

Segment the Medical Images based on Contourlet Transformations

Khalil I. Al-Saif

Karam M. Abdullah

College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 20/04/2010

Accepted on: 16/03/2010

ABSTRACT

In this paper, we have studied the Normalized Cut algorithm to segment the medical images that was widely used in the last decade. And we based on Image in contourlet domain that supports rich information in Low _ Low frequency. And a clear edges in High_ High frequency.

As motion above, we can replace the algorithm filters by the high frequency contourlet coefficient, and then the edges will be projected on the original image to obtain a segment to be studied independently.

When the proposed algorithm applied on the medical images after exchanging the previous filter by the contourlet coefficients, Adopted in addition to extract the properties of the selected segment to be recognized by human eyes.

Keywords: Normalized Cut algorithm, contourlet domain.

تقطيع الصور الطبية بالاعتماد على التحويلات الكنتورية

كريم مؤيد عبد الله

خليل إبراهيم السيف

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2011/03/16

تاريخ استلام البحث: 2010/04/20

المخلص

تم في هذا البحث دراسة خوارزمية Normalized Cut (التي شاع استخدامها في مجال تقطيع الصور الرقمية) معتمداً على الصورة الرقمية في مجال الكنتورليت والتي تتصف بإعطائها تركيزاً عالياً للمعلومات في الترددات الواطئة _ الواطئة والحافات ذات الوضوحية العالية في الترددات العالية _ العالية.

وعليه تم استبدال المرشحات المعتمدة في خوارزمية (Normalized Cut) التي تؤدي إلى الحصول على حافات الصورة بالمعاملات ذات الترددات العالية من الكنتورليت ومن ثم إسقاط تلك الحافات على الصورة الأصلية التي يتم انتخاب أجزاء منها لكي يتم تكبيرها لأجل دراستها بشكل مستقل.

أدت النتائج المطبقة على الصورة الطبية التي اعتمدت الخوارزمية أعلاه بعد استبدال المرشحات بمعاملات الكنتورليت إلى الحصول على إمكانية تقطيع متعددة المستويات. إضافة إلى إظهار معالم المقطع المنتخب بشكل مكبر ليتم تمييز بصري لأجزائه.

الكلمات المفتاحية: خوارزمية Normalized Cut، مجال الكنتورليت.

1- المقدمة

يشير مصطلح التصوير الطبي (Medical imaging) إلى التقنيات والعمليات المستخدمة للحصول على صور للجسم البشري (أو أجزاء منه) للأغراض التشخيصية، العلاجية أو البحثية. وهو يُعدُّ فرعاً من التصوير البيولوجي الحيوي ويتعاون بشكل كبير مع علم الأشعة، والتنظير الداخلي، و التصوير الحراري. وتُعدُّ بعض طرائق القياس والتسجيل الفيزيولوجي نوعاً من التصوير الطبي حتى وإن كانت لا تنتج صوراً كما هو الحال في التخطيط الدماغية الإلكتروني (Electroencephalogram : EEG) أو التخطيط الدماغية المغناطيسي (Magnetoencephalography : MEG) ولكنها تنتج بيانات على شكل خرائط. وفي المصطلحات الطبية يكون التصوير الطبي مساوياً لعلم الأشعة بشكل عام. ومن تقنيات التصوير الطبي الحديثة [1].

- 1) التصوير الطبي المنظور (Electron microscopy).
- 2) الأشعة المقطعية (Radiographic).
- أ- الأشعة المقطعية الخطية. ب- الأشعة المقطعية المتعددة (CT). ج- الأشعة المقطعية المبرمج.
- 3) الموجات فوق الصوتية (Ultrasound).
- 4) التصوير بالرنين المغناطيسي (MRI).
- 5) التصوير النووي (Nuclear medicine).
- 6) التصوير بإشعاع البوسيترون (PET).

2- تقطيع الصور

تقطيع الصور يُعدُّ من المواضيع المهمة جداً والتي دخلت في حيز التطبيق بشكل واسع، إن الغاية من تقطيع الصورة هي تجزئة الصورة إلى عدد من المناطق غير المتداخلة. وللتقطيع دور كبير في مجال معالجة الصور والإشارة والرؤية الحاسوبية. ويمثل تقطيع الصورة فصلها إلى مناطق متجانسة وتحديدتها أو إيجاد معالمه الخارجية. وهناك ثلاثة معايير لتقييم طريقة تقطيع معينة، وهي:

- أ- (الدقة: قابلة لإعادة الإنتاج).
 - ب- (الجودة: تتفق مع الحقيقة).
 - ج- (الكفاءة: الوقت المطلوب لإنجاز عملية التقطيع).
- إن التقطيع عملية تتم فيها تجزئة صورة إلى المناطق التي تمثل الأجسام أو المناطق ذات المعنى في الصورة. والتي يمكن أن تكون على سبيل المثال، أشخاصاً أو سيارات أو بنايات، أو سماءً. إذ إن التقطيع له هدفان: الهدف الأول تقطيع الصورة إلى أجزاء لتحليل أكثر، والهدف الثاني تمثيل أكثر كفاءة. إن المناطق المستخلصة من التقطيع يجب أن تكون موحدة فيما يتعلق ببعض الخصائص القابلة للقياس، مثل اللون والكثافة. ومن الواضح أن المناطق المجاورة بعضها لبعض يجب أن تكون مختلفة فيما يتعلق بهذه الخصائص [2].
- وقد أغنى هذا الموضوع الكثير من الباحثين وله طرق وخوارزميات كثيرة لأجل تغطية متطلبات كثيرة ومن تلك الخوارزميات:

- طريقة دمج المناطق وفصلها (Region Growing & Shrinking): تقوم هذه الخوارزمية على أساس دمج المناطق المتجانسة وفصل الأخرى غير المتجانسة [2].
- طريقة العناقيد (Clustering Method): تعتمد هذه الطريقة على المدرج التكراري للقيم اللونية (Histograms) [2].
- طريقة التغير المحلي (Local Variation): تعتمد هذه الطريقة على ترتيب الحافات حسب أوزانها مما يؤدي إلى ظهور شكل متجانس [3].

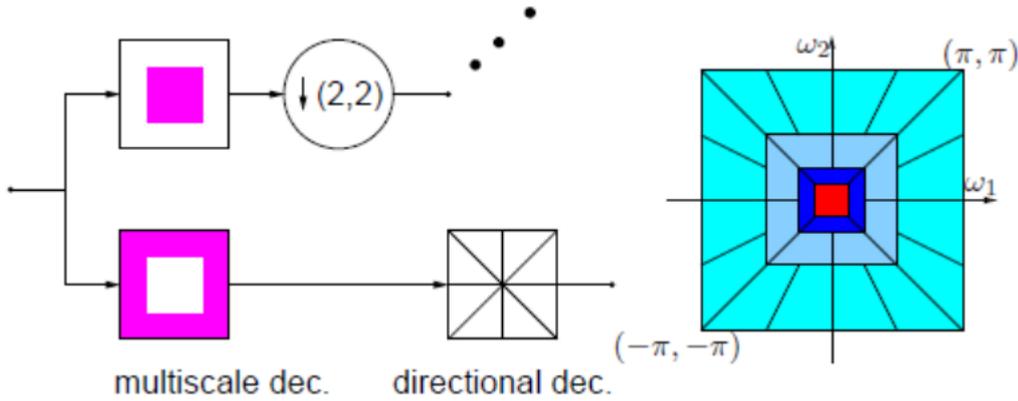
3- الهدف من البحث

يهدف هذا البحث إلى اعتماد خوارزمية (Normalized Cut) والتي تعتمد على حساب قيم (Eigen Value) لأجل تقطيع الصور، معتمدةً على صور في مجال الـ (Contourlet) ودراسة النتائج المستخلصة من

التقطيع بعد أن يتم إسقاط الأجزاء التي تم تقطيعها على أصل الصورة بغية تكبيرها والاطلاع على محتوياتها بشكل تفصيلي.

4- التحويلات الكنتورية

التحويلات الكنتورية هي تحويلات ثنائية البعد حقيقية معرفة بصيغتها المتقطعة وذلك لانتقاط معلومات الحوافي من جميع الاتجاهات، حيث تقوم التحويلات الكنتورية أولاً بتفكيك الصورة بواسطة Laplacian Pyramid (LP) ليتم تحديد الحوافي بجميع المستويات، وبعد ذلك يطبق مرشح اتجاهي وذلك لإكمال الفراغات بين النقاط بهيكلية خطية وكما هو موضح بالشكل (1)[5].



الشكل (1). الهيكل العام للتحويلات الكنتورية

التحويلات الكنتورية وهي تحويل ذو بعدين وهو مطور عن تحويلات الموجة (Wavelet Transform) حيث يستخدم مرشحات اتجاهية وقد توسعت التحويلات الكنتورية لتشمل العمل باتجاه معالجة الصور ذات البنية المتعددة الاتجاهات والقياسات وبأبعاد متناسقة للصور مما أغنى إمكانية التعامل مع الصور الرقمية، وبهذا فإن التحويلات الكنتورية تكون فعالة في التقاط المنحنيات ذات الصفات الناعمة والغالبة في الصور الطبيعية [6].

اقترحت التحويلات الكنتورية في مجال معالجة الصور من قبل Do و Vetterli عام 2002 كبديل عن تحويلات (Curvlet) ثنائية البعد [تحويلات الكيرفليت تم التطرق إليها من قبل Candes و Donoho عام 1999 ليتم إظهارها بشكل منفتح عام 2003 في صيغتها الحالية [7]. وفي عام 2006 طبقت التحويلات الكنتورية من قبل Do و Lu لأجل معالجة الصور المتعددة الأبعاد وأطلق عليها (Surfacelet) والتي اعتمدت بشكل ملحوظ بعد عام 2007. التحويلات الكنتورية تشترك مع تحويلات الكيرفليت بالعديد من الخصائص ومنها (Localization, Orientation and Parabolic Scaling). وعلى العكس من تحويلات الكيرفليت فإن التحويلات الكنتورية تعرف مباشرة بـ (Discrete Domain) وبالتالي هي ذات تركيب سهل ومتداول للإشارة المتقطعة، وأيضاً التحويلات الكنتورية تمتلك تكراراً أقل بكثير من التحويلات الأخرى [7].

أما التحليلات الهندسية ذات القياسات المتعددة (وتدعى الكيرفليت) فقد تم اقتراحها من قبل (E. Candes و D. Donoho)، لتحسين إمكانية إعادة تركيب الرسومات ذات البعدين في مجال تحويلات الموجة المتقطعة، وصيغة الكيرفليت هي نموذج كفو وفعال لأنه يأخذ بنظر الاعتبار المجال الزمني-التردد للمقاطع المحلية حسب

وإضافة إلى أنه يمكن الاستفادة من اتجاهات الصفات الهندسية فيه، ويستخدم الكيرفليت في الحالات الثنائية البعد و الثلاثية البعد [8].

5- المرشحات الهرمية الاتجاهية (أو التحويلات الكنتورية):

Pyramidal Directional (or Contourlet) Filter Banks (PDFB):-

تحت التحويلات الكنتورية على [12]:

1- إضافة المستويات المتعددة إلى المرشحات الاتجاهية.

2- إثبات قدرتها على الخاصية اللاخطية.

ومن خصائص التحويلات الكنتورية [12]:

1- تمثيل مرن لمستويات متعددة واتجاهية للصور، (يمكن أن يكون هناك عدد مختلف من الاتجاهات لكل مستوى).

2- تركيب محكم مع إسهاب قليل (أقل من 33%).

3- التعقيد الحسابي هو:

$O(N)$ for all (N) . حيث إن N تمثل عدد النقاط الضوئية في الصورة.

6- تحليلات الدقة المتعددة (Multiresolution Analysis)

تتكون تحليلات الدقة المتعددة من جزئين أساسيين هما تحليل المستويات المتعددة (Multiscale) وتحليل الاتجاهات المتعددة (Multiple Directions).

7- المستويات المتعددة (Multiscale):

لنفرض أن (Laplacian Pyramid) يستخدم مرشحات متعامدة وأن عملية الاختزال للصورة (Downsampling) تكون بمقدار (2) لكل بعد، فإن مرشح التميرير الواطئ (G) في Laplacian Pyramid يعرف دالة قياس (Scaling Function) : $\emptyset(t) \in L^2(R^2)$ من خلال معادلتها القياس [9]:

$$\emptyset(t) = 2 \sum_{n \in Z^2} g[n] \emptyset(2t-n)$$

$$\emptyset_{j,n} = 2^{-j} \emptyset(t - 2^j n / 2^j), j \in Z, n \in Z^2$$

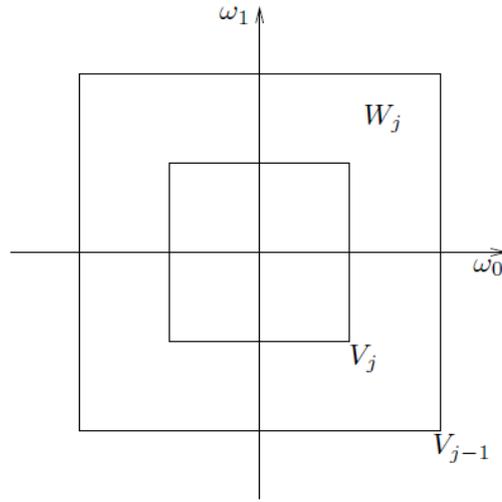
حيث إن $\{\emptyset_{j,n}\}_{n \in Z^2}$ يكون قاعدة متعامدة ل V_j لكل $j \in Z$. وسلسلة الأشكال المتداخلة $\{V_j\}_{n \in Z^2}$ تتوافق مع الخصائص الآتية :

$$\text{Shift invariance: } f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j, \quad \forall j \in Z, k \in Z^2$$

$$\text{Scale invariance: } f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(2^{-1}t) \in V_{j+1}, \quad \forall j \in Z.$$

على فرض أن W_j هي مجموعة متعامدة من V_j في V_{j-1} وكما في الشكل (2).

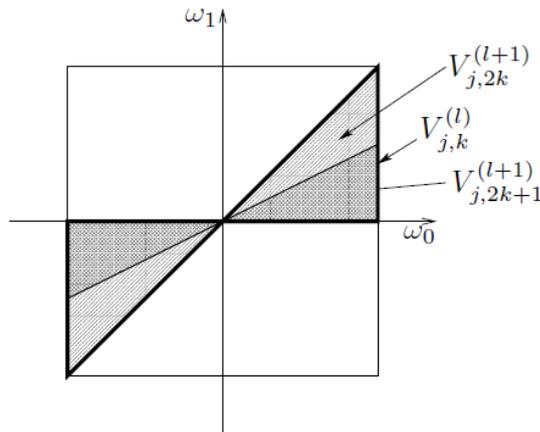
$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j$$



الشكل (2). فضاءات فرعية ذات مستويات متعددة مكونة بـ (Laplacian Pyramid)

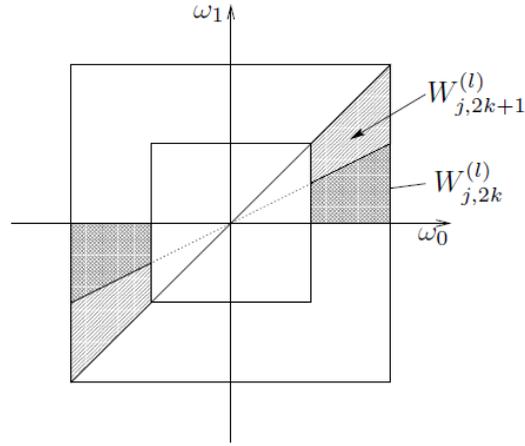
8- الاتجاهات المتعددة (Multiple Directions)

لنفرض إن المرشح (Directional Filter Bank : DFB) في المرشح (PDFB) يستخدم مرشحات متعامدة، لذا في (PDFB) يمكن القول إن الأساس المتقطع للـ (DFB) يُعدُّ كبديل لأساس الفروع المستمرة (Continuous Subspaces) في التحليل المتعدد المستويات. وبالرغم من أن في (PDFB) المرشح (DFB) يطبق لفروع الـ W_{j+1} الفرعية، فإننا سنعرض أولاً تطبيق المرشح (DFB) إلى فروع الـ V_j المتعددة الدقة. والشكل (3) يوضح قسامين لاتجاهين مختلفين بعد تطبيق (DFB) عليهما في الحيز الترددي (Frequency Domain). أما في الحيز المكاني (Spatial Domain)، فإن $V_{j,k}^{(l)}$ يتفرع عند مستوى 2^l وباتجاه k بين كل اتجاهات 2^l . [9].



الشكل (3). فروع متعددة الاتجاهات مكونة بالمرشح (DFB)

أما بالنسبة للفروع W_j فإنها تكون بعد تطبيق المرشح (PDFB) في المجال الترددي كما في الشكل (4)



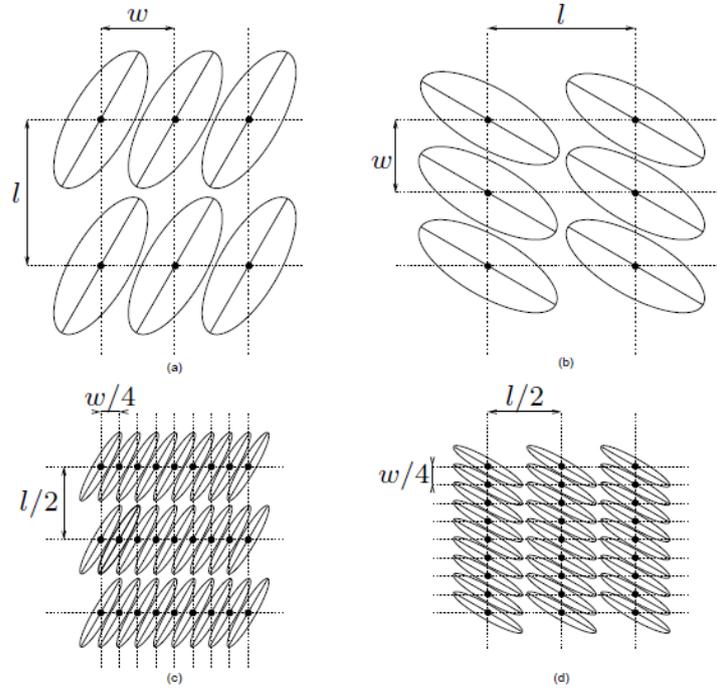
الشكل (4). فروع متعددة الاتجاهات مكونة بالمرشح (PDFB)

9- متعدد المستوى ومتعدد الاتجاه (Multiscale and Multidirection)

وأخيراً، وكما ذكرنا سابقاً فإن عدد الاتجاهات يتضاعف عند كل مستوى آخر أدق، وهذا يعني أنه عند المستوى 2^{j_0} سوف نبدأ بمستوى (DFB) l_{j_0} (الذي يمتلك اتجاهات بمقدار 2^{j_0}) ومن ثم عند مستويات أدق 2^j حيث إن $j < j_0$ ، وعدد مستويات التحليل يجب أن يكون :

$$l_j = \lfloor [l_{j_0} - (j - j_0)/2] \rfloor, \text{ for } j \leq j_0.$$

والشكل (5) يوضح الـ (PDFB) في الحيز المكاني (Spatial Domain) الذي يمثل تحويلات الكيرفليت. وهي أربعة أشكال مابين المستويات الخشنة (Coarse) و المستويات الدقيقة والاتجاهات العمودية والاتجاهات الأفقية [9].



الشكل (5). الحيز المكاني (Spatial Domain) الذي يمثل تحويلات الكيرفليت

10- خوارزمية التقطيع المعيرة (Normalized Cut)

فيما يأتي خطوات خوارزمية التقطيع المعيرة المعتمدة [4]:-

1. إدخال الصورة، ومن ثم حساب الرسم الموزون (Weight Graph) للمخطط $G=(V,E)$.

$$w_{ij} = e^{-\frac{\|F(i)-F(j)\|_2^2}{\sigma_f^2}} * \begin{cases} e^{-\frac{\|X(i)-X(j)\|_2^2}{\sigma_x^2}} & \text{if } \|X(i)-X(j)\|_2 < r \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad \dots (1)$$

حيث إن $X(i)$ هو الموقع المكاني للنقطة i ، وأعني بها الإحداثيات في الصورة الأصلية، r : أكبر مسافة ممكنة بين i و j في القطع، و $F(i)$ هو متجه خصائص يعرف ك:

$F(i) = 1$: نقطة تقطيع المجاميع.

$F(i) = I(i)$: قيمة الكثافة لتقطيع الصور الرمادية.

$F(i) = [v, u, s, \sin(h), v, s, \cos(h)](i)$: حيث h, s, v هي قيم HSV للتقطيع الملون.

$F(i) = [|I * f_1|, \dots, |I * f_n|](i)$: حيث إن f_i هي مرشحات DOOG عند مختلف الاتجاهات.

حيث تم إظهار الأوزان على الحافات من خلال ربط كل عقدتين معتمدتين على مدى التشابه بينهما.

2. حساب القيمة المميزة (Eigen Value)، ليتم اعتماد القيم الصغيرة من المتجه المميز (Eigen Vectors).

$$|x - I \lambda| = 0 \quad \dots (2)$$

where :

x : is a Square matrix.

λ : is the Eigenvalue.

I : is the Identity matrix.

3. استخدام ثاني أصغر قيمة مميزة (Eigen Value) لتجزئة المخطط إلى جزئين.

4. إقرار هل يجب تقسيم الجزء الحالي إلى أجزاء فرعية أخرى وإعادة عملية تقسيم الجزء المقطوع عند الضرورة.

11- الدراسات السابقة

قدمت دراسات كثيرة ومستفيضة في مجال تقطيع الصور وبخاصة الطبية. ولم يقتصر هذا الموضوع في المجال الطبي وإنما كان المجال الطبيعي حاضراً من خلال الحاجة إلى بعض الأجزاء المهمة في الصور الطبيعية ومن الدراسات المهمة في هذا الموضوع:

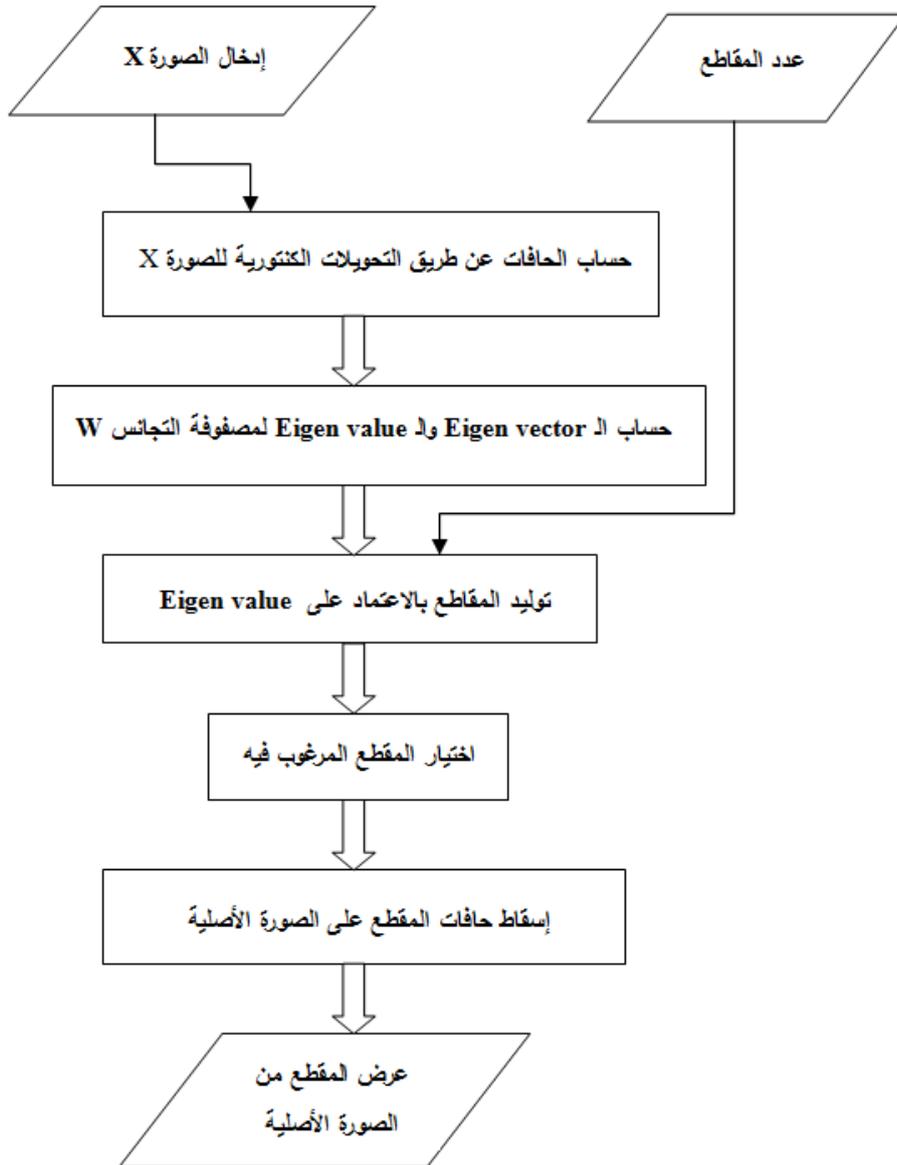
حيث كان للباحث Xuebin xu وآخرين، بحثاً يهدف إلى تحقيق معدل تمييز بمختلف الشروط. فقدم البحث طريقة لتمييز الوجوه بالاعتماد على التحويلات الكنتورية، والخطوة الأولى كانت تحليل كل الوجوه باستخدام التحويلات الكنتورية، ويتم إيجاد المعاملات الترددية العالية والواطنة بمختلف المستويات والزوايا وهي المعلومات التي سوف تستخدم في تمييز الوجوه. وأخيراً فإن المعاملات التي تم تحليلها من اختبار الوجه تستخدم لاختبار التصنيف ثم نحصل على تمييز للوجه. وأظهرت النتائج أن استخدام التحويلات الكنتورية قدمت نتائج أفضل بكثير من تحويلات الموجة عند تطبيقها عملياً.

لم تعتمد التحويلات الكنتورية في تمييز الوجوه على قاعدة بيانات مسبقة فقد قدم الباحث Huan Yang وآخرون، بحثاً يحقق تمييزاً لوجه شخص غريب بالاعتماد على مميزات التحويلات الكنتورية، ويعالج الوجه هرمياً (أي بالاعتماد على الصور الهرمية) من خلال التحويلات الكنتورية والتي تحتوي كلا من المعلومات الترددية العالية والواطنة لتمثيل هيئة الوجه بدقة متعددة وباتجاهات متعددة ومن ثم تختار تلك المعلومات من الصور_الهرمية وتدريب من خلال خوارزمية تصنيف كفاءة، ويمتاز النظام بسرعته وقدرته العالية والمطلوبة في مثل هذا النوع من الأنظمة.

12- الخوارزمية المقترحة

أدناه الخوارزمية المقترحة في البحث:-

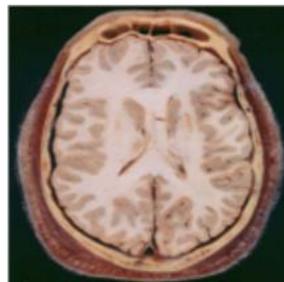
- 1- إدخال الصورة الطبية X . حيث تم اكتساب صورة ملونة أو صورة ذات تدرج رمادي، ففي حال كون الصورة ملونة فيتم التعامل مع احد شرائح الصورة الملونة الثلاث (الأحمر أو الأخضر أو الأزرق) في عملية المعالجة. وفي حال كون الصورة ذات تدرج رمادي فتكون الصورة مهياًة بشكل مباشر. ويمكن ملاحظة أن صورة الدماغ الطبية المكتسبة تكون شاملة لكافة أنواع الصور الطبية الأخرى.
 - 2- إدخال عدد المقاطع المطلوبة للتقسيم.
 - 3- حساب الحافات بوساطة الكنتورليت من الصورة الأصلية.
 - 4- حساب المتجهات المميزة (Eigen Vectors) والقيم المميزة (Eigen Value) لمصفوفة التجانس المتناظرة (Symmetric Similarity Matrix).
 - 5- إنشاء المقاطع بشكل متتابع بالاعتماد على (Eigen Value).
 - 6- اختيار المقطع المطلوب.
 - 7- إسقاط حافات المقطع على الصورة الأصلية.
 - 8- عرض الصورة الناتجة.
- الشكل (6) يمثل مخططاً صندوقياً لتمثيل خطوات تنفيذ الخوارزمية المعتمدة في البحث.



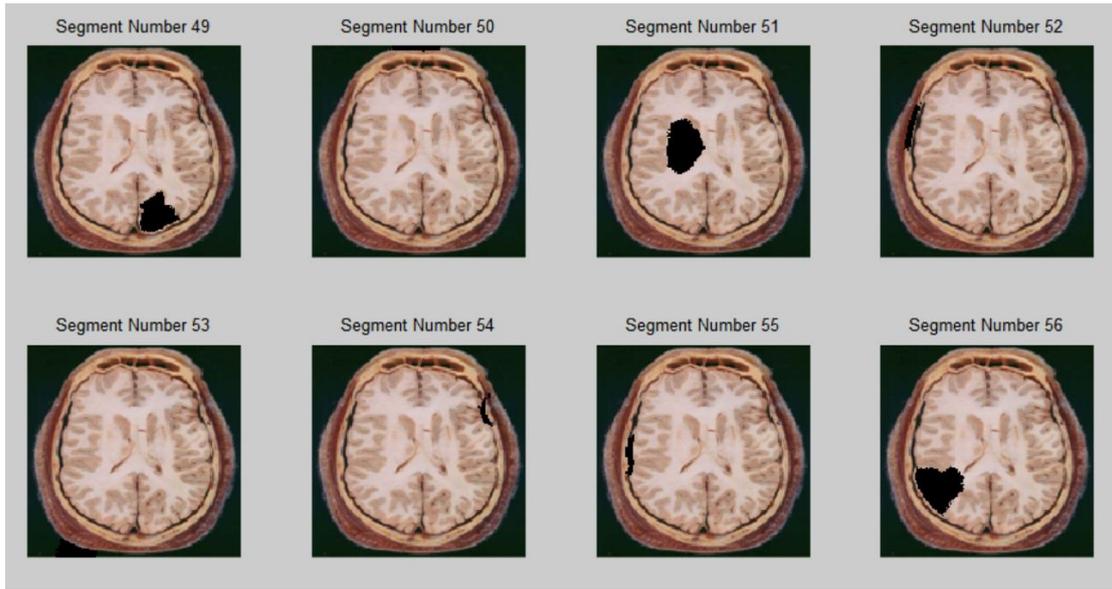
الشكل (6). مخطط انسيابي للخوارزمية المعتمدة في البحث

13- مثال تطبيقي

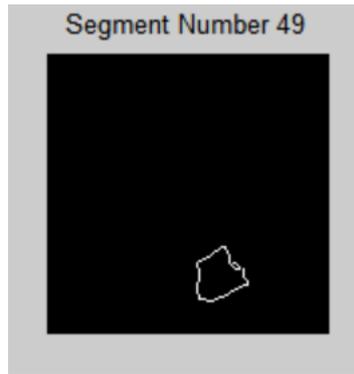
تم اختبار صورة ملونة مكتسبة من جهاز الرنين المغناطيسي الطبي (MRI) لأجل توضيح خطوات الخوارزمية المعتمدة. علماً إن النظام يتعامل مع العديد من أنواع الصور الطبية الملونة أو ذات التدرج الرمادي.



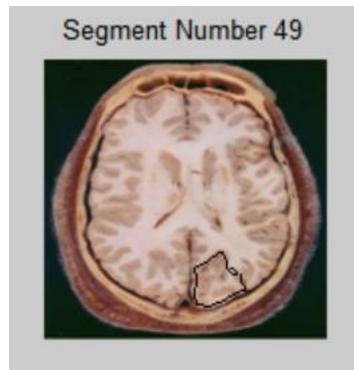
الشكل (7). الصورة الأصلية



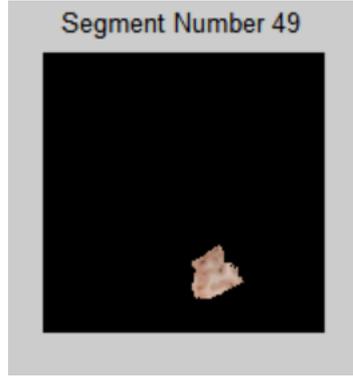
الشكل (8). نموذج لبعض المقاطع، حيث بلغ عددها [1-64] مقطعاً، وقد تم اختيار المقطع رقم (49)



الشكل (9). حافات المقطع رقم (49)



الشكل (10). إسقاط حافات المقطع رقم (49) على الصورة الأصلية



الشكل(11). المقطع رقم (49) بعد أن تم انتزاعه من الصورة الأصلية

14- المناقشة

تطبيق المحتويات الترددية العالية-العالية للتحويلات الكنتورية [والتي تعطي تحديداً واضحاً للحافات في الصورة أعلى من أي مرشح آخر مثل (sobel, Jacobi, canny, ...ets)] وعند اعتماد ثلاثة مستويات من التحويلات الكنتورية سوف يعطي عدة صور مع خصائص لكل صورة تنفرد بها عن الصور الأخرى كما في الشكل (1).

يتم اختيار المقطع المرغوب فيه وذلك للعمل عليه. والخطوة الأخرى يتم فيها إلغاء جميع الأجزاء من الصورة الأصلية ما عدا الجزء المختار وذلك لدراسته بعد إسقاطه على الصورة الأصلية كما في المثال التطبيقي الموضح سابقاً.

15- الاستنتاجات

تطبيق الخوارزمية المقترحة يظهر أن استبدال المعاملات العالية- العالية بدلاً من مرشح Canny لتحديد الحافات يعطي تقطيعاً للصورة أفضل بكثير وأدق والسبب يعود لقدرة التحويلات الكنتورية على إعطاء معلومات دقيقة جداً والتي تستخدم في تحديد الحافات، وعليه فإن التحويل الذي تم بوساطة خوارزمية القطع Normalized Cut قدم دعماً عالياً في مجال التقطيع الدقيق للصور التي تم اعتمادها (تم اعتماد صور طبية في الأمثلة التطبيقية) على الرغم من أن التحويل أدى إلى زيادة وقت التنفيذ بشكل طفيف ولكون هذه التطبيقات لا تعتمد على الزمن الحقيقي (Off Line) عليه لا يكون عامل زمن التنفيذ ذا أهمية تذكر. والصورة المقطعة بعد استخلاصها وتكبيرها إلى أحجام غير قياسية تقدم تفصيلاً كاملاً عن المقطع المطلوب.

16- الأعمال المستقبلية

استخدام تقنيات الذكاء الصناعي من أجل الحصول على تمييز للأجزاء المقطعة من خلال استخلاص خواصها لأجل التمييز بإحدى خوارزميات تمييز الأنماط. كذلك يمكن اعتماد الخوارزمية المقترحة لأجل تصنيف أجزاء الصور الطبيعية الملتقطة جواً. وكذلك إمكانية تطبيق الخوارزمية المقترحة لإيجاد مناطق القوة والضعف في السبائك بعد تكبير مناطق الاختبار إلى قياسات كبيرة.

المصادر

- [1] تصوير طبي - ويكيبيديا، الموسوعة الحرة ، "http://ar.wikipedia.org/wiki".
- [2] النعيمي، عزالدين محمود، 2009 ، " استخدام تقنيات الهندسة الكسورية في تحليل نسجات الصور الطبية"، رسالة ماجستير، قسم علوم الحاسبات ، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.
- [3] Jepson and D.J. Fleet, 2007, "Image segmentation", IEEE Transactions on Image Processing, University of Toronto, Canada.
- [4] Jianbo Shi and Jitendra Malik, 2000," Normalized Cuts and Image Segmentation", IEEE, USA.
- [5] Jun Yan, Muraleedharan R., Xiang Ye, Osadciw L.A. , 2008, "Contourlet based image compression for wireless communication in face recognition system", IEEE International Conference on Communication,USA, pp. 505–509.
- [6] Duncan D.-Y. Po and Minh N. Do, 2004, " Directional Multiscale Modeling of Images using the Contourlet Transform", IEEE TRANSACTIONS ON IMAGE PROCESSING, USA.
- [7] Ron Rubinstein, Alfred M. Bruckstein, and Michael Elad, 2000, "Dictionaries for Sparse Representation Modeling", IEEE PROCEEDINGS, USA.
- [8] Jianwei Ma, Gerlind Plonka, 2009, "Computing with Curvelets: From Image Processing to Turbulent Flows," Computing in Science and Engineering, IEEE, vol. 11, no. 2, pp. 72-80.
- [9] M. N. Do and M. Vetterli, 2002, "Contourlets", In J. Stoeckler and G. V. Welland, editors, Beyond Wavelets. Academic Press, New York, to appear, <http://www.ifp.uiuc.edu/~minhdo/publications>.