},\dots,u_t^{(1)}(=v)$ هو درب u-v بطول t ولنرمز بـ $u_j^{(2)}$ للرأس الناتج من u بتغيير قيم أول j (ابتداء من اليسار) من $r_2,r_3,\dots,r_t,r_1$.
وواضح أن الدرب $Q_2:u,u_1^{(2)},u_2^{(2)},\dots,u_t^{(2)}(=v)$ هو بطول t بين u و v ومنفصل داخليا عن Q_2 .
وهكذا نستمر بإيجاد Q_3 الذي يتكون من الرؤوس $u,u_1^{(3)},u_2^{(3)},\dots,u_t^{(3)}(=v)$ حيث أن $u_j^{(3)}$ هو الرأس الناتج من u بتغيير قيم أول j (ابتداء من اليسار) من المتتابعة $r_3,r_4,\dots,r_t,r_1,r_2$. وواضح أن Q_3 بطول t أيضا وهو منفصل داخليا مع Q_1 و Q_2 .
وبالاستمرار بهذه الطريقة نحصل على t من الدروب u-v المنفصلة داخليا وكل منها بطول t. وبهذا يتم البرهان.

#

نحصل على النتيجة الآتية من المبرهنة4.2 مباشرة.

نتيجة4.3: إذا كان $u,v\in V(Q_m)$ بحيث أن $d(u,v)=t$ ، حيث $1\leq t\leq m$ ، فان المسافة العرضية-t للرأسين u و v هي t، أي $d_t(u,v)=t$.

#

مبرهنة4.4: إذا كان $u,v\in V(Q_m)$ بحيث أن $d(u,v)=t$ ، حيث $1\leq t<m$ ، فان هنالك m-t من الدروب u-v المنفصلة داخليا والتي كل منها بطول t+2.

البرهان:

نستخدم الرموز التي ذكرت في برهان المبرهنة4.2.

لنفرض أن k_1 هو أول موقع في u وكذلك في v بحيث أن $a_{k_1}=b_{k_1}$. وليكن u' هو u مع تغيير قيمة العنصر في الموقع k_1 (أي إذا كان 0 يغير إلى 1، وبالعكس)

واضح أن $d(u',v)=t+1$. إذا يوجد درب u'-v، Q' بطول t+1 نحصل عليه بأخذ الرؤوس بالترتيب

$$Q_1' : u', u_1'^{(1)}, u_2'^{(1)}, \ldots, u_t'^{(1)}, u_{t+1}'^{(1)}$$

حيث أن $u_j'^{(1)}$ نحصل عليه من u' بتغيير قيم الموقع $r_1, r_2, \ldots, r_j$، لكل $1 \le j \le t$ وأن $u_{t+1}'^{(1)}$ نحصل عليه من $u_t'^{(1)}$ بتغيير قيمة الموقع k_1 في u' أي إعادته إلى قيمة هذا الموقع الأصلي عندما كانت في u. وبذلك فان $u_{t+1}'^{(1)}$ هو الرأس v. وأخيرا فاننا نحصل على درب P_1 بطول t+2 بين u و v بإضافة الحافة uu'. ونجد أيضا أن الرؤوس الداخلية للدرب P_1 تختلف عن جميع الرؤوس الداخلية للدروب u-v، $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$، التي حصلنا عليها في المبرهنة 4.2.

والان نعيد عملية الحصول على P_1 بأخذ موقع أخر k_2 فيه $a_{k_2}=b_{k_2}$ فنحصل على دربu- v، P_2، بطول t+2 وأن رؤوسه الداخلية تختلف كلها عن الرؤوس الداخلية لـ P_1 وكذلك عن $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$.

وبتكرار العملية المذكورة على كل موقع من المواقع، والتي عددها m-t نحصل على $P_1, P_2, \ldots, P_{m-t}$ المنفصلة داخليا وكل منها بطول t+2 بين الرأسين u و v ومنفصلة داخليا أيضا بالنسبة الى ا لدروب $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$. وبهذا يتم البرهان.

