

## Unsteady Flow to Viscous Thin Films on a Vertical Surface

Khidr M.S. Khidr

Hanin T. Jasim

Hikmat Sh. Mustafa

College of Computer Science and Mathematics

College of Education

University of Mosul, Iraq

University of Mosul, Iraq

Received on: 16/03/2011

Accepted on: 21/06/2011

### ABSTRACT

In this paper we have investigated the unsteady flow to thin films of an incompressible liquids with no inertia force, continuity equation and Nernst-Stokes equations are used to obtain the equation that governs this type of flow, this equation is solved analytically to find the thickness of the film.

**Keywords:** unsteady flow, thin films, incompressible liquids, Nernst-Stokes equations.

الجريان اللامستقر في الأغشية الرقيقة اللزجة على سطح عمودي

حكمت شريف مصطفى

حنين طلال جاسم

خضر محمد صالح خضر

كلية التربية، جامعة الموصل

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2011/06/21

تاريخ استلام البحث: 2011/03/16

### المخلص

في هذا البحث تمت دراسة الجريان اللامستقر للأغشية الرقيقة لسوائل غير قابلة للانضغاط بإهمال قوى القصور الذاتي وبصورة عمودية، وقد استخدمت معادلة الاستمرارية ومعادلات نيفير-ستوكس للحصول على المعادلة التي تحكم هذا النوع من الجريان، وتم حلها تحليليا لإيجاد سمك الغشاء.

**الكلمات المفتاحية:** الجريان اللامستقر، الأغشية الرقيقة، السوائل غير القابلة للانضغاط، معادلات نيفير-ستوكس.

### المقدمة : Introduction

إن الرغوة (Foam) والأغشية الرقيقة (Thin films) التي عادة ما تتكون من هواء وسائل لزج مع الشد السطحي (Surface tension) هي حالة خاصة في ميكانيك الموائع. أن دراسة الأغشية الرقيقة حديثا أخذت طابعا آخر وهو دراسة التأثيرات على سلوك هذه الأغشية، وأن إحدى هذه التأثيرات هي نحافة الأغشية (Thinness) والتي لها أهمية كبيرة في كثير من التطبيقات الصناعية مثل عملية طلاء أسطح الرسم، الشمع الوقائي والطبقات الفضائية على أقراص CD المدمجة. وقد أجريت العديد من الدراسات في هذا النوع من الأغشية.

درس (E.O. Tuck and L. W. Schwartz, 2008) الطرائق العددية لحل بعض المعادلات التفاضلية

الاعتيادية من الرتبة الثالثة والمتعلقة بطلاء وجريان الأغشية، ودرس ( J.A. Moriarty and L.W. Schwartz, )

الانتشار غير المستقر للأغشية الرقيقة السائلة مع شد سطحي صغير. كما درس (M.A.S. Majeed, 2002)

الجريان اللزمني في الأغشية الرقيقة بإهمال قوى القصور الذاتي. وقام كل من ( Richard, Olivier, Marcio, )

بدراسة الجريان العمودي للأغشية الرقيقة في حالة سائلين، كما درس ( Andrew, Haris and Kerianne,

2001) الجريان في الأغشية الرقيقة عندما تكون الجاذبية هي المسؤولة عن الجريان

وتبين بأن خط الاتصال يكون غير مستقر، ودرس (R.J. Braun,2002) جريان الغشاء السائل الرقيق بإهمال

قوى القصور الذاتي، كما درس (D. Gao, N. B. Morley, V. Dhir, 2003) الطرائق العددية في جريان

الأغشية الساقطة على شكل موجة باستخدام طريقة (VOF)، ودرس (Khider, M.S.Khider, 2003) الجريان

اللزج في بعض الأغشية الرقيقة السائلة المائلة. كما تطرق ( Khider, M.S and H.S. Mustafa, 2008 ) إلى دراسة الجريان العمودي في الأغشية الرقيقة اللزجة على سطح صلب. وفي بحثنا هذا سوف نتطرق إلى الجريان اللامستقر في الأغشية الرقيقة اللزجة على سطح عمودي.

### (2.1) المعادلات التي تحكم الجريان: Governing equations

ليكن  $\vec{q} = (u, v)$  يمثل متجه السرعة للجريان، وأن  $u, v$  تمثلان مركبتي السرعة في الاتجاهين  $x, y$  على الترتيب و  $p$  يمثل الضغط (الضغط الداخلي للسائل). لتكن  $y = h(x, t)$  معادلة السطح الحر للغشاء، حيث أن  $h(x, t)$  يمثل سمك الغشاء، وأن الجريان عمودي نحو الأسفل باتجاه الإحداثي  $x$  وكما مبين في الشكل (1.1).



شكل (1.1). مقطع طولي لغشاء رقيق يجري على سطح صلب

نحصر اهتمامنا بالحالة التي يكون فيها  $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right) \ll 1$  على المجال  $x$ ، وبهذا يمكن إهمال الحد  $\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$  من معادلة الانحناء والتي لها الصيغة التالية [4]:-

$$k = \frac{\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad \dots(2.2)$$

فتصبح بالصيغة التالية:-

$$k = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \dots(2.3)$$

إن المعادلات التي تحكم الجريان في الغشاء العمودي ولنظام ثنائي البعد هي معادلة الاستمرارية والتي لها الصيغة التالية:-

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots(2.4)$$

ومعادلات حفظ الزخم معادلات (نافير-ستوكس) في الاتجاهين  $y, x$  وعلى الترتيب [4]:-

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g_x \quad \dots(2.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \rho g_y \quad \dots(2.6)$$

حيث أن  $\rho$  يمثل الكثافة،  $\mu$  اللزوجة،  $g$  التعجيل الأرضي.

وباستخدام نظرية الترتيب [1] فإن معادلتنا الزخم (2.5) و(2.6) تختزلان إلى الصيغة التالية:-

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \quad \dots(2.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \rho g \quad \dots(2.8)$$

### (3.1) الشروط الحدودية : Boundary conditions

1. شرط جهد القص (Tangential stress conditions) على السطح الحر للغشاء

$$\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_s = 0 \quad \text{فأن} \quad y = h \quad \text{عندما} \quad \dots(3.2)$$

حيث أن  $s$  تمثل القيم على السطح الحر للغشاء.

2. شرط الجهد العمودي : Normal-stress condition

$$p = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad \text{فأن} \quad y = h \quad \text{عندما} \quad \dots(3.3)$$

حيث أن  $\sigma$  يمثل الشد السطحي.

3. شرط عدم الانزلاق : No-slip condition

$$u = 0 \quad \text{فأن} \quad y = 0 \quad \text{عندما} \quad \dots(3.4)$$

باشتقاق الشرط الحدي (3.3) بالنسبة إلى  $x$  نحصل على:-

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad \dots(3.6)$$

بمقارنة المعادلة (3.6) مع المعادلة (2.7) نحصل على:-

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g = -\sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \quad \dots(3.7)$$

بتكامل المعادلة (3.7) بالنسبة إلى  $y$  نحصل على:-

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho g y - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + f(x, t) \quad \dots(3.8)$$

حيث أن  $f(x,t)$  ثابت التكامل.

بتطبيق الشرط الحدي (3.2) في المعادلة (3.8) عندما  $y = h$  نحصل على:-

$$f(x,t) = \rho gh + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h \quad \dots(3.9)$$

بتعويض المعادلة (3.9) في المعادلة (3.8) نحصل على:-

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\rho gy - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} y + \rho gh + \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} h \quad \dots(3.10)$$

أو

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left( \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) (h - y) \quad \dots(3.11)$$

بتكامل المعادلة (3.11) بالنسبة إلى  $y$  نحصل على:-

$$u(x, y, t) = \left( \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) + g(x, t) \quad \dots(3.12)$$

حيث أن  $g(x,t)$  ثابت التكامل.

