Journal of College of Education for pure sciences(JCEPS)
Web Site: http://eps.utq.edu.iq/ Email: com@eps.utq.edu.iq
Volume 7, Number 1, January 2017

النقاط السرجية الحدية3 استقرارية3- النقاط السرجية و

موضي لفته مطر[1] ، أسعد شاكر حميد[1]

modhi.aljashaam@yahoo.comaasadalkhafaji@yahoo.com

(1)وزارة التربية - المديرية العامة لتربية ذي قار

الخلاصة

الهدف من هذا البحث هو دراسة ا ستقرارية $\mathcal{E}$ -النقاط السرجية لدوال ذات المتحولين ودراسة ا ستقرارية $\mathcal{E}$ -النقاط السرجية الحدية لدوال ذات المتحولين وكذلك $\mathcal{E}$ -النقطةالحدية للمؤثر ∂L , ثم تعميم بعض النتائج بدراسة العلاقة بين $\varepsilon\!-\!ext\; L$ و $\varepsilon\!-\!ext\; \partial L$ وأخيراً نلقي الضوء على ا ستقرارية $\varepsilon\!-\!ext\; L$ معتمدين على التقارب فوق /تحت – البياني.

كلمات مفتاحية :فوق/تحت - البياني, ε -نقاط سرجية , $\mathcal{E}$ -النقطةالحدية.

Journal of College of Education for pure sciences(JCEPS)
Web Site: http://eps.utq.edu.iq/ Email: com@eps.utq.edu.iq
Volume 7, Number 1, January 2017

Stability of ε-saddle points And ε-extreme saddlepoints

Modhi Lafta Mutar[(1)]، Asaad Shakir Hameed[(1)]

modhi.aljashaam@yahoo.comaasasalkhafaji@yahoo.com

Ministry Of Education-Directorate General Of Education Thi Qar

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the stability of the ε- saddle points of functions with two transformer and study the stability of the ε- extreme saddle points of functions with two transformer and as well ε- extreme point of operator ∂L ,Also we study generalize some results by studying the relation between $\varepsilon - ext\ L$ and $\varepsilon - ext\ \partial L$.

the stability of $\varepsilon - ext\ L$ by using epi \ hypo- graphical convergence.

Key words: epi/hypo graph, ε- saddle points , ε- extreme saddle point.

Journal of College of Education for pure sciences(JCEPS)
Web Site: http://eps.utq.edu.iq/ Email: com@eps.utq.edu.iq
Volume 7, Number 1, January 2017

1- مقدمة :

إن لدراسة مسائل القيم الدنيا /العليا(minimization – maximization problems) لدوال محدبة-مقعرةأهمية كبيرة معتمدين في ذلك على مفهوم التقارب فوق /تحت البياني ونذكّر ببعض الأعمال في هذا المجال على سبيل المثال [2,6,7,9,11,14],إذ نعطي في البداية أهم المفاهيم والمصطلحات المعتمدة من قبل[12] ATTOUCH في دراسة المسائل المحدبة - المقعرة , ثم نقوم بتعميم بعض النتائج العائدة لـ Soueycatt [11] والمتعلقة باستقرارية ε - النقاط السرجية لمتتالية من الدوال المحدبة – المقعرة ونحصل على تقارب ε - تحت – تفاضلاتها أيضاً بدلالة تقاربها وفق مفهوم فوق / تحت البيان .

وأخيراً نعرّف ε - النقاط السرجية الحدية لدالة L ذات المتحولين $(\varepsilon - ext\ L)$ وكذلك ε - النقاط الحدية للمؤثر ∂L $(\varepsilon - ext\ \partial L)$ ونقوم بتعميم بعض النتائج لـ Attouch and Riahi[3] بدراسة العلاقة بين $(\varepsilon - ext\ L)$ و $(\varepsilon - ext\ \partial L)$ واستقرارية $(\varepsilon - ext\ L)$.

2- تعاريف ومصطلحات :

لابد من عرض بعض التعاريف والمصطلحات في البداية التي تفيدنا في هذه الدراسة .

<u>تعريف2.1</u> :

ليكن $(X\ ,\tau)$ و $(Y\ ,\sigma)$ فضائين تبولوجيين خطيين و $L : X \times Y \longrightarrow \overline{R}$ دالة ذات متحولين حيث أن $\overline{R} = R \cup \{\infty\}$.

لتكن $f : X \to \overline{R}$ دالة معرفة على X وتأخذ قيمها في $\overline{R}$.

- نقول عن $C \subseteq X$ أنها مجموعة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

$$\forall x , y \in C \quad , \quad \forall \alpha \in [0,1] \ ; \ \alpha x + (1-\alpha) y \in C$$

- نقول عن f أنها دالة محدبة إذا تحقق الشرط التالي :

- نقول إن f دالة مقعرة إذا كانت $(-f)$ محدبة .

- نقول عن الدالة L إنها محدبة – مقعرة $(convex - concave)$ إذا كانت محدبة بالنسبة للمتحول الأول ومقعرة بالنسبة للمتحول الثاني.

- تكون الدالة M حدية عليا (upper marginal function) للدالة L إذا تحققت العلاقة التالية :

$$M : X \longrightarrow \overline{R} \qquad (1) \text{ where } M(x) = \sup_{y \in Y} L(x, y)$$

- تكون الدالة m حدية دنيا (lower marginal function) للدالة L إذا تحققت العلاقة التالية :

$$m : Y \longrightarrow \overline{R} \qquad (2) \text{ where } m(y) = \inf_{x \in X} L(x, y)$$

ويبرهن بسهولة أنه إذا كانت الدالة L محدبة – مقعرة فإن الدالة M تكون محدبة والدالة m تكون مقعرة .

- تعرف النقطة $(\overline{x}, \overline{y})$ من $X \times Y$ بأنها نقطة سرجية (saddle point) للدالة L إذا حققت الشرط التالي :

$$L(\overline{x}, y) \le L(\overline{x}, \overline{y}) \le L(x, \overline{y}) \quad ; \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

وهو مكافئ للشرط :

$$M(\overline{x}) \le m(\overline{y}) \qquad (3)$$

- سنرمز لمجموعة النقاط السرجية للدالة L بالرمز (argminmax L) وتعطى بالشكل :

$$\text{argminmax L} = \left\{ (\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y : L(\overline{x}, y) \le L(\overline{x}, \overline{y}) \le L(x, \overline{y}),\ \forall (x, y) \in X \times Y \right\}$$

- من أجل كل $\varepsilon > 0$, عرف ماكليندن(Mclinden) في [9] النقطة $(\overline{x}, \overline{y})$ بإنّها ε– نقطة سرجية للدالة L إذا حققت الشرط التالي:

$$L(\overline{x}, y) - \varepsilon \le L(\overline{x}, \overline{y}) \le L(x, \overline{y}) + \varepsilon \qquad \forall (x, y) \in X \times Y \qquad (4)$$

نعرّف مجموعة ε - النقاط السرجية للدالة L والتي يرمز لها ε-argminmax L بالعلاقة :

$$\varepsilon\text{-argminmax L} = \left\{ (\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y : L(\overline{x}, y) - \varepsilon \le L(\overline{x}, \overline{y}) \le L(x, \overline{y}) + \varepsilon \quad ; \quad \forall (x, y) \in X \times Y \right\}$$

وقد تم تعريف المجموعة ε-argminmax L من قبل ATTOUCH [13] بالاعتمادعلى الدوال الحدية العليا والدنيا بالصورة التالية:

$$\varepsilon\text{-argminmax L} = \left\{ (\overline{x}, \overline{y}) \in X \times Y : \overline{x} \in \varepsilon - \arg\min M,\ \overline{y} \in \varepsilon - \arg\max m \right\} \qquad (5)$$

حيث:

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon-\arg\min M=\left\{\bar{x}\in X\ :M(\bar{x})\leq Sup\left\{InfM+\varepsilon,-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\}\\ \varepsilon-\arg\max m=\left\{\bar{y}\in Y\ :m(\bar{y})\geq Inf\ \left\{Supm-\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}\right\}\right\}\end{array}\right\}$$

ولقد برهن ATTOUCH[13] مبرهنة (4.2)) انه على مجموعة صفوف الدوال المحققة للشرط $InfM=Supm$ تكون العلاقتان (4) و(5) متكافئتان .

- من السهل برهان أن : $\text{argminmax L}=\bigcap_{\varepsilon>0}\varepsilon-\ \text{argminmax L}$

نعرف أيضاً مقطع الدالة L ذو الدليلين الحقيقيين α,β ويرمز له بـ $S_{\alpha,\beta}^{L}$ بالعلاقة التالية :

$$S_{\alpha,\beta}^{L}:=\{(x,y)\in X\times Y\ :M(x)\leq\alpha,m(y)\geq\beta\}\qquad(6)$$

هذه المجموعة محدبة , إذا كانت الدالة L محدبة – مقعرة , وهي غير خالية عندما تكون :

$$\alpha>\inf_{X}M \text{ و } \beta<\sup_{Y}m$$

نعرف المجال الفعلي للدالة L ويرمز له بـ $domL$ بالعلاقة :

$$\begin{aligned}domL&=dom_1L\times dom_2L\\&=\{x\in X\ :L(x,.)>-\infty\}\times\{y\in Y\ :L(.,y)<+\infty\}\end{aligned}\qquad(7)$$

تعريف 2.2:

ليكن (X,X^{*}) , (Y,Y^{*}) فضائي باناخ انعكاسيين كل منهما متوضعثنويا بشكل الثنا الخطية الثنوي وسنرمز لشكل الثنا الخطية $<.,.>$. حيث أن X^{*} هو الفضاء الثنوي لـــلفضاء X و Y^{*} هو الفضاء الثنوي للفضاء Y .

- رقول عن الدالة $F:X\times Y^{*}\longrightarrow\bar{R}$ أنها قرينة محدبة (*convex parent*) للدالة L إذا تحققت العلاقة :

$$F(x,y^{*})=\sup_{y\in Y}\{L(x,y)+<y,y^{*}>\}\qquad(8)$$

ونقول عن الدالة $G:X^{*}\times Y\longrightarrow\bar{R}$ أنها قرينة مقعرة (*convex parent*) للدالة L إذا تحققت العلاقة :

$$G(x^{*},y)=\inf_{x\in X}\{L(x,y)-<x,x^{*}>\}\qquad(9)$$

وينتج مباشرة من التعريف أن F دالة محدبة على $X\times Y^{*}$ و G دالة مقعرة على $X^{*}\times Y$.

- يقال أن الدالة L مغلقة إذا كان كل من $F^*=-G\,,\,F=-G^*\,G^*\,,\,F^*$ دالة مرافقة لكل من G,F على الترتيب , ويقال أن L دالة خاصة إذا كان $domL\neq\phi$, ويقال أن الدالتين متكافئتان إذا كان لهما نفس الدوال القرينة .

تعريف 2.3[18]: (تقارب موسكو- فوق/ تحت البياني)(Mosco-epi/hypo-convergence)

ليكن $X\,,Y$ فضائي باناخ انعكاسيين ولتكن $\left\{K_n,K:X\times Y\to\overline{R}\ ,\ n\in N\right\}$ متتالية من الدّوال المحدبة- المقعرة, المغلقة .

تعرف النهاية العليا وفق مفهوم موسكو- فوق/ تحت - البياني للمتتالية $(K_n)_{n\in N}$ ويرمز لها بـ $e_s/h_w-ls\,K_n$ بالعلاقة:

$$\left(e_s/h_w-ls\,K_n\right)(x,y)=\sup_{y_n\xrightarrow[n]{w}y}\ \inf_{x_n\xrightarrow[n]{s}x}\ \limsup_n K_n\left(x_n,y_n\right)\quad(10)$$

وتعرف النهاية الدنيا وفق مفهوم موسكو- فوق/ تحت - البياني للمتتالية $(K_n)_{n\in N}$ ويرمز لها بـ $h_s/e_w-li\,K_n$ بالعلاقة :

$$\left(h_s/e_w-li\,K_n\right)(x,y)=\inf_{x_n\xrightarrow[n]{w}x}\ \sup_{y_n\xrightarrow[n]{s}y}\ \liminf_n K_n\left(x_n,y_n\right)\quad(11)$$

أيّاً كان (x,y) من $X\times Y$.

إذ s (w) تشير إلى التبولوجيا القوية (الضعيفة) على $X\times Y$.

- نقول إنَّ المتتالية $(K_n)_{n\in N}$ تتقارب وفق مفهوم موسكو- فوق/ تحت- البياني نحو K ونرمز لها بـ

$$K_n\xrightarrow{M-e/h}K \quad \text{أو} \quad K=M-e/h-\lim_n K_n$$

إذا تحققت العلاقة التالية:

$$e_s/h_w-ls\,K_n\leq K\leq\ h_s/e_w-li\,K_n$$

نلاحظ عندما تكون الدوال $(K_n)_{n\in N}$ غير مرتبطة بالمتحول y فإنَّ تعريف تقارب موسكو- فوق/ تحت- البياني يتطابق مع تعريف تقارب موسكو- فوق البياني بالنسبة للمتحول الأول وعندما تكون الدوال $(K_n)_{n\in N}$ غير مرتبطة بالمتحول x فإنَّ تعريف تقارب موسكو- فوق/ تحت- البياني يتطابق مع تعريف تقارب موسكو- تحت البياني بالنسبة للمتحول الثاني .

مبرهنة 2.4 [17]:

ليكن X, Y فضائي باناخ انعكاسيين ولتكن $\{F_n, F : X\times Y^* \to \overline{R}\ ,\ n\in N\}$ متتالية الدّوال القرينية المحدبة و المغلقة المتعلقة بالدّوال المحدبة - المقعرة و المغلقة $\{K_n, K : X\times Y \to \overline{R}\ , n\in N\}$ عندئذٍ $(i)\Leftrightarrow(ii)$ حيث :

$$i)\ F_n \xrightarrow{M} F$$

$$ii)\ K_n \xrightarrow{M-e/h} K$$

تعريف2.5: تحت التفاضل (Sous-differential)

يعرف مؤثر التفاضل الجزئي ∂L لدالة محدبة - مقعرة L في النقطة (x,y) من $X\times Y$ بالعلاقة:

$$\partial L(x,y) := \partial_1 L(x,y)\times(-\partial_2(-L)(x,y))$$

إذ $\partial_1 L, \partial_2 L$ يدل على التفاضل الجزئي للدالة L بالنسبة للمتحول الأول $x\to L(x,y)$, المتحول الثاني $y\to L(x,y)$ على الترتيب .

أي أن:

$$(x^*,y^*)\in\partial L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases} L(\zeta,y)\ge L(x,y)+<\zeta-x,x^*>, & \forall\zeta\in X\\ L(x,\eta)\le L(x,y)-<y^*,\eta-y>, & \forall\eta\in Y\end{cases}\quad(12)$$

نلاحظ من هذا التعريف ومن تعريف argminmax L أنه يمكننا استنتاج التكافؤ التالي :

$$(13)\ (0,0)\in\partial L(\bar{x},\bar{y})\Leftrightarrow(\bar{x},\bar{y})\in \text{argminmax L}$$

و من أجل مجموعة صفوف الدوال المحققة للشرط $\inf\sup L=\sup\inf L$ نستنتج أن :

$$0\in\partial(-m)(y)\ ,\ 0\in\partial M(x)\Leftrightarrow(0,0)\in\partial L(x,y)\qquad(14)$$

وبالطريقة نفسها نعرف ε - التفاضل الجزئي للدالة L بالعلاقة:

أياً كان $\varepsilon>0$ و $(x,y)\in X\times Y$ فإن:

$$\partial_\varepsilon L(x,y)=\partial_{1,\varepsilon}L(x,y)\times(-\partial_{2,\varepsilon}(-L)(x,y))$$

$$(x^*,y^*)\in\partial_\varepsilon L(x,y)\Leftrightarrow\begin{cases}L(\zeta,y)\geq L(x,y)+<\zeta-x,x^*>-\varepsilon\ ;\ \forall\zeta\in X\\ \\ L(x,\eta)\leq L(x,y)-<y^*,\eta-y>+\varepsilon\ ;\ \forall\eta\in Y\end{cases}\qquad(15)$$

ويتم التحقق بسهولة أن :

$$\partial L(x,y)=\bigcap_{\varepsilon>0}\partial_\varepsilon L(x,y)$$

مبرهنة 2.6 [10,13]:

لتكن L دالة محدبة - مقعرة مغلقة وخاصة , عندئذ من أجل $\varepsilon>0$ و $(x,y)\in X\times Y$ فإن الشروط التالية متكافئة :

$$i)\ (x^*,-y^*)\in\partial_\varepsilon L(x,y)$$

$$ii)\ (x^*,y)\in\partial_\varepsilon F(x,y^*)$$

$$iii)\ (-x,-y^*)\in\partial_\varepsilon G(x^*,y)$$

الآن لنذكر ببعض التعاريف والخصائص الأساسية المتعلقة بالمؤثرات الرتيبة العظمى .

- ليكن H فضاء هلبرت مزوداً بالجداء الداخلي $<.,.>$, والنظيم $\|.\|$ وليكن A مؤثراً معرفاً على H .
ونعرف مجال المؤثر A بالعلاقة : $domA=\{x\in H\ /A(x)\neq\phi\}$

- يعرف بيان المؤثر(graph$A$) A يرمز له بـ G(A) بالعلاقة : $G(A)=\{(x,y)\in H\times H\ /y\in A(x)\}$

- نقول إن المؤثر A رتيب (Monotone) إذا تحقق الشرط : أياً كان $(x_1,y_1)\in G(A)$ و $(x_2,y_2)\in G(A)$
فإن $\langle y_1-y_2,x_1-x_2\rangle$

- نقول عن المؤثر الرتيب A إنه أعظمي إذا كان بيانه أعظمياً في صف المؤثرات الرتيبة بالنسبة لعلاقة الاحتواء $(\subset)$.

أي أنه إذا كان $G(A)\subset G(B)$ و B رتيب فإن $A=B$.

تعريف [1]2.7: تقارب البيان (graphe convergence)

لتكن $\{A_n, A, n \in N\}$ متتالية من المؤثرات الرتيبة العظمى المعرفة على H . نقول أن $(A_n)_{n\in N}$ متقاربة وفق مفهوم البيان نحو A ونرمز له بـ $A_n \xrightarrow{G} A$ أو $A = G-\lim\limits_{n} A_n$ إذا تحقق الشرط : من أجل كل $(x,y)\in A$ توجد متتالية

$$(x_n,y_n)\in A_n \text{ بحيث يكون } : (x,y)=\lim_n (x_n,y_n)$$

نلاحظ أن A يعرف بيانه أي $(x,y)\in A \Leftrightarrow y\in Ax$. وقد برهن أتوش في [1] أنه إذا كان $A_n \xrightarrow{G} A$ وكان من أجل كل $n\in N$, $(x_n,y_n)\in A_n$ و $(x_n,y_n)\xrightarrow[n]{}(x,y)$ فإن $(x,y)\in A$.

من أجل دالة محدبة– مقعرة $\{L : X\times Y \to \overline{R}\}$ نعرف المؤثر A^L بالعلاقة :

$$A^L := \partial_1 L(x,y)\times\partial_2(-L(x,y))$$

وقد برهن روكافولار[9] أن A^L مؤثر رتيبي أعظمي .

ولنذكر بالنتيجة التي تربط بين التقارب فوق/ تحت- البيان لمتتالية من الدوال المحدبة- المقعرة وبين تقارب البيان لمتتالية المؤثرات التفاضلية الموافقة .

مبرهنة [2]2.8:

لتكن $\{L_n, L : X\times Y \to \overline{R}, n\in N\}$ متتالية من الدوال المحدبة- المقعرة المغلقة والخاصة (إذ X و Y هما فضاءا باناخ انعكاسيان) , عندئذ الشرطان التاليان متكافئان :

$$i)\ L = M-e/h-\lim_n L_n$$

$$ii)\ \partial L = G-\lim_n(\partial L_n)+C.N.$$

حيث :

$$C.N.\begin{cases}\exists(x_n,y_n)\xrightarrow{X\times Y}(x,y),(x_n^*,y_n^*)\xrightarrow{X^*\times Y^*}(x^*,y^*)/(x_n^*,y_n^*)\in K_n(x_n,y_n)\\(x^*,y^*)\in\partial K(x,y)\ ,\ K_n(x_n,y_n)\xrightarrow[n]{}K(x,y)\end{cases}$$

3- استقرارية ε - النقاط السرجية:

مبرهنة3.1 :

ليكن كل من X و Y فضاءاً تبولوجياً و $L:X\times Y\longrightarrow\overline{R}$ دالة محدبة – مقعرة , ولتكن M (m) الدالة الحدية العليا (السفلى) للدالة L على الترتيب . لكل $\varepsilon>0$ فأن :

$$i)\qquad(\overline{x},\overline{y})\in\varepsilon-\arg\min\max L\Rightarrow\begin{cases}\overline{x}\in2\varepsilon-\arg\min M\\\overline{y}\in2\varepsilon-\arg\max m\\\inf\sup L-\sup\inf L\le2\varepsilon\end{cases}$$

$$ii)\qquad\left.\begin{cases}\overline{x}\in\varepsilon-\arg\min M\\\overline{y}\in\varepsilon-\arg\max m\\\inf\sup L-\sup\inf L\le\varepsilon\end{cases}\right\}\Rightarrow(\overline{x},\overline{y})\in3\varepsilon-\arg\min\max L$$

في الحالة الخاصةعندما يكون $\inf\sup L=\sup\inf L$ نحصل على المبرهنة 4.2 في [13] .

البرهان :

برهان (i):

بفرض $(\overline{x},\overline{y})\in\varepsilon$ - argminmax L عندئذ حسب العلاقة (4) يكون:

$$L(\overline{x},y)-\varepsilon\le L(\overline{x},\overline{y})\le L(x,\overline{y})+\varepsilon\quad;\quad\forall(x,y)\in X\times Y$$

لنأخذ inf على x من X و sup على y من Y فنحصل على :

$$L(\overline{x},y)-\varepsilon\le m(\overline{y})+\varepsilon\quad;\quad\forall y\in Y$$
$$M(\overline{x})-\varepsilon\le L(x,\overline{y})+\varepsilon\quad;\quad\forall y\in Y$$

ونعلم حسب تعريف M و m في العلاقتين (1) و (2) أن :

$$L(\overline{x},y)\ge m(y)\ \text{و}\ L(x,\overline{y})\le M(x)$$

وبالتالي من العلاقتين السابقتين نجد أن :

$$m(y)-2\varepsilon\le m(\bar{y})\ ,\quad \forall y\in Y$$
$$M(x)+2\varepsilon\le M(\bar{x})\ ,\quad \forall x\in X$$

أي أن :

$$\bar{y}\in 2\varepsilon-\arg\max m$$
$$\bar{x}\in 2\varepsilon-\arg\min M$$

من جهة أخرى لدينا حسب تعريف ε - النقطة السرجية العلاقة (3) أن :

$$M(\bar{x})\le m(\bar{y})$$
$$M(\bar{x})-\varepsilon\le m(\bar{y})+\varepsilon$$

وبالتالي :

$$\inf_{x\in X} M(x)-\varepsilon\le \sup_{y\in Y} m(y)+\varepsilon$$

ومنه :

$$\inf_x \sup_y L-\sup_y \inf_x L\le 2\varepsilon$$

برهان (ii):

لدينا :

$$\bar{x}\in\varepsilon-\arg\min M\Rightarrow M(\bar{x})\le \inf_x M(x)+\varepsilon$$
$$\bar{y}\in\varepsilon-\arg\max m\Rightarrow m(\bar{y})\ge \sup_y m(y)-\varepsilon$$

من هاتين العلاقتين والعلاقة $m(\bar{y})\le L(\bar{x},\bar{y})\le M(\bar{x})$ نحصل على :

$$\inf_{x\in X} M(x)-2\varepsilon\le L(\bar{x},\bar{y})\le \sup_{y\in Y} m(y)+2\varepsilon$$

ومنه : $M(\bar{x})-3\varepsilon\le L(\bar{x},\bar{y})\le m(\bar{y})+3\varepsilon$

ومن ثم :

$$L(\bar{x},y)-3\varepsilon\le L(\bar{x},\bar{y})\le L(x,\bar{y})+3\varepsilon\ ;\ \forall(x,y)\in X\times Y$$

أي أن : $(\bar{x},\bar{y})\in 3\varepsilon-\arg\min\max L$ وهو المطلوب . ■

4- ε -النقاط السرجية الحدية :

لابد أن نذكر بتعريف ε - النقطة الحدية لدالة معطاة في البداية (راجع [4,5])

Journal of College of Education for pure sciences(JCEPS)
Web Site: http://eps.utq.edu.iq/ Email: com@eps.utq.edu.iq
Volume 7, Number 1, January 2017

ليكن X فضاء باناخ ولتكن $f:X\to R\cup\{+\infty\}$, دالة نصف مستمرة من الأدنى وخاصة ولتكن $\varepsilon>0$,

إن المبدأ الأساس لإكلاند[5] يؤكد على وجود $\bar{x}$ من X بحيث :

$$f(x)>f(\bar{x})-\varepsilon\|x-\bar{x}\|,\ \forall x\in X\ ,\ x\neq\bar{x} \qquad (16)$$

إذا كانت هذه العلاقة محققة , نقول إن $\bar{x}$ هي ε - نقطة حدية للدالة f , ويرمز لمجموعة ε - النقاط الحدية لـ f بـ $\varepsilon-extf$.

سنعد أن الفضاء الديكارتي $X\times Y$ $\left(X^*\times Y^*\right)$ مزوداً بالنظيم داءماً على الترتيب :

$$\|(x,y)\|=Max\{\|x\|,\|y\|\} \qquad \left(\left\|(x^*,y^*)\right\|=Max\left\{\|x^*\|,\|y^*\|\right\}\right)$$

تعريف [3]4.1:

ليكن X,Y فضائينلباناخ ولتكن $\{L:X\times Y\to\bar{R}\}$ دالة ذات متحولين , وليكن $\varepsilon>0$, نقول عن $\left(\bar{x},\bar{y}\right)$ من $X\times Y$ أنها ε - نقطة سرجية حدية للدالة L إذا وفقط إذا تحققت العلاقة :

$$L(x,\bar{y})+\varepsilon\|x-\bar{x}\|>L(\bar{x},\bar{y})>L(\bar{x},y)-\varepsilon\|y-\bar{y}\|\ ,\ \forall(x,y)\neq(\bar{x},\bar{y}) \qquad (17)$$

نرمز لمجموعة ε - النقاط السرجية الحدية للدالة L بـ$\left(\varepsilon-extL\right)$

تعريف 4.2:

لتوضيح الدالة $\{L:X\times Y\to\bar{R}\}$ و $\varepsilon>0$, نعرف مجموعة ε - النقاط الحدية (ε - النقاط الحدية التامة) للمؤثر L , ويرمز لها بـ $\varepsilon-ext\,\partial L$, $\left(\varepsilon-ext_s\partial L\right)$ على الترتيب , بالعلاقة :

$$\varepsilon-ext\,\partial L=\left\{(x,y)\in X\times Y\ /\ \exists(x^*,y^*)\in\partial L(x,y),\left\|(x^*,y^*)\right\|\leq\varepsilon\right\} \qquad (18)$$

$$\varepsilon-ext_s\partial L=\left\{(x,y)\in X\times Y\ /\ \exists(x^*,y^*)\in\partial L(x,y),\left\|(x^*,y^*)\right\|<\varepsilon\right\} \qquad (19)$$

وفيما يلي سنعطي العلاقة بين مجموعة ε - النقاط السرجية الحدية للدالة L , ومجموعة ε - النقاط الحدية للمؤثر تحت التفاضلي ∂L في المبرهنة التالية :

مبرهنة 4.3 :

ليكن X,Y فضائي باناخ ولتكن $\{L:X\times Y\to\bar{R}\}$ دالة محدبة – مقعرة مغلقة وخاصة ,عندئذ من أجل كل $\varepsilon>0$ تكون العلاقة التالية محققة :

$$\varepsilon-ext_s\left(\partial L\right)\subset\varepsilon-ext\ L\subset\varepsilon-ext\left(\partial L\right)$$

البرهان :

ليكن $\left(x\,,y\right)\in\varepsilon-ext_s\partial L$ إذاً حسب تعريف مجموعة (ε - النقاط الحدية التامة لـ ∂L)

يوجد (x^*,y^*) من $\partial L(x,y)$ و $\left\|\left(x^*,y^*\right)\right\|<\varepsilon$, وحسب التعريف 2.5 للمؤثر تحت – التفاضلي ∂L يكون :

$x^*\in\partial_1 L(x,y)$ و $-y^*\in\partial_2\left(-L(x,y)\right)$ وهذا يعني أن :

$$L(\zeta,y)\ge L(x,y)+<\zeta-x\,,x^*>\ ;\ \ \forall\zeta\in X \qquad (20)$$

$$L(x\,,\eta)\le L(x,y)-<y^*,\eta-y>\ ;\ \ \forall\eta\in Y \qquad (21)$$

مع $\left\|x^*\right\|<\varepsilon\ \ ,\ \ \left\|y^*\right\|<\varepsilon$

من العلاقة (20) نجد أن :

$$\begin{aligned}L(\zeta,y)&\ge L(x,y)-\left\|x^*\right\|.\left\|\zeta-x\right\|\ ;\ \ \forall\zeta\in X\\&>L(x,y)-\varepsilon\left\|\zeta-x\right\|\ ;\ \ \forall\zeta\ne X\end{aligned} \qquad (22)$$

من العلاقة (21) نجد أن :

$$\begin{aligned}L(x\,,\eta)&\le L(x,y)+\left\|y^*\right\|.\left\|\eta-y\right\|\ ;\ \ \forall\eta\in Y\\&<L(x,y)+\varepsilon\left\|\eta-y\right\|\ ;\ \ \forall\eta\ne Y\end{aligned} \qquad (23)$$

من العلاقتين (22) و (23) وبمقارنتهما مع العلاقة (17) نجد أن $\left(x\,,y\right)\in\varepsilon-extL$ ومن ثم يكون :

$$\varepsilon-ext_s\left(\partial L\right)\subset\varepsilon-ext\ L$$

بفرض $\left(\overline{x}\,,\overline{y}\right)\in\varepsilon-ext\ L$ عندئذ $\forall(x,y)\in X\times Y\ \ ,\ \ (x,y)\ne\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ فإن :

$$L(x\,,\overline{y})+\varepsilon\left\|x-\overline{x}\right\|>L(\overline{x}\,,\overline{y})>L(\overline{x}\,,y)-\varepsilon\left\|y-\overline{y}\right\|$$

ومنه :

$$L(\overline{x}\,,y)-\varepsilon\left\|y-\overline{y}\right\|\le L(\overline{x}\,,\overline{y})\le L(x\,,\overline{y})+\varepsilon\left\|x-\overline{x}\right\|\ ,\ \ \forall(x,y)\in X\times Y$$

لنأخذ الـ inf على X للقسم الأيمن و sup على Y للقسم الأيسر في العلاقة السابقة فنحصل على :

$$L(\bar{x},\bar{y}) \le \inf_{x\in X}\left\{L(x,\bar{y})+\varepsilon\|x-\bar{x}\|\right\} \qquad (24)$$

$$L(\bar{x},\bar{y}) \ge \sup_{y\in Y}\left\{L(\bar{x},y)-\varepsilon\|y-\bar{y}\|\right\}$$

$$L(\bar{x},\bar{y}) \ge -\inf_{y\in Y}\left\{(-L)(\bar{x},y)+\varepsilon\|y-\bar{y}\|\right\}$$

$$(-L)(\bar{x},\bar{y}) \ge \inf_{y\in Y}\left\{(-L)(\bar{x},y)+\varepsilon\|y-\bar{y}\|\right\} \qquad (25)$$

بتطبيق المبرهنة 3.2 في [8] التي تنص (إذا كان $f \in \Gamma(x)$ وكان من أجل $\varepsilon > 0$ و $\bar{x} \in X$ $f(\bar{x}) \le \inf_{x\in X}\left\{f(x)+\varepsilon\|x-\bar{x}\|\right\}$, فإن $\bar{x} \in \partial f(x)$, $\|\bar{x}\| \le \varepsilon$)على العلاقتين (24) و (25) نحصل على:

$$\bar{x} \in \partial_1 L(x,y)\,,\; \bar{y} \in \partial(-L)(x,y) \quad \text{مع} \quad \|\bar{x}\| \le \varepsilon \;,\; \|\bar{y}\| \le \varepsilon$$

أي أن $(\bar{x},\bar{y}) \in \partial L(x,y)$, $\|(\bar{x},\bar{y})\| \le \varepsilon$, ومنه $(\bar{x},\bar{y}) \in \varepsilon - ext\,(\partial L)$ وهو المطلوب. ■

مبرهنة 4.4 :

إذا كان كل من X , Y فضاءاً باناخ انعكاسياً ولتكن $\left\{L_n, L : X\times Y \to \bar{R} \;, n\in N\right\}$ متتالية من الدوال المحدبة – المقعرة المغلقة والخاصة بحيث يكون $L = Mosco - \lim_{e/h} L_n$ فأن:

$$\varepsilon - ext\; L \subset \bigcap_{\varepsilon'>\varepsilon} \lim_n \inf\left(\varepsilon' - ext\; L_n\right)$$

البرهان :

بما أن $L = Mosco - \lim_{e/h} L_n$ فإنه حسب المبرهنة 2.8 يكون $\partial L = G - \lim_n \partial L_n$

ليكن $(x,y) \in \varepsilon - extL$, إذاً حسب المبرهنة 4.4 يكون :

$$(x,y) \in \varepsilon - ext\,(\partial L)$$

أي أنه يوجد $(\zeta,\eta) \in X\times Y$, بحيث يكون $(\zeta,\eta) \in \partial L\,(x,y)$ و $\|(\zeta,\eta)\| \le \varepsilon$

من أجل كل $\varepsilon' > \varepsilon$ لدينا $(\zeta,\eta) \in \partial L\,(x,y)$ و $\|(\zeta,\eta)\| \le \varepsilon'$.

ولما كانت $\partial L = G - \lim_n \partial L_n$ فإنه توجد متتالية $(\zeta_n,\eta_n) \xrightarrow[n]{} (\zeta,\eta)$ و $(x_n,y_n) \xrightarrow[n]{} (x,y)$ بحيث يكون :

$$(\zeta_n,\eta_n) \in \partial L_n\,(x_n,y_n)$$

وبما أن $\|(\zeta,\eta)\| < \varepsilon'$ فإنه من أجل n كبيرة بما فيه الكفاية يكون : $\|(\zeta_n,\eta_n)\| < \varepsilon'$ و $(\zeta_n,\eta_n) \in \partial L_n(x_n,y_n)$

ومنه $(\zeta_n,\eta_n) \in \varepsilon' - ext_s\left(\partial L_n\right)$, وحسب المبرهنة 4.3 نحصل على :

$$(x_n,y_n) \in \varepsilon' - extL_n \text{ و } (x_n,y_n) \xrightarrow[n]{} (x,y)$$

إذاً حسب تعريف النهاية السفلى يكون :

$$(x,y) \in \lim_n \inf\left(\varepsilon' - ext\ L_n\right)$$

ومن ثم : $(x,y) \in \bigcap\limits_{\varepsilon'>\varepsilon} \lim_n \inf\left(\varepsilon' - ext\ L_n\right)$ وهو المطلوب . ■

References

[1] ATTOUCH, H.(1984). Variational convergence for functions and operators,Pitman,applicable mathematics
series.

[2] ATTOUCH, H; AZE, D. ; WETS,R.(1988) Convergence of convex-concave saddle functions,continuity
Fproperties of legendrefenchel transforme With applications to convex programming and mechanics,Techn.Report . AVAMAC . Univ. Pirpignan n° 85-08 , to appearAnn-inst. Poincare.

[3] H.ATTOUCHet H.Riahi.(1993).Stability Results for Ekelands -variational principle and cone Extremals lutions. Mathematics of operations Research,vol.18,No.1.

[4] GUILLERME , J.(1985). convergence of approximatesaddle points.Universite de Limoges.

[5] G.Greco .(1984).saddletopology and min-maxtheorems .Tech . Report . Univ. Trento .

[6] L.Mc Linden : dualoperations on saddlefunctions .Trans. Amer. Math. Soc. 179 , 363-381 .

[7] R.T.ROCKAFELLAR.(1971).Saddle-points and convex Analysis,in differential Games and related topics H.Wkuhu and G.P.Szegpp .109-127 .Academic press , New-York 1971.

[8]R.T.ROCKAFELLAR.(1964).Minmax theorems and conjugate saddle functions.Math.Scand.14,151-173.

[9] R.T.ROCKAFELLAR.(1968).Ageneral correspondence between dual minimax problems and convexprograms pac.Jour.Of maths Vol.25, n° 3,597-611.

[10]SOUEYCATT,M.(1978).Epi- convergence et convergence des sections . Application a La stabilite despoints-sells.A.V.A.M.C.vol.II.

[11] M.SOUEYCATT.(1991).Analyseepi/hypo-graphique .J.convex Analysis, vol. II ,(13),1-55.

[12]ATTOUCH,H;WETS,R.(1991).Quantitative stability of varational system: I The epigrphical distance.Tran. Amer. Soc. N° 2, 695-729.

[13]ATTOUCH,H;WETS,R.(1987).Lipschitzianstability of - approximate solutions in convexoptimizatio, IIASA.Laxenburg,wp,87-125.

[14]BEER,G.(1991).Conjugate convex function, and the epi-distance topology, Proc. Amer. Soc.108, 117-126.

[15] BEER,G.(1992). LUCCHETTI, R: Coninuity results for the epi-distance topology with applications to convexoptimization problems, Math. Oper.Res.17,715-726.

[16]ATTOUCH,H;WETS,R.(1983).Convergence Theory of saddle functions,Trans,Aaer.Math.Soc.280, n (1),1-14.

[17]ATTOUCH,H;AZE,D.;WETS,R.(1988).Convergence of convex-concave saddle functions,Ann.H.Poincare,Analyse non linéaire,5,532-572.

[18] U.Mosco(1971).on the continutity of the young-fenchel transformation Journ. Math.Anal.Appl.35 ,518-35.