#

مبرهنة4.5: لكل $m \ge 3$ و $2 \le n \le m$ فان

$$W_n(Q_m;x) = 2^{m-1}\left\{ x^2 \sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} x^i + \sum_{i=n}^{m} \binom{m}{i} x^i \right\}.$$

البرهان:

معروف أن

$$W(Q_m;x) = 2^{m-1}(1+x)^m + 2^{m-1}$$

وبذلك لكل $1 \le i \le m$، معامل x^i هو

$$C(Q_m, i) = 2^{m-1}\binom{m}{i} \qquad \ldots\ldots(4.1)$$

مما تقدم في المبرهنتين (4.2) و(4.4) نستنتج أن

$d_n(u,v) = d(u,v)+2\ ,\qquad d(u,v) < n$ عندما

$d_n(u,v) = d(u,v),\qquad d(u,v) \geq n$ عندما

$$\begin{aligned} W_n(Q_m;x) &= \sum_{u,v} x^{d_n(u,v)} \\ &= x^2 \sum_{1\leq d(u,v)<n} x^{d(u,v)} + \sum_{d(u,v)\geq n} x^{d(u,v)} \\ &= x^2 \sum_{i=1}^{n-1} C(Q_m,i)x^i + \sum_{i=n}^{m} C(Q_m,i)x^i \end{aligned}$$

وبهذا تم البرهان. #

نتيجة4.6: لكل $m \geq 3$ و $2 \leq n \leq m$ فان

$$diam_n Q_m = \begin{cases} m, & when \quad 2 \leq n \leq m-1 \\ m+1, & when \quad n = m \end{cases}$$

البرهان:

ينتج مباشرة من المبرهنة4.5

#

نتيجة4.7: لكل $m \geq 3$ و $2 \leq n \leq m$ فان

$$W_n(Q_m) = 2^m \left\{ m2^{m-2} + \sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} \right\}.$$

البرهان:

بأخذ مشتقة $W_n(Q_m;x)$. بالنسبة إلى x ثم التعويض عنx بواحد نحصل على:

$$\begin{aligned} W_n(Q_m) &= 2^{m-1} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (i+2)\binom{m}{i} + \sum_{i=n}^{m} i\binom{m}{i} \right\}. \\ &= 2^{m-1} \left\{ 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} + \sum_{i=1}^{m} i\binom{m}{i} \right\}. \\ &= 2^{m-1} \left\{ 2\sum_{i=1}^{n-1} \binom{m}{i} + m2^{m-1} \right\}. \end{aligned}$$

وبهذا يتم البرهان.

#

المصادر

[1] A.S.Aziz;(2007), "**The Width Distance and the w-Wiener Polynomials of a Graph"**, M. Sc. Thesis , Mosul University , Mosul**.**

[2] A.A.Ali ,and A.S.Aziz ,"w-Wiener Polynomials of the Width Distance of Some Special graphs, " Raf.J.of Comp.Sci.,Vol.4, No 2.

[3] F. Buckley and F. Harary ; (1990), **Distance in Graphs** , Addison-Wesley , Redwood.

[4] G. Chartrand and L. Lesniak ; (1986), **Graphs and Digraphs** , Wadsworth Inc. Belmont, California.

[5] I. Gutman ; (1993), "Some Properties of the Wiener Polynomial", Graph Theory Notes of New York, XXV, The New York Academy of Sciences , 13-18.

[6] H. Hosoya; (1988)," On Some Counting Polynomials in Chemistry", Discrete Applied Math., 19 ,239-257.

[7] B. E. Sagan, Y-N. Yeh, and P. Zhang ; (1996),"The Wiener Polynomial of a Graph" , Intern. J. of Quantum Chemistry, Vol. 60, pp. 959-969.