بتطبيق الشرط الحدي (3.4) في المعادلة (3.12) نحصل على:-

$$g(x, t) = 0 \quad \dots(3.13)$$

وهكذا فإن المعادلة (3.12) تصبح بالصيغة:-

$$u(x, y, t) = \left( \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) \quad \dots(3.14)$$

إن الصيغة التكاملية لمعادلة حفظ الكتلة تعطي بالصيغة [7]:-

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h u(x, y, t) dy \quad \dots(3.15)$$

حيث أن  $Q$  يمثل المعدل الحجمي للجريان.

بتعويض المعادلة (3.14) في المعادلة (3.15) نحصل على:-

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \int_0^h \left( \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \left( hy - \frac{y^2}{2} \right) dy \quad \dots(3.16)$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\rho g}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \frac{h^3}{3} \quad \dots(3.17)$$

أو

$$3\mu \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho gh^3 + \sigma h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right)$$

أو

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho gh^3 + \sigma h^3 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) \quad \dots(3.18)$$

والمعادلة (3.18) تمثل التوازن بين ثلاث قوى (اللزوجة، الشد السطحي والتعجيل الأرضي). [5].

#### (4.1) المتغيرات اللابعديّة : Non-dimensional

تعرف المتغيرات  $x, h$  بدلالة المتغيرات اللابعديّة بالصيغة:-

$$x = \rho^a g^b \mu^{c_1} \sigma^d t^e \zeta \quad \dots(4.2)$$

$$h(x, t) = \rho^A g^B \mu^C \sigma^D t^E f(\zeta)$$

حيث أن

$$, B = \frac{-4}{5}, A = \frac{-4}{5}, e = \frac{-1}{5}, d = \frac{2}{5}, c_1 = \frac{1}{5}, b = \frac{-3}{5}, a = \frac{-3}{5}$$

$$. E = \frac{-3}{5}, D = \frac{1}{5}, C = \frac{3}{5}$$

بتعويض المتغيرات اللابعديّة (4.2) في المعادلة (3.18) نحصل على:-

$$3f + \zeta f' = \frac{5}{3} \frac{\partial}{\partial \zeta} (f^3 + f^3 f''') \quad \dots(4.3)$$

يمكن كتابة المعادلة (4.3) بالصيغة:-

$$3d(\zeta f) - 2\zeta f' = \frac{5}{3} \frac{\partial}{\partial \zeta} (f^3 + f^3 f''') \quad \dots(4.4)$$

نكامل المعادلة (4.4) بالنسبة  $\zeta$  فنحصل على:-

$$3\zeta f - 2 \int \zeta f' = \frac{5}{3} (f^3 + f^3 f''') + H \quad \dots(4.5)$$

حيث إن H ثابت التكامل وبفرض H=0 بوصفه حالة خاصة، تصبح المعادلة (4.5) بالصيغة الآتية:-

$$3\zeta f - 2 \int \zeta f' = \frac{5}{3} (f^3 + f^3 f''') \quad \dots(4.6)$$

لحل المعادلة (4.6) نأخذ الشرط الآتي:- [9]

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} \rightarrow 0 \iff \zeta \rightarrow -\infty \text{ عندما } f \rightarrow 1$$

فتصبح المعادلة (4.6) بالصيغة:-

$$f''' = \frac{9}{5} \zeta - 1 \quad \dots(4.7)$$

ويتكامل المعادلة (4.7) بالنسبة  $\zeta$  ثلاث مرات نحصل على:-

$$f'' = \frac{9\zeta^2}{10} - \zeta + c$$

أو

$$f' = \frac{9\zeta^3}{30} - \frac{\zeta^2}{2} + c\zeta + c_1$$

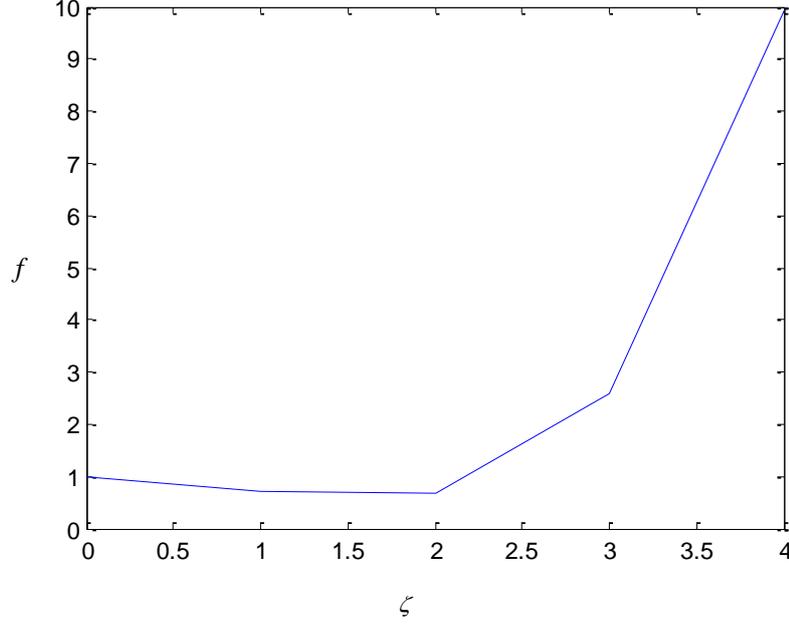
أو

$$f = \frac{9\zeta^4}{120} - \frac{\zeta^3}{6} + c \frac{\zeta^2}{2} + c_1 \zeta + c_2 \quad \dots(4.8)$$

وبأخذ قيم مختلفة للثوابت  $c, c_1, c_2$  والمتغير  $\zeta$  نحصل على غشاء المائع.

### الاستنتاجات : Conclusion

في دراستنا للجريان الزمني للاغشية الرقيقة اللزجة بصورة عمودية وفي نظام ثنائي البعد وبأهمال قوى القصور الذاتي وجهد القص تبين من حلول المعادلة (4.8) بأن سمك الغشاء يقترب من الواحد ( $h \rightarrow 1$ ) لقيم  $x$  السالبة بينما يتذبذ سمك الغشاء حتى تصل المالا نهائية ( $h \rightarrow \infty$ ) كلما اقتربنا من قيم  $x$  الموجبة، وكما موضح في الشكل (1.2).



الشكل (1.2). منحنى الحل للمستوي  $(\zeta, f)$  للمعادلة (4.8)

المصادر

- [1] ستريتر. فكتورل، بنيامين. ويلي، "ميكانيك الموائع"، ترجمة: نبيل زكي مرقص وفوزي إبراهيم، جامعة صلاح الدين، 1984.
- [2] D. Gao, N.B. Morley, V. Dhir, "Numerical simulation of wavy falling film flow using VOF method", Journal of computational Physics 192 624-642, 2003.
- [3] E.O.Tuck and L.W.Schwartz, "A Numerical and asymptotic study of some third-order ordinary differential equations relevant to draining and coating flows", SIM, Vol 32, No.3, pp.453-469, 1990.
- [4] Khider, M.S. Khider, "Viscous flow in certain inclined thin liquid films", M.Sc. thesis, University of Mosul, 2003.
- [5] Khider, M.S and H.S. Mustafa, "Vertical flow in viscous thin films", ISSN:1815-4816, Vol 5, No 1, 2008.
- [6] L. Kondic and J. Dies, "Pattern formation in the flow of thin films down an incline: Constant flux configuration", Phys. Fluids, Vol 13, No 11, 2001.
- [7] L.W. Schwartz and R.V. Roy, "Modeling draining flow in mobile and immobile soap films", Journal of Colloid and interface Science 218, 309-323, 1999.
- [8] Majeed, M.A.S, "Steady flow in thin liquid films with negligible inertia", M.Sc. thesis, University of Mosul, 2002.
- [9] Mustafa, H.S., "Steady and unsteady flow in thin liquid film inclined with angle  $\beta$ ", M.sc. thesis, University of Mosul, 2003.
- [10] R.J. Braum, "Thin fluid film drainage" 6<sup>th</sup> PIMS Graduate Industrial Math Modelling Camp, Version of December 4, 2002.
- [11] Richard Braum, Olivier Dubois, Marcio Gameiro, Andrew Taylor, Haris Widjaya, Kerianne Yewchuk, "Vertical draining of thin films: Two fluids case".