

Stability Analysis in Thin Liquid Film (Immobile Soap Film)

Rotina Jasim Al-Etewi

rotinajasim@uomosul.edu.iq

Zena Talal Al-Nuamy

zena-talal@uomosul.edu.iq

College of computer sciences and Mathematics

University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on 24/12/2009

Accepted on 16/8/2010

ABSTRACT

This research is dedicated for analyzing the stability of a system of flow equations for soap film that has opposed for disturbance, and this analysis was done by using Galerkin method which enable to find disturbance growth from its nonexistence after making the system linearization. It was shown through the results of analysis that these equations were in stable state when the real part of wave velocity (a) is a negative quantity, and it is unstable state when the real part of this velocity is a positive quantity, i.e. $a < 0$ we get stability and this happens when the distance (d_0) and the source (u_0) in two similar signs and when $a > 0$ we get unstable state and this happens when d_0 , u_0 have two different signs.

Keywords: Stability analysis , None dimensional form , Disturbance , Galerkin method , wave velocity

تحليل استقرارية مائع جاري في طبقة رقيقة من شريحة الصابون (غير المتحركة)

زينة طلال النعيمي

رتينة جاسم العطيوي

كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ قبول البحث: 2010/08/16

تاريخ استلام البحث: 2009/12/24

المخلص

هذا البحث مكرس لتحليل الاستقرارية لمنظومة من معادلات التدفق لطبقة رقيقة من شريحة الصابون التي تعرضت لاضطراب وهذا التحليل تم عن طريق استخدام طريقة كلاركين (Galerkin) إذ تمكنا من إيجاد نمو الاضطراب من عدمه وذلك بعد جعل النظام خطي (Linearization) وتبين من نتائج التحليل أن هذه المعادلات تكون مستقرة عندما يكون الجزء الحقيقي لسرعة الموجة (a) كمية سالبة، وتكون غير مستقرة عندما يكون الجزء الحقيقي لهذه السرعة كمية موجبة أي عندما $a < 0$ نحصل على الاستقرار وهذا يحدث عندما تكون المسافة (d_0) ومصدر السرعة (u_0) بإشارتين متشابهتين وعندما $a > 0$ نحصل على حالة عدم الاستقرار وهذا يحدث عندما u_0 , d_0 بإشارتين مختلفتين.

الكلمات المفتاحية: تحليل الاستقرارية ، الصيغة اللابعدية ، الاضطراب ، طريقة كلاركين سرعة الموجة.

1- المقدمة

يعد ميكانيك الموائع أحد العلوم الهندسية التي تكون أساسيات كل العلوم الهندسية الأخرى وهذا العلم يتفرع إلى تخصصات مختلفة مثل الديناميكا الهوائية Aerodynamics والهندسة الهيدروليكية وهندسة السفن وغيرها. ونظرا لان المائع يتحرك تحت تأثير قوة غير متزنة تتؤثر عليه، فطبيعة جريان مائع حقيقي معقدة جداً حيث أن القوانين الأساسية التي تصف الحركة الكاملة لمائع لم تصنع بطريقة سهلة والحلول الرياضية تحتاج إلى الاستعانة بالتجارب العملية.

إن دراسة حركة المائع تقودنا إلى دراسة استقