On the Basis Number of Some Special Graphs for Mycielski's Graph

Ghassan T. Marougi **Raghad A. Mustafa**
Raghad.Math@uomosul.edu.iq
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Iraq

Received on: 26/12/2010 **Accepted on: 16/05/2011**

ABSTRACT

The basis number b(G) ,of a graph G is defined to be the least positive integer k such that G has a k-fold basis for it's cycle space. In this research paper,we have studied the basis number of some special graphs for Mycielski's graph .It is proved that

$b(\mu(P_n)) \le 2, b(\mu(S_n)) \le 2, \quad n \ge 3$

$b(\mu(C_n)) = 3, \quad n \ge 4$

$b(\mu(T_{m,n})) = 3, \quad m \ge 3, n \ge 1$

$3 \le b(\mu(W_n)) \le 4, \quad n \ge 4$

$b(\mu(L_m)) = 3, \quad m \ge 2$

$b(\mu(CL_m)) = b(\mu(ML_m)) = 3, \quad m \ge 3$

Key words: Basis number, Cycle space.

حول العدد الأساس لبعض البيانات الخاصة لبيان ميشلسكي

غسان طوبيا مروكي **رغد عبد العزيز مصطفى**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2010/12/26 **تاريخ قبول البحث: 2011/05/16**

الملخص

يعرف العدد الأساس b(G)، لبيان G على انه أصغر عدد صحيح موجب k بحيث أن لـ G قاعدة ذات ثنية k لفضاء داراته. في هذا البحث درسنا العدد الأساس لبعض البيانات الخاصة لبيان ميشلسكي، حيث برهنا

$b(\mu(P_n)) \le 2, b(\mu(S_n)) \le 2, \quad n \ge 3$

$b(\mu(C_n)) = 3, \quad n \ge 4$

$b(\mu(T_{m,n})) = 3, \quad m \ge 3, n \ge 1$

$3 \le b(\mu(W_n)) \le 4, \quad n \ge 4$

$b(\mu(L_m)) = 3, \quad m \ge 2$

$b(\mu(CL_m)) = b(\mu(ML_m)) = 3, \quad m \ge 3$

الكلمات المفتاحية: العدد الاساس، فضاء الدارات.

المقدمة

في السنوات الأخيرة زاد الاهتمام بالعدد الأساس, نشير للقارئ الرجوع إلى البحوث[3], [4], [5], [6], [10], [11], [13] لمزيد من المعلومات .في بحثنا هذا سوف نفترض أن كل البيانات التي تعترضنا هي بيانات منتهية،غير موجهة وبسيطة؛ بالنسبة للمصطلحات غير المعرفة راجع المصدرين [8] و[9].

ليكن G بياناً متصلا حافاته $e_1, e_2, e_3, ..., e_q$. لكل مجموعة جزئية S من حافات G، يوجد متجه $(a_1, a_2, a_3, ..., a_q)$ يقابل S بحيث أن $a_i = 1$ إذا كان $e_i \in S$ و $a_i = 0$ إذا كان $e_i \notin S$. هذه المتجهات

تكوّن فضاء متجهات ذا البعد q على الحقل Z_2 , يطلق عليه فضاء المتجهات المقترن مع البيان G ويرمز له $(z_2)^q$. متجهات $(z_2)^q$ التي تقابل دارات G تولد فضاء متجهات جزئي يطلق عليه **فضاء الدارات** لـ G ويرمز له $\xi(G)$. كل متجه في $\xi(G)$ يمثل أما دارة في G أو اتحاد دارات منفصلة عن بعضها بالنسبة للحافات.

من النتائج المعروفة في نظرية البيان أن بعد $\xi(G)$ هو q-p+1 حيث أن p تمثل عدد رؤوس البيان G و q عدد حافاته.

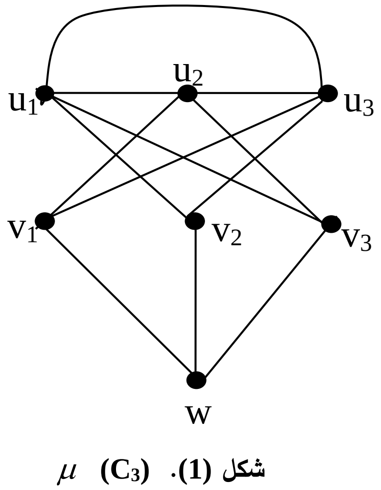
إن طريقة إيجاد القاعدة لفضاء الدارات $\xi(G)$ هي كالآتي:

لتكن T شجرة مولدة في G؛ إذا كانت e حافة تنتمي إلى G-T عندئذ, T+e يحتوي على دارة واحدة فقط ولتكن C_e.واضح أن q-p+1 من الدارات C_e , حيث $e \in G-T$ تشكل **قاعدة** لفضاء الدارات $\xi(G)$.

يقال لقاعدة B لفضاء الدارات $\xi(G)$ أنها ذات **ثنية–k** (k-fold) إذا كانت كل حافة من حافات G لا تظهر في أكثر من k من المرات (التكرارات) في الدارات التي تقابل المتجهات في القاعدة B.

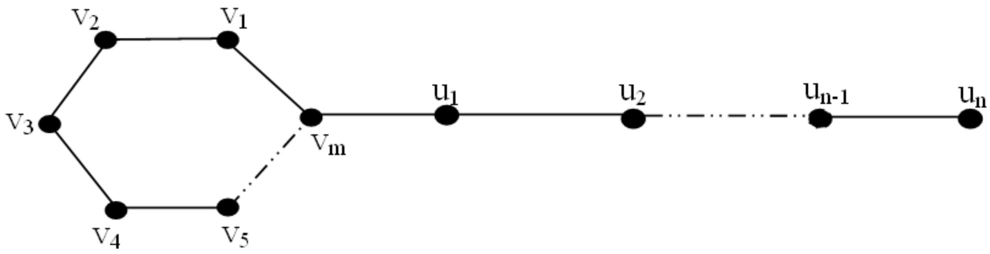
ويعرف العدد الأساس (*basis number*) لبيان G بأنه العدد الصحيح الأصغر k بحيث أن ξ(G) له قاعدة ذات ثنية–k ؛ ويرمز له b(G).إذا كانت B قاعدة لفضاء الدارات $\xi(G)$ وان e حافة في G ,عندئذ **الثنية للحافة e في B** يرمز لها $f_B(e)$, هي عدد الدارات الموجودة في B والمحتوية على الحافة e.

تعريف (1): ليكن G بيان مجموعة رؤوسه $V=\{u_1,u_2,u_3,...,u_n\}$ فان بيان ميشلسكي لـ G يتكون من G نفسه كبيان جزئي متشاكل, مع (n+1) من الرؤوس الإضافية , الرأس v_i يقابل u_i الموجود في G لكل $i=1,2,3,...,n$ ؛ مع راس آخر w متجاور مع كل رؤوس v_i بحيث ان هذه الرؤوس تكون بيان جزئي متشاكل مع النجمة $K_{1,n}$ ، إضافة إلى ذلك مقابل كل حافة u_iu_j في G فان بيان ميشلسكي يتضمن حافتين u_iv_j و v_iu_j وعليه إذا كان G بيان بـ n من الرؤوس وm من الحافات فان بيان ميشلسكي له 2n+1 من الرؤوس و3m+n من الحافات ويرمز له μ (G) . شكل (1) يمثل بيان ميشلسكي للدارة C_3 .



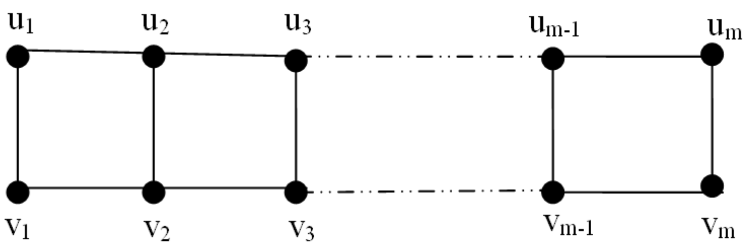
شكل (1). μ **(C₃)**

تعريف (2): يعرف البيان $(m,n)-$tadpole بأنه البيان الناتج من اتحاد الدارة $C_m=\{v_1,v_2,v_3,...,v_m\}$ والطريق $P_n=\{u_1,u_2,u_3,...,u_n\}$ مع الجسر v_mu_1 ويرمز له بالرمز $T_{m,n}$. واضح أن عدد رؤوس $T_{m,n}$ يساوي عدد حافاته ويساوي m+n، لاحظ الشكل (2) .



شكل (2). $T_{m,n}$

تعريف (3): يعرف بيان السلّم (*Ladder graph*) بأنه البيان الذي مجموعة رؤوسه
هي $\{u_i, v_i \ : i = 1,2,3,..., m\}$ومجموعة حافاته هي
$\{u_i v_i : i = 1,2,3,\ldots,m\} \bigcup \{u_i u_{i+1}, v_i v_{i+1} : \ i = 1,2,3,\ldots,m-1\}$ ويرمز له L_m ، لاحظ الشكل (3).



شكل (3). Lm

ويعرف بيان سلّم الدارة (***Circular ladder***) بأنه البيان الناتج من بيان السلم L_m بإضافة الحافتين $u_1 u_m$ و $v_1 v_m$ ويرمز له CL_m , **ويعرف بيان سلّم موبيس** (***Möbius ladder***) بأنه البيان الناتج من بيان سلم الدارة CL_m باستبدال الحافتين $u_1 u_m$ و $v_1 v_m$ بالحافتين $u_1 v_m$ و $u_m v_1$.

في عام 1937, برهن مكلين [12] أول مبرهنة مهمة في هذا الموضوع وهي تنص على "يكون البيان G مستويا إذا وفقط إذا $b(G) \le 2$ " وفي عامي 1981 و1982 برهن شميكل ([7],[14]) أن العدد الأساس للبيان التام K_n , $n \ge 5$ هو $b(K_n) = 3$ وللبيان ثنائي التجزئة التام $K_{m,n}$ ، $m, n \ge 5$ ، $b(K_{m,n}) = 4$ فيما عدا $K_{6,10}$ و $K_{6,n}$ لأجل $n = 5,6,7,8$ ومكعب n− Q_n , $n \ge 7$ ، $b(Q_n) = 7$. العدد الأساس للجداء المعاجمي (lexicographic product) تم حسابه في [2], كذلك العدد الأساس للجداء الديكارتي (Cartesian product) لبعض البيانات تم دراسته في [1].

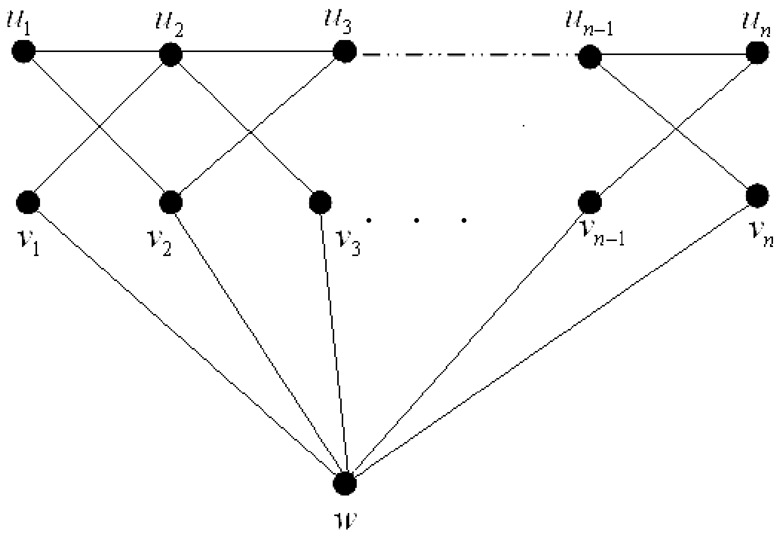
الغاية من بحثنا هو دراسة العدد الأساس لبعض البيانات الخاصة لبيان ميشلسكي حيث برهنا

$$b(\mu(P_n)) \le 2, b(\mu(S_n)) \le 2, \qquad n \ge 3$$
$$b(\mu(C_n)) = 3, \qquad n \ge 4$$
$$b(\mu(T_{m,n})) = 3, \qquad m \ge 3, n \ge 1$$
$$3 \le b(\mu(W_n)) \le 4, \qquad n \ge 4$$
$$b(\mu(L_m)) = 3, \qquad m \ge 2$$
$$b(\mu(CL_m)) = b(\mu(ML_m)) = 3, \quad m \ge 3$$

2- **النتائج الرئيسة:**

أولاً- إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(P_n)$:

لتكن رؤوس الدرب P_n هي $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ وان الرؤوس المقابلة لها هي $v_1, v_2, v_3, ..., v_n$ والرأس الأخر ليكن w واضح أن $v_i u_{i+1}, u_i v_{i+1}, u_i u_{i+1}$, $wv_i \bigcup \{wv_n\}$ هي حافات $\mu(P_n)$ لكل $i = 1,2,3,..., n-1$ ،عدد رؤوس $\mu(P_n)$ هو 2n+1 وعدد حافاته 4n-3، لاحظ الشكل (4).



شكل (4). $\mu(P_n)$

مبرهنة 1: $b(\mu(P_n) \le 2$, لكل $n \ge 3$ وعليه فان $\mu(P_n)$ بيان مستوي.

البرهان:

سوف نثبت انه توجد قاعدة B ذات ثنية 2, لتكن

$$B = M_1 \bigcup M_2 \bigcup \{C\}$$

حيث

$M_1 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} v_{i+1} u_i : i = 1,2,3,..., n-2\}$,
$M_2 = \{wv_i u_{i+1} v_{i+2} w : i = 1,2,3,..., n-2\}$,
and
$C = \{wv_1 u_2 u_1 v_2 w\}$.

$|B| = |M_1| + |M_2| + |C|$
$= (n-2) + (n-2) + 1$
$= 2n-3 = \dim \xi(\mu(P_n))$

الآن سوف نثبت أن دارات B مستقلة خطيا, واضح أن دارات M_1 مستقلة خطيا لأنها تشكل حدود بيان جزئي مستوي. كذلك دارات M_2 مستقلة لنفس السبب السابق، الدارة C مستقلة عن دارات M_1 وذلك لان C تحتوي على الحافة wv_1 وهذه الحافة غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات M_1 وعليه فان $M_1 \bigcup \{C\}$ دارات مستقلة

خطيا. من جهة ثانية، أي تركيب خطي من دارات $M_1\bigcup\{C\}$ يحوي على حافة من النوع u_iu_{i+1} لبعض قيم $i=1,2,3,...,n-1$ وهذه الحافة غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات M_2 وعليه فان $B=M_1\bigcup\{C\}\bigcup M_2$ دارات مستقلة خطيا، وعليه فهي تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(P_n))$. لإيجاد الثنية للقاعدة B، نجزأ حافات البيان $\mu(P_n)$ إلى :

$$E_1=\{u_iu_{i+1}: i=2,3,...,n-1\},$$
$$E_2=\{u_iv_{i+1}, v_iu_{i+1}: i=1,2,3,...,n-1\}-\{e_2,e_3,e_4\},$$
$$E_3=\{wv_i: i=1,2,3,...,n\}-\{e_5,e_6\},$$

حيث

$$e_1=u_1u_2, e_2=u_1v_2, e_3=v_1u_2, e_4=v_{n-1}u_n, e_5=wv_1, e_6=wv_2.$$

إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_1 فان

$$f_{M_1}(e)\le 2\ ;\ f_{M_2\bigcup\{C\}}(e)=0$$
$$\therefore\ f_B(e)\le 2.$$

إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_2 فان

$$f_{M_1}(e)\le 1\ ;\ f_{M_2}(e)\le 1; f_{\{C\}}(e)=0$$
$$\therefore\ f_B(e)\le 2.$$

بينما إذا كانت e حافة تنتمي إلى E_3 فان

$$f_{M_1\bigcup\{C\}}(e)=0\ ;\ f_{M_2}(e)\le 2$$
$$\therefore\ f_B(e)\le 2.$$

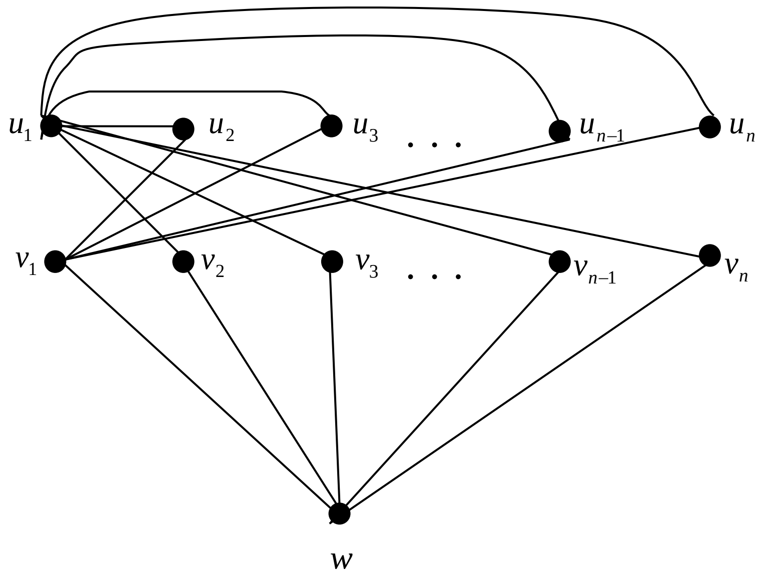
الآن

$$f_{M_1}(e_1)=1\ ;\ f_{M_2}(e_1)=0\ ;\ f_{\{C\}}(e_1)=1$$
$$\therefore\ f_B(e_1)=2.$$
$$f_{M_1}(e_2)=1\ ;\ f_{M_2}(e_2)=0\ ;\ f_{\{C\}}(e_2)=1$$
$$\therefore\ f_B(e_2)=2.$$
$$f_{M_1}(e_3)=0\ ;\ f_{M_2}(e_3)=1;\ f_{\{C\}}(e_3)=1$$
$$\therefore\ f_B(e_3)=2.$$
$$f_{M_1}(e_4)=1\ ;\ f_{M_2\bigcup\{C\}}(e_4)=0$$
$$\therefore\ f_B(e_4)=1.$$
$$f_{M_1}(e_5)=0\ ;\ f_{M_2}(e_5)=1\ ;\ f_{\{C\}}(e_5)=1$$
$$\therefore\ f_B(e_5)=2.$$
$$f_{M_1}(e_6)=0\ ;\ f_{M_2}(e_6)=1\ ;\ f_{\{C\}}(e_6)=1$$
$$\therefore\ f_B(e_6)=2.$$

وعليه، فان الثنية لكل حافة في البيان $\mu(P_n)$ لاتزيد عن 2 في القاعدة B. أي أن B هي قاعدة ذات ثنية 2.

ثانياً- إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(S_n)$:

لتكن رؤوس S_n هي $u_1, u_2, u_3, ..., u_n$ حيث أن $\deg(u_1) = n-1$ وبقية الرؤوس هي بدرجة واحد, واضح أن $S_n \cong K_{1,n-1}$. الآن سوف ندرس العدد الأساس لبيان ميشلسكي للنجمة S_n،حيث أن عدد رؤوس $\mu(S_n)$ هو 2n+1 وعدد حافاته هي 4n-3 وأن بيان ميشلسكي للبيان S_n هو المبين في الشكل (5).



شكل (5). $\mu(S_n)$

مبرهنة 2: $b(\mu(S_n)) \le 2$، لكل $n \ge 3$ وعليه فان $\mu(S_n)$ بيان مستوي.

البرهان:

واضح أن $S_3 = P_3$ وحسب مبرهنة (1) فان $b(\mu(S_3)) \le 2$

لإكمال البرهان، تأمل مجموعة الدارات

$$B(\mu(S_n)) = S_1 \bigcup S_2 \bigcup \{C\}$$

حيث

$$S_1 = \{wv_i u_1 v_{i+1} w: \quad i = 2,3,..., n-1\},$$
$$S_2 = \{v_1 u_i u_1 u_{i+1} v_1: \quad i = 2,3,..., n-1\},$$
$$C = \{wv_1 u_2 u_1 v_2 w\}.$$
$$|B(\mu(S_n))| = (n-2) + (n-2) + 1$$
$$= 2n - 3 = \dim \xi(\mu(S_n))$$

واضح أن كل من الدارات S_1 و S_2 و C مستقلة لأنها تمثل حدود بيان جزئي مستوي، وان $S_1 \bigcup S_2$ مستقلة لأنها تمثل دارات منفصلة بالنسبة للحافات؛ الدارة C تحوي على الحافة $v_1 w$ وهذه غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $S_1 \bigcup S_2$ وعليه فان $B(\mu(S_n)) = S_1 \bigcup S_2 \bigcup \{C\}$ مستقلة خطيا وبذلك تشكل قاعدة للفضاء.

بقي أن نجد الثنية للقاعدة $B(\mu(S_n))$ ، نجزأ حافات البيان $\mu(S_n)$ إلى مايلي :

$$E_1 = \{wv_i : \quad i = 1,2,3,..., n\},$$
$$E_2 = \{v_1 u_i : \quad i = 2,3,..., n\},$$
$$E_3 = \{u_1 u_i : \quad i = 2,3,..., n\},$$

إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_1 فان

$$f_{S_1\bigcup\{C\}}(e)\le 2\ ;\quad f_{S_2}(e)=0$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2.$$

إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_2 فان

$$f_{S_1}(e)=0\ ;\quad f_{S_2\bigcup\{C\}}(e)\le 2$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2.$$

وبالمثل، إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_3 فان

$$f_{S_1}(e)=0\ ;\quad f_{S_2\bigcup\{C\}}(e)\le 2$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2.$$

أي أن $B(\mu(S_n))$ هي قاعدة ذي ثنية−2 وبهذا ينتهي البرهان.

ثالثاً− إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(C_n)$:

يمكننا البرهنة على انه إذا كان $n=3$ ، فان $\mu(C_3)$ بيان مستوي وعليه بموجب مبرهنة مكلين [12] يكون $b(\mu(C_3))\le 2$

مبرهنة 3 : $b(\mu(C_n))=3$ ، لكل $n\ge 4$.

البرهان:

يمكننا إثبات أن لكل $n\ge 4$ فانه يوجد بيان جزئي من $\mu(C_n)$ يكافئ تبولوجيا $K_{3,3}$ وعليه، فانه بموجب مبرهنة كورتوفسكي [9] يكون $\mu(C_n)$ غير مستوي وعليه حسب مبرهنة مكلين [12] يكون $b(\mu(C_n))\ge 3$.

لإكمال البرهان يجب أن نجد قاعدة B_1 ذات ثنية 3. لتكن

$$B_1=B\bigcup\{C_1,C_2,C_3\}$$

حيث أن

$$B=B(\mu(P_n))$$

وان

$$C_1=wv_2u_1v_nw,$$
$$C_2=wv_1u_nv_{n-1}w,$$
$$and$$
$$C_3=u_1u_2u_3\ldots u_{n-1}u_nu_1.$$
$$|B_1|=|B|+3$$
$$=2n-3+3=2n=\dim\xi(\mu(C_n))$$

لإثبات أن دارات B_1 مستقلة خطيا نلاحظ أن دارات B مستقلة خطيا لأنها قاعدة للفضاء $\xi(\mu(P_n))$ كذلك دارات $\{C_1,C_2,C_3\}$ مستقلة خطيا لأنها منفصلة بالنسبة للحافات؛ أضف إلى ذلك أي تركيب خطي من دارات $\{C_1,C_2,C_3\}$ يحوي على الحافة u_1u_n أو v_1u_n أو u_1v_n وهذه غير موجودة في أي تركيب خطي من

دارات B وبهذا فان دارات $B_1 = B\bigcup\{C_1, C_2, C_3\}$ مستقلة خطيا وعليه، فإنها تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(C_n))$.ولإيجاد الثنية لكل حافة في B_1 , نلاحظ أن

$$E(\mu(C_n)) = E(\mu(P_n))\bigcup\{e', e'', e'''\}$$

حيث

$$e' = u_1 u_n\ , e'' = u_1 v_n\ ,\ e''' = v_1 u_n\ .$$

من المبرهنة (1)، إذا كانت e هي أية حافة تنتمي إلى $E(\mu(P_n))$ فان

$$f_B(e) \le 2\ \ ; \qquad f_{\{C_1, C_2, C_3\}}(e) \le 1\ ;$$

$$\therefore\ f_{B_1}(e) \le 3.$$

كذلك

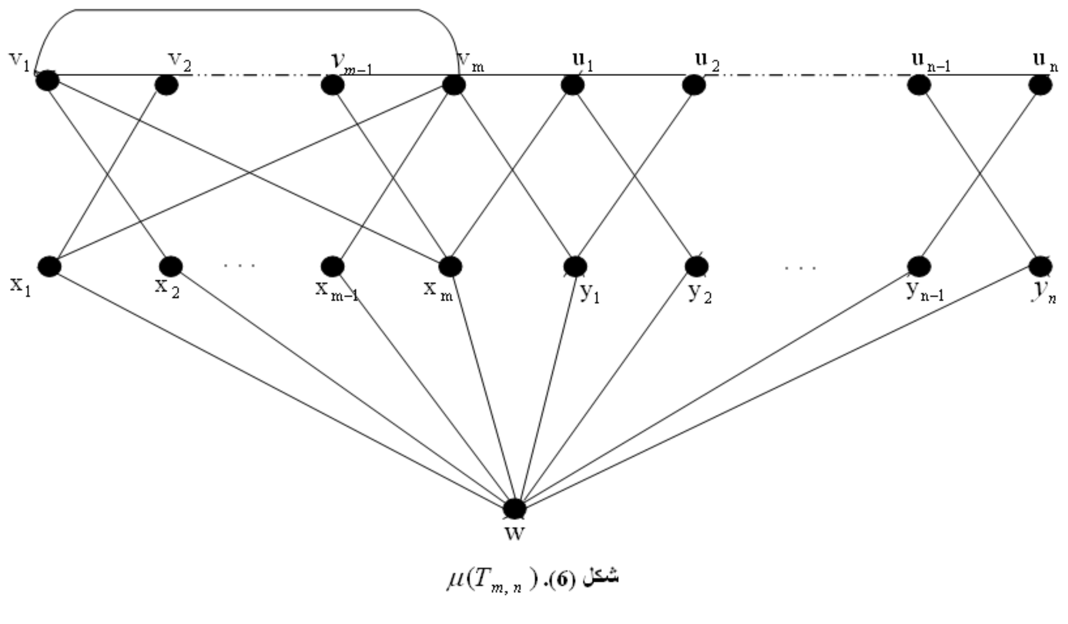
$$f_B(e^*) = 0\ \ ; \qquad f_{\{C_1, C_2, C_3\}}(e^*) \le 1\ ; \quad \forall\, e^* \in \{e', e'', e'''\}$$

$$\therefore\ f_{B_1}(e^*) \le 1.$$

وعليه فان الثنية لكل حافة في البيان $\mu(C_n)$ لا تزيد عن 3 في القاعدة B_1 أي أن $b(\mu(C_n)) \le 3$. وبهذا يتم البرهان.

رابعاً– إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(T_{m,n})$:

من تعريف (1) نلاحظ أن عدد رؤوس $\mu(T_{m,n})$ هو 2m+2n+1 وعدد حافاته هي 4m+4n وأن بيان ميشلسكي للبيان $T_{m,n}$ موضح في الشكل (6).



شكل (6). $\mu(T_{m,n})$

مبرهنة 4: $b(\mu(T_{m,n})) = 3$, لكل $m \ge 3$ و $n \ge 1$.

البرهان:

من السهولة البرهنة على انه عندما $m \ge 3$ و $n \ge 1$ يوجد بيان جزئي من $\mu(T_{m,n})$ يكافئ تبولوجيا $K_{3,3}$ وعليه، بموجب مبرهنة كورتوفسكي [9] يكون $\mu(T_{m,n})$ بيان غير مستوي وبموجب مبرهنة مكلين [12] يكون $b(\mu(T_{m,n})) \ge 3$ ؛ ولكي نكمل البرهان يجب أن نجد قاعدة B ذات ثنية 3. واضح أن

$$\dim \xi(\mu(T_{m,n})) = \left|E(\mu(T_{m,n}))\right| - \left|V(\mu(T_{m,n}))\right| + 1$$
$$= 4(m+n) - [2(m+n)+1] + 1$$
$$= 2(m+n) = 2m+2n\ .$$

تأمل مجموعة الدارات الآتية

$$B(\mu(T_{m,n})) = B(\mu(P_n))\bigcup B(\mu(C_m))\bigcup\{C_1, C_2, C_3\}$$

حيث أن

$$B(\mu(P_n)) = M_1\bigcup\{C\}$$

وان

$$M_1 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} y_{i+1} u_i\ , w y_i u_{i+1} y_{i+2} w : \quad i = 1,2,3,..., n-2\},$$
$$C = \{w y_1 u_2 u_1 y_2 w\},$$

وان

$$B(\mu(C_m)) = M_2\bigcup M_3\bigcup\{C^*\}$$

حيث أن

$$M_2 = \{v_i v_{i+1} v_{i+2} x_{i+1} v_i\ , w x_i v_{i+1} x_{i+2} w: \quad i = 1,2,3,..., m-2\},$$
$$M_3 = \{w x_2 v_1 x_m w, w x_1 v_m x_{m-1} w, v_1 v_2 v_3 ... v_{m-1} v_m v_1\},$$
$$C^* = \{w x_1 v_2 v_1 x_2 w\},$$
$$C_1 = \{v_m u_1 u_2 y_1 v_m\},$$
$$C_2 = \{w x_m u_1 y_2 w\},$$
$$C_3 = \{w y_1 v_m x_{m-1} w\}.$$

واضح بان

$$\left|B(\mu(T_{m,n}))\right| = \left|B(\mu(P_n))\right| + \left|B(\mu(C_m))\right| + 3$$
$$= (2n-3) + (2m) + 3$$
$$= 2n + 2m = \dim \xi(\mu(T_{m,n})).$$

بقي أن نثبت أن دارات $B(\mu(T_{m,n}))$ مستقلة خطيا، واضح بان $B(\mu(P_n))$ مستقلة خطيا لأنها تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(P_n))$ ؛ كذلك $B(\mu(C_m))$ هي مستقلة خطيا لأنها تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(C_m))$ ؛ واضح بان الدارات $\{C_1, C_2, C_3\}$ مستقلة خطيا لأنها تشكل حدود بيان جزئي مستوي، نلاحظ أيضا $B(\mu(P_n))\bigcup B(\mu(C_m))$ دارات مستقلة خطيا لأنها تمثل دارات منفصلة بالنسبة للحافات كذلك إن أي تركيب خطي من دارات $\{C_1, C_2, C_3\}$ يحوي في الأقل على حافة من النوع $v_m u_1$ أو $v_m y_1$ أو $u_1 x_m$ وهذه الحافات غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(P_n))\bigcup B(\mu(C_m))$ وعليه فان دارات

$$B(\mu(T_{m,n})) = B(\mu(P_n))\bigcup B(\mu(C_m))\bigcup\{C_1, C_2, C_3\}$$

مستقلة خطيا وعليه فهي تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(T_{m,n}))$. لإيجاد الثنية لكل حافة في $\mu(T_{m,n})$ نجزأ حافات البيان $\mu(T_{m,n})$ إلى

$$E_1\bigcup E_2\bigcup E_3\bigcup E_4\bigcup E_5$$

حيث

$E_1 = \{v_m u_1 , v_m y_1 , u_1 x_m\},$
$E_2 = \{u_1 u_2 , u_1 y_2 , u_2 y_1 , wy_1 , wy_2\},$
$E_3 = \{wx_{m-1} , wx_m , v_m x_{m-1}\},$
$E_4 = E(\mu(P_n)) - E_2 ,$
$E_5 = E(\mu(C_m)) - E_3 .$

واضح أن $E_1 \bigcup E_2 \bigcup E_3 \bigcup E_4 \bigcup E_5$ تشكل تجزئة لـ $E(\mu(T_{m,n}))$

الآن إذا كانت e هي أية حافة تنتمي إلى E_1 فان

$$f_{B(\mu(P_n))\bigcup B(\mu(C_m))}(e) = 0 \ ; \quad f_{\{C_1,C_2,C_3\}}(e) \le 1$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(T_{m,n}))}(e) \le 1$$

إذا كانت e هي أية حافة تنتمي إلى E_2 فان

$$f_{B(\mu(C_m))}(e) = 0 \ ; \ f_{B(\mu(P_n))}(e) \le 2 \ ; \quad f_{\{C_1,C_2,C_3\}}(e) \le 1$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(T_{m,n}))}(e) \le 3$$

إذا كانت e هي أية حافة تنتمي إلى E_3 فان

$$f_{B(\mu(C_m))}(e) \le 1 \ ; \ f_{B(\mu(P_n))}(e) = 0 \ ; \quad f_{\{C_1,C_2,C_3\}}(e) \le 1$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(T_{m,n}))}(e) \le 2$$

أما إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_4 فان

$$f_{B(\mu(C_m))\bigcup\{C_1,C_2,C_3\}}(e) = 0 \ ; \ f_{B(\mu(P_n))}(e) \le 2$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(T_{m,n}))}(e) \le 2$$

وأخيرا إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_5 فان

$$f_{B(\mu(P_n))\bigcup\{C_1,C_2,C_3\}}(e) = 0 \ ; \ f_{B(\mu(C_m))}(e) \le 3$$
$$\therefore\ f_{B(\mu(T_{m,n}))}(e) \le 3$$

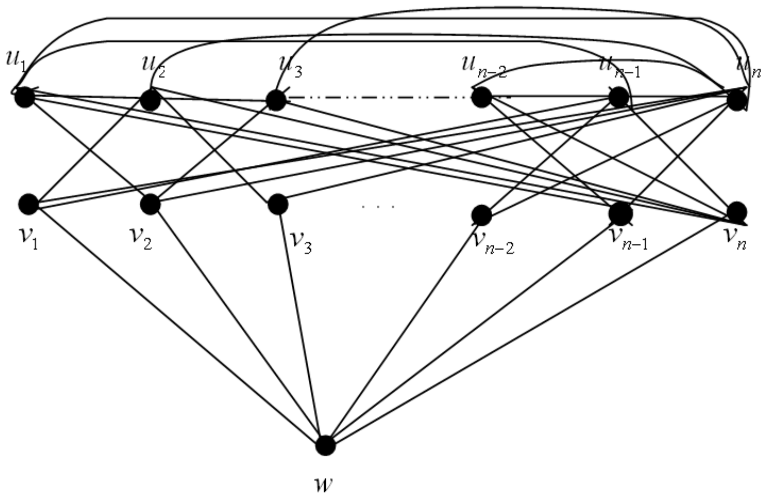
وعليه فان الثنية لكل حافة في البيان $\mu(T_{m,n})$ لا تزيد عن 3 في القاعدة $B(\mu(T_{m,n}))$، أي أن $b(\mu(T_{m,n})) \le 3$ وبهذا يتم البرهان.

خامساً– إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(W_n)$:

مبرهنة 5: $3 \le b(\mu(W_n)) \le 4$, لكل $n \ge 4$.

البرهان:

من السهولة البرهنة على انه عندما $n \ge 4$ يوجد بيان جزئي من $\mu(W_n)$ يكافئ تبولوجيا $K_{3,3}$ وعليه يكون $\mu(W_n)$ غير مستوي حسب مبرهنة كورتوفسكي [9] وبموجب مبرهنة مكلين [12] يكون $b(\mu(W_n)) \ge 3$ ولكي نكمل البرهان يجب أن نجد قاعدة B ذات ثنية 4 لفضاء الدارات $\xi(\mu(W_n))$ ليكن $\mu(W_n)$ هو المبين في الشكل (7).



شكل (7). $\mu(W_n)$

بمــــــا أن $|E(W_n)| = 2n-2$ و $|V(W_n)| = n$ فـــــان $|E(\mu(W_n))| = 3(2n-2)+n = 7n-6$ و $|V(\mu(W_n))| = 2n+1$ وعليه فان

$$\begin{aligned}\dim \xi(\mu(W_n)) &= |E(\mu(W_n))| - |V(\mu(W_n))| + 1 \\ &= 7n-6-(2n+1)+1 \\ &= 5n-6\end{aligned}$$

لتكن

$$B(\mu(W_n)) = \{B(\mu(C_{n-1})) - \{C\}\} \bigcup B(\mu(S_n)) \bigcup M_1 \bigcup \{C', C''\}$$

حيث أن

$$B(\mu(C_{n-1})) = M_2 \bigcup M_3 \bigcup \{C\}$$

وان

$$\begin{aligned}&M_2 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} v_{i+1} u_i \ , \ wv_i u_{i+1} v_{i+2} w : \quad i = 1,2,3,...,n-3\}, \\ &M_3 = \{wv_2 u_1 v_{n-1} w, wv_1 u_{n-1} v_{n-2} w, u_1 u_2 u_3 ... u_{n-2} u_{n-1} u_1\}, \\ &C = \{wv_1 u_2 u_1 v_2 w\},\end{aligned}$$

وان

$$B(\mu(S_n)) = S \bigcup C_1$$

حيث أن

$$\begin{aligned}&S = \{wv_i u_n v_{i+1} w, v_n u_i u_n u_{i+1} v_n : \quad i = 2,3,4,...,n-1\}, \\ &C_1 = \{wv_n u_2 u_n v_2 w\},\end{aligned}$$

وان

$$M_1 = \{u_n u_i v_{i+1} u_n : \quad i = 1,2,3,...,n-2\}$$

وان

$$\begin{aligned}&C' = \{u_{n-1} u_n u_1 u_{n-1}\}, \\ &C'' = \{u_1 u_2 u_n u_1\}.\end{aligned}$$

الآن سوف نثبت أن دارات $B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}$ مستقلة خطيا لأنها تمثل مجموعة جزئية من قاعدة فضاء الدارات $\xi(\mu(C_{n-1}))$، كذلك $B(\mu(S_n))$ مستقلة خطيا لأنها تمثل قاعدة لفضاء الدارات $\xi(\mu(S_n))$، واضح أن كلاً من $\{C',C''\}$ و M_1 و $M_1\bigcup\{C',C''\}$ مستقلة خطيا لأنها تمثل حدود بيان جزئي مستوي. الآن أي تركيب خطي من دارات $M_1\bigcup\{C',C''\}$ يحوي في الأقل على حافة من النوع u_1u_2 أو u_iv_{i+1} لبعض قيم $i=1,2,3,...,n-2$ بالمقابل، هذه الحافة غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(S_n))$ وعليه فان دارات $B(\mu(S_n))\bigcup M_1\bigcup\{C',C''\}$ مستقلة خطيا؛ واضح أن أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}$ يحوي على الأقل حافة واحدة من النوع u_1v_{n-1} أو v_1u_{n-1} أو u_iu_{i+1} أو v_iu_{i+1} لبعض قيم $i=1,2,3,...,n-2$ بالمقابل هذه الحافات غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(S_n))\bigcup M_1\bigcup\{C',C''\}$ وعليه فان دارات

$$B(\mu(W_n))=\{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}\}\bigcup B(\mu(S_n))\bigcup M_1\bigcup\{C',C''\}$$

مستقلة خطيا. بما أن

$$\begin{aligned}\left|B(\mu(W_n))\right| &= 2(n-1)-1+(2n-3)+(n-2)+2\\ &= 5n-6=\dim\xi(\mu(W_n)).\end{aligned}$$

وعليه فهي تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(W_n))$. ولإيجاد الثنية نجزأ حافات البيان $\mu(W_n)$ إلى ما يلي

$E_1=\{wv_i\ :\quad i=1,2,3,...,n\},$

$E_2=\{u_nu_i:\quad i=2,3,4,...,n-1\},$

$E_3=\{v_nu_i:\quad i=1,2,3,...,n-1\},$

$E_4=\{u_nv_i:\quad i=1,2,3,...,n-1\},$

$E_5=\{u_iv_{i+1}:\ i=1,2,3,...,n-2\},$

$E_6=\{v_iu_{i+1}:\ i=1,2,3,...,n-2\},$

$E_7=\{u_iu_{i+1}:\ i=1,2,3,...,n-2\}\bigcup\{u_1u_{n-1}\},$

$e_1=u_1u_n.$

ألان إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_1 فان

$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e)\le 2\ ;\ \ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2\ ;\ \ f_{M_1\bigcup\{C',C''\}}(e)=0$

$\therefore\ f_{B(\mu(W_n))}(e)\le 4$

إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_2 فان

$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e)=0\ ;\ \ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2\ ;\ \ f_{M_1\bigcup\{C',C''\}}(e)\le 2$

$\therefore\ f_{B(\mu(W_n))}(e)\le 4$

أما إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_3 فان

$f_{(B(\mu(C_{n-1}))-\{C\})\bigcup M_1\bigcup\{C',C''\}}(e)=0\ ;\ \ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2$

$\therefore\ f_{B(\mu(W_n))}(e)\le 2$

وإذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_4 فان

$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e)=0\ ;\ \ f_{B(\mu(S_n))}(e)\le 2\ ;\ \ f_{M_1\bigcup\{C',C''\}}(e)\le 1$

$\therefore\ f_{B(\mu(W_n))}(e)\le 3$

وإذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_5 فان

$$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e) \le 2 \ ; \quad f_{B(\mu(S_n))\bigcup\{C',C''\}}(e) = 0 \ ; \quad f_{M_1}(e) \le 1$$

$$\therefore \ f_{B(\mu(W_n))}(e) \le 3$$

إما إذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_6 فان

$$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e) \le 2 \ ; \quad f_{B(\mu(S_n))\bigcup M_1 \bigcup \{C',C''\}}(e) = 0$$

$$\therefore \ f_{B(\mu(W_n))}(e) \le 2$$

وإذا كانت e أية حافة تنتمي إلى E_7 فان

$$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e) \le 3 \ ; \quad f_{B(\mu(S_n))}(e) = 0 \ ; \quad f_{M_1 \bigcup\{C',C''\}}(e) \le 1$$

$$\therefore \ f_{B(\mu(W_n))}(e) \le 4$$

أما الثنية للحافة $e_1 = u_1 u_n$ فهي

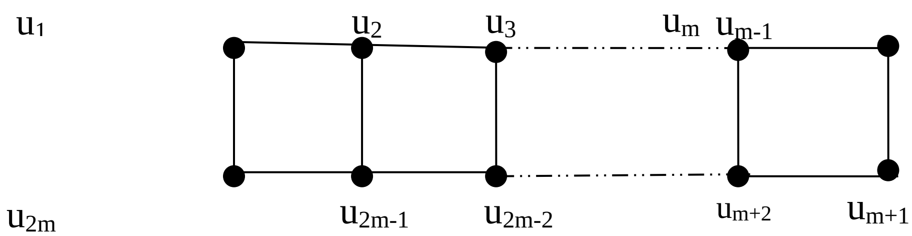
$$f_{B(\mu(C_{n-1}))-\{C\}}(e_1) = 0 \ ; \quad f_{B(\mu(S_n))}(e_1) \le 1 \ ; \quad f_{M_1 \bigcup\{C',C''\}}(e_1) \le 3$$

$$\therefore \ f_{B(\mu(W_n))}(e_1) \le 4$$

بما أن الثنية لكل حافة في البيان $\mu(W_n)$ لاتزيد عن 4 في القاعدة $B(\mu(W_n))$ ، فان $b(\mu(W_n)) \le 4$ وبهذا يتم البرهان .

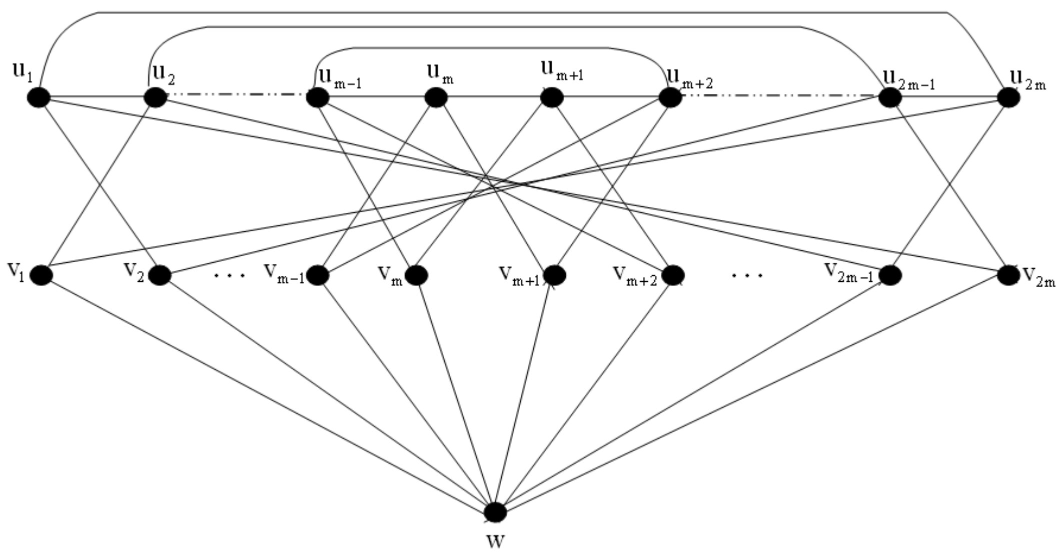
سادساً- يجاد العدد الأساس للبيان $\mu(L_m)$:

تأمل بيان السلم L_m المبين في الشكل (3)، سوف نفرض أن $v_1 = u_{2m}, \ldots, v_{m-1} = u_{m+2}, v_m = u_{m+1}$ وعليه فان بيان السلم L_m المبين في الشكل (3) يصبح بالشكل (8) الآتي



شكل (8). Lm

والآن بيان ميشلسكي لبيان السلم L_m موضح بالشكل (9).



شكل (9). $\mu(L_m)$

مبرهنة 6: $b(\mu(L_m)) = 3$ ، لكل $m \geq 2$.

البرهان:

من السهولة البرهنة على انه إذا كان $m \geq 2$ فانه يوجد بيان جزئي من $\mu(L_m)$ يكافئ تبولوجيا $K_{3,3}$ وعليه فان البيان $\mu(L_m)$ غير مستوي حسب مبرهنة كورتوفسكي [9] وبهذا فان $b(\mu(L_m)) \geq 3$ بموجب مبرهنة مكلين [12]. لكي نكمل البرهان علينا أن نثبت انه توجد قاعدة ذات ثنية−3.

من الواضح أن عدد رؤوس L_m هو 2m وعدد حافاته هي 3m-2 ؛ وان عدد رؤوس وعدد حافات $\mu(L_m)$ هو (4m+1) و(11m-6) على الترتيب

$$\therefore \dim \xi(\mu(L_m)) = (11m-6) - (4m+1) + 1 = 7m-6$$

تأمل مجموعة الدارات الآتية

$$B(\mu(L_m)) = B(\mu(P_{2m})) \bigcup M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3$$

حيث أن

$$P_{2m} = u_1 u_2 u_3 \ldots u_m u_{m+1} \ldots u_{2m}$$

وان

$$B(\mu(P_{2m})) = B_1 \bigcup B_2 \bigcup \{C\}$$

وان

$$B_1 = \{u_i u_{i+1} u_{i+2} v_{i+1} u_i : i = 1,2,3,\ldots,2m-2\},$$
$$B_2 = \{w v_i u_{i+1} v_{i+2} w : i = 1,2,3,\ldots,2m-2\},$$
$$C = \{w v_1 u_2 u_1 v_2 w\},$$

وان

$$M_1 = \{u_i u_{i+1} u_{2m-i} u_{2m-i+1} u_i \ : i = 1,2,3,\ldots, m-1\},$$
$$M_2 = \{v_i u_{2m-i+1} v_{2m-i} w v_i : \quad i = 1,2,3,\ldots, m-1\},$$
$$M_3 = \{u_i v_{2m-i+1} u_{2m-i} v_{i+1} u_i : \ i = 1,2,3,\ldots, m-1\}.$$

واضح أن

$$\begin{aligned}|B(\mu(L_m))| &= 2(2m-2)+1+(m-1)+(m-1)+(m-1)\\ &= 7m-6=\dim\xi(\mu(L_m)).\end{aligned}$$

واضح أن دارات $B(\mu(P_{2m}))$ مستقلة خطيا لأنها تمثل قاعدة لفضاء الدارات $\xi(\mu(P_{2m}))$ ؛ كذلك دارات M_1 مستقلة خطيا لأنها تمثل حدود بيان جزئي مستوي ؛ كما أن كلاً من دارات M_2 و M_3 مستقلة خطيا لأنها منفصلة بالنسبة للحافات. واضح أن $M_1\bigcup M_2$ تكون مستقلة خطيا لان داراتها منفصلة بالنسبة للحافات؛ ألان أي تركيب خطي من M_3 يحوي في الأقل على حافة من النوع u_iv_{2m-i+1} لبعض قيم $i=1,2,3,...,m-1$ بالمقابل هذه الحافات غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $M_1\bigcup M_2$ وعليه تكون $M_1\bigcup M_2\bigcup M_3$ دارات مستقلة خطيا؛ كما أن أي تركيب خطي من دارات $M_1\bigcup M_2\bigcup M_3$ يحوي في الأقل على حافة من النوع u_iu_{2m-i+1} أو u_iv_{2m-i+1} أو v_iu_{2m-i+1} لبعض قيم $i=1,2,3,...,m-1$ وهذه الحافات غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(P_{2m}))$ وعليه فان

$$B(\mu(L_m))=B(\mu(P_{2m}))\bigcup M_1\bigcup M_2\bigcup M_3$$

دارات مستقلة خطيا وعليه فهي تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(L_m))$. ولإيجاد الثنية لكل حافة نجزأ حافات البيان $\mu(L_m)$ إلى ما يلي :

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{u_iu_{i+1} \quad : i=1,2,3,...,2m-1\},\\
E_2 &= \{u_iu_{2m-i+1}: \quad i=1,2,3,...,m-1\},\\
E_3 &= \{u_iv_{i+1}: \quad i=1,2,3,...,2m-1\},\\
E_4 &= \{v_iu_{i+1}: \quad i=1,2,3,...,2m-1\},\\
E_5 &= \{u_iv_{2m-i+1}: \ i=1,2,3,...,m-1\},\\
E_6 &= \{v_iu_{2m-i+1}: \ i=1,2,3,...,m-1\},\\
E_7 &= \{wv_i: \ i=1,2,3,...,2m\}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&f_{B(\mu(P_{2m}))}(e)\le 2 \ ; \ f_{M_1}(e)\le 1; \ f_{M_2\bigcup M_3}(e)=0 \text{ , } for\,each \quad e\in E_1,\\
&f_{B(\mu(P_{2m}))\bigcup M_2\bigcup M_3}(e)=0 \ ; \ f_{M_1}(e)\le 2 \ \text{ , } for\,each \quad e\in E_2,\\
&f_{B(\mu(P_{2m}))}(e)\le 2 \ ; \ f_{M_1\bigcup M_2}(e)=0; \ f_{M_3}(e)\le 1 \text{ , } for\,each \quad e\in E_3,\\
&f_{B(\mu(P_{2m}))}(e)\le 2 \ ; \ f_{M_1\bigcup M_3}(e)=0; \ f_{M_2}(e)\le 1 \text{ , } for\,each \quad e\in E_4,\\
&f_{B(\mu(P_{2m}))\bigcup M_1\bigcup M_2}(e)=0 \ ; \ f_{M_3}(e)\le 1 \ \text{ , } for\,each \quad e\in E_5,\\
&f_{B(\mu(P_{2m}))\bigcup M_1}(e)=0 \ ; \ f_{M_2}(e)\le 1; \ f_{M_3}(e)\le 1 \text{ , } for\,each \quad e\in E_6,\\
&f_{B(\mu(P_{2m}))}(e)\le 2 \ ; \ f_{M_1\bigcup M_3}(e)=0; \ f_{M_2}(e)\le 1 \text{ , } for\,each \quad e\in E_7.
\end{aligned}$$

وعليه فان الثنية لكل حافة في $\mu(L_m)$ لا تزيد عن 3 في القاعدة $B(\mu(L_m))$ ، أي ان $b(\mu(L_m))\le 3$ وبهذا يتم البرهان .

سابعاً- إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(CL_m)$:

واضح أن $\mu(CL_m)$ هو الناتج من $\mu(L_m)$ بإضافة الحافات الستة الآتية: $\{v_{m+1}u_{2m},u_{m+1}v_{2m},v_1u_m,u_1v_m,u_{m+1}u_{2m},u_1u_m\}$

مبرهنة 7: $b(\mu(CL_m)) = 3$, لكل $m \geq 3$.

البرهان:

من السهولة البرهنة على انه إذا كان $m \geq 3$ فيوجد بيان جزئي من $\mu(CL_m)$ يكافئ تبولوجيا $K_{3,3}$ وعليه فان البيان $\mu(CL_m)$ غير مستوي حسب مبرهنة كورتوفسكي [9] وعليه فان $b(\mu(CL_m)) \geq 3$ بموجب مبرهنة مكلين [12]. لكي نكمل البرهان علينا أن نثبت انه توجد قاعدة B ذات ثنية−3.

من الواضح أن عدد رؤوس CL_m هو 2m وعدد حافاته هي 3m؛ وان عدد رؤوس $\mu(CL_m)$ هو 4m+1 وعدد حافاته هي 11m وعليه فان

$$\therefore \dim \xi(\mu(CL_m)) = 11m - (4m+1) + 1 = 7m$$

تأمل مجموعة الدارات الآتية

$$B(\mu(CL_m)) = B(\mu(L_m)) \bigcup \{C_1, C_2, \ldots, C_6\},$$

حيث أن

$$B(\mu(L_m)) = B(\mu(P_{2m})) \bigcup M_1 \bigcup M_2 \bigcup M_3$$

وكما معرفة في المبرهنة (6), وان

$$C_1 = u_1 u_{2m} u_{m+1} v_{2m} u_1,$$
$$C_2 = u_1 u_{2m} v_1 u_m u_1,$$
$$C_3 = u_1 v_m w v_{2m} u_1,$$
$$C_4 = v_1 u_m v_{m+1} u_{2m} v_1,$$
$$C_5 = u_{m+1} u_{2m} v_{2m-1} w v_{2m} u_{m+1},$$
$$C_6 = v_1 u_2 u_{2m-1} v_2 u_3 u_{2m-2} v_3 \ldots v_{m-2} u_{m-1} u_{m+2} v_{m-1} u_m v_1.$$

من الواضح أن

$$\begin{aligned} |B(\mu(CL_m))| &= (7m-6)+6 \\ &= 7m = \dim \xi(\mu(CL_m)). \end{aligned}$$

واضح أن $B(\mu(L_m))$ مستقلة خطيا لأنها تمثل قاعدة لفضاء الدارات $\xi(\mu(L_m))$ ؛ كذلك مجموعة الدارات $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$ مستقلة خطيا لان كل دارة من هذه الدارات تحوي في الأقل على حافة واحدة تختلف عن باقي حافات الدارات الأخرى أي أن أي تركيب خطي من هذه الدارات لا يساوي متجه صفري. كما أن أي تركيب خطي من دارات $\{C_1, C_2, \ldots, C_6\}$ يحوي في الأقل على حافة واحدة من الحافات $\{u_{m+1}v_{2m}, u_1u_m, u_1v_m, v_{m+1}u_{2m}, u_{m+1}u_{2m}, v_1u_m\}$ بالمقابل هذه الحافات غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(L_m))$ وعليه فان

$$B(\mu(CL_m)) = B(\mu(L_m)) \bigcup \{C_1, C_2, \ldots, C_6\},$$

دارات مستقلة خطيا وعليه فهي تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(CL_m))$. ولإيجاد الثنية لكل حافة من حافات البيان $\mu(CL_m)$ نجزأ الحافات إلى ما يلي :

$E_1=\{u_iu_{i+1} \quad : i=1,2,3,...,2m-1\},$
$E_2=\{u_iu_{2m-i+1}: \quad i=2,3,4,...,m-1\},$
$e_1=u_1u_{2m},$
$E_3=\{u_iv_{i+1}: \quad i=1,2,3,...,2m-1\}-\{e_2=u_mv_{m+1}\},$
$E_4=\{v_iu_{i+1}: \quad i=1,2,3,...,m-1\},$
$E_5=\{v_iu_{i+1}: \quad i=m,m+1,...,2m-2\},$
$e_3=v_{2m-1}u_{2m},$
$E_6=\{u_iv_{2m-i+1}: \; i=1,2,3,...,m-1\},$
$E_7=\{v_iu_{2m-i+1}: \; i=2,3,...,m-1\},$
$e_4=v_1u_{2m},$
$E_8=\{wv_i: \; i=1,2,3,...,2m-2\}-\{e_5=wv_m\},$
$e_6=wv_{2m-1}, e_7=wv_{2m},$
$E_9=\{u_{m+1}v_{2m},u_1u_m,u_1v_m,v_{m+1}u_{2m},u_{m+1}u_{2m},v_1u_m\}.$

الآن نحسب الثنية لكل حافة

$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 3\,;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)=0 \;, \quad \forall e\in E_1$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 2\,;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)\le 1 \;, \quad \forall e\in E_2$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 3\,;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)=0 \;, \quad \forall e\in E_3$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 2\,;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)\le 1 \;, \quad \forall e\in E_4$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 3\,;\; f_{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)=0 \;, \quad \forall e\in E_5$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 1\,;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)\le 2 \;, \quad \forall e\in E_6$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 2;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)\le 1 \,, \quad \forall e\in E_7$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)\le 3\,;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)=0 \;, \quad \forall e\in E_8$
$f_{B(\mu(L_m))}(e)=0;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e)\le 3 \;, \quad \forall e\in E_9$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_1)\le 1;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_1)\le 2 \;,$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_2)\le 2;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_2)\le 1 \;,$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_3)\le 2;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_3)\le 1 \;,$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_4)\le 1;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_4)\le 2 \;,$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_5)\le 2;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_5)\le 1 \;,$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_6)\le 2;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_6)\le 1 \;,$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_7)\le 1;\; f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_7)\le 2 \;.$

وعليه فان الثنية لكل حافة في بيان $\mu(CL_m)$ لا تزيد عن 3 في القاعدة $B(\mu(CL_m))$، أي أن $b(\mu(CL_m))\le 3$ وبهذا ينتهي البرهان.

ثامناً- إيجاد العدد الأساس للبيان $\mu(ML_m)$:

البيان $\mu(ML_m)$ هو الناتج من $\mu(L_m)$ بإضافة الحافات الستة الآتية:
$\{v_mu_{2m},u_mv_{2m},v_1u_{m+1},u_1v_{m+1},u_mu_{2m},u_1u_{m+1}\}$

مبرهنة 8 : $b(\mu(ML_m))=3$ ، لكل $m\geq 3$.

البرهان:

من السهولة إثبات أن البيان $\mu(ML_m)$ ، $m\geq 3$ يحوي على بيان جزئي يكافئ تبولوجيا $K_{3,3}$ وعليه يكون $\mu(ML_m)$ بيان غير مستوي وبموجب مبرهنة مكلين [12] يكون $b(\mu(ML_m))\geq 3$. لكي نكمل البرهان يجب أن نجد قاعدة ذات ثنية−3 لفضاء الدارات $\xi(\mu(ML_m))$ ، واضح أن

$$|V(ML_m)|=|V(CL_m)|=2m,$$
$$|E(ML_m)|=|E(CL_m)|=3m,$$

وعليه فان

$$\dim\xi(\mu(ML_m))=\dim\xi(\mu(CL_m))=7m$$

لتكن B مجموعة من دارات بيان $\mu(ML_m)$ معرفة بالشكل الآتي:

$$B(\mu(ML_m))=B(\mu(L_m))\bigcup\{C_1,C_2,\ldots,C_6\},$$

حيث أن $B(\mu(L_m))$ هي قاعدة لفضاء دارات $\mu(L_m)$ وان

$$C_1=u_1u_{2m}u_mv_{2m}u_1,$$
$$C_2=u_1u_{2m}v_1u_{m+1}u_1,$$
$$C_3=u_1v_{m+1}u_mv_{2m}u_1,$$
$$C_4=u_{2m}u_mv_{2m}wv_{2m-1}u_{2m},$$
$$C_5=u_{2m}u_{2m-1}v_{2m}wv_mu_{2m},$$
$$C_6=v_1u_2u_{2m-1}v_2u_3u_{2m-2}v_3\ldots v_{m-2}u_{m-1}u_{m+2}v_{m-1}u_mu_{2m}v_1.$$

واضح أن

$$|B(\mu(ML_m))|=(7m-6)+6$$
$$=7m=\dim\xi(\mu(ML_m)).$$

واضح أن $B(\mu(L_m))$ مستقلة خطيا لأنها تمثل قاعدة لفضاء الدارات $\xi(\mu(L_m))$ ؛ كذلك مجموعة الدارات $\{C_1,C_2,\ldots,C_6\}$ مستقلة خطيا لان كل دارة من هذه الدارات تحوي في الأقل على حافة واحدة تختلف عن باقي حافات الدارات الأخرى أي أن أي تركيب خطي من هذه الدارات لا يساوي متجه صفري. كما أن أي تركيب خطي من دارات $\{C_1,C_2,\ldots,C_6\}$ يحوي في الأقل على حافة واحدة من الحافات $\{u_mv_{2m},u_1u_{m+1},u_1v_{m+1},u_mu_{2m},v_mu_{2m},v_1u_{m+1}\}$ بالمقابل هذه الحافات غير موجودة في أي تركيب خطي من دارات $B(\mu(L_m))$ وعليه فان

$$B(\mu(ML_m))=B(\mu(L_m))\bigcup\{C_1,C_2,\ldots,C_6\},$$

دارات مستقلة خطيا وبذلك تشكل قاعدة للفضاء $\xi(\mu(ML_m))$. ولإيجاد الثنية نجزأ مجموعة الحافات إلى ما يلي:

$$E_1=\{u_iu_{i+1}\quad : i=1,2,3,\ldots,2m-2\},$$
$$e_1=u_{2m-1}u_{2m}\,,$$
$$E_2=\{u_iu_{2m-i+1}:\quad i=2,3,4,\ldots,m-1\},$$

$e_2 = u_1 u_{2m}$,
$E_3 = \{u_i v_{i+1} : \quad i = 1,2,3,...,2m-2\} - \{e_3 = u_m v_{m+1}\}$,
$e_4 = u_{2m-1} v_{2m}$,
$E_4 = \{v_i u_{i+1} : \quad i = 1,2,3,..., m-1\}$,
$E_5 = \{v_i u_{i+1} : \quad i = m, m+1,...,2m-2\}$,
$e_5 = v_{2m-1} u_{2m}$,
$E_6 = \{u_i v_{2m-i+1} : \ i = 1,2,3,..., m-1\}$,
$E_7 = \{v_i u_{2m-i+1} : \ i = 2,3,..., m-1\}$,
$e_6 = v_1 u_{2m}$,
$E_8 = \{w v_i : \ i = 1,2,3,...,2m-2\} - \{e_7 = w v_m\}$,
$e_8 = w v_{2m-1}, e_9 = w v_{2m}$,
$E_9 = \{u_m v_{2m}, u_1 u_{m+1}, u_1 v_{m+1}, u_m u_{2m}, v_m u_{2m}, v_1 u_{m+1}\}$.

الآن نحسب الثنية لكل حافة

$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 3 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) = 0 \ , \quad \forall e \in E_1$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 2 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) \le 1 \ , \quad \forall e \in E_2$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 3 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) = 0 \ , \quad \forall e \in E_3$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 2 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) \le 1 \ , \quad \forall e \in E_4$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 3 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) = 0 \ , \quad \forall e \in E_5$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 1 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) \le 2 \ , \quad \forall e \in E_6$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) \le 1 \ , \quad \forall e \in E_7$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) \le 3 \ ; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) = 0 \ , \quad \forall e \in E_8$
$f_{B(\mu(L_m))}(e) = 0; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e) \le 3 \ , \quad \forall e \in E_9$
$f_{B(\mu(L_m))}(e_1) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_1) \le 1$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_2) \le 1; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_2) \le 2$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_3) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_3) \le 1$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_4) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_4) \le 1$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_5) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_5) \le 1$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_6) \le 1; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_6) \le 2$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_7) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_7) \le 1$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_8) \le 2; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_8) \le 1$,
$f_{B(\mu(L_m))}(e_9) \le 1; \ f_{\{C_1,C_2,...,C_6\}}(e_9) \le 2$.

وعليه فان الثنية لكل حافة في بيان $\mu(ML_m)$ لا تزيد عن 3 في القاعدة $B(\mu(ML_m))$ ، أي ان $b(\mu(ML_m)) \le 3$ وبهذا ينتهي البرهان.

المصادر

[1] Ali, A.A.; Marougi,G.T.,(1992), The basis number of the Cartesian product of some graphs, J. Indian Math. Soc., Vol. 58, No.2, pp. 123-134.

[2] Ali, A.A.; Marougi,G.T.,(1993), The basis number of the lexicographic product of graphs, Ars combinatoria, Vol.36, pp.271-282.

[3] Alsardary, S.Y.; Ali, A.A., (2003), The basis number of some special non planar graphs, Czechoslovak Math. J., Vol. 53, No.2, pp. 225-240.

[4] Alzoubi, M.Y.; Jaradat, M.M., (2007), The basis number of the Cartesian product of a path with a circular ladder, a Möbius ladder and a net, Kyungpook Math. J., Vol. 47, No.2, pp. 165-174.

[5] Alzoubi, M.Y.; Jaradat, M.M., (2006), The basis number of the composition of theta graphs with some graph, Ars combinatoria, Vol.79, pp.107-114.

[6] Alzoubi, M.Y.; Jaradat, M.M., (2005), On the basis number of the composition of different ladders with some graphs, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Vol. 12, pp. 1861-1868.

[7] Banks, J.A.; Schmeichel, E.F., (1982), The basis number of the n-cube, J. combin. Theory, Ser. B, Vol. 33, No.2, pp. 95-100.

[8] Chartrand, G.; Lesniak, L., (1996), Graphs and Digraphs, 3d ed., Chapman & Hall, CRC. Press.

[9] Harary, F., (1972), Graph Theory, 3^{rd} pr., Reading, Massachusetts, Addison-Wesly.

[10] Jaradat, M.M.; Alzoubi, M.Y., (2005), An upper bound of the basis number of the lexicographic product of graphs, Australas J. comb., Vol. 32, pp. 305-312.

[11] Jaradat, M.M.; Alzoubi, M.Y.; Rawashdeh, E.A., (2004), The basis number of the lexicographic product of different ladders,SUT Journal of Mathematics, Vol. 40, No.2, pp. 91-101

[12] Maclane, S., (1937), A combinatorial condition for planar graphs, Fund. Math., Vol. 28, pp. 22-32.

[13] Marougi, G.T., (2009), On the basis number of semi-strong product of K_2 with some special graphs, Raf.J. of comp. & Maths., Vol. 6, No.3, pp. 173-181.

[14] Schmeichel, E.F., (1981), The basis number of a graph, J. combin. Theory, Ser. B, Vol. 30, No.2, pp. 123-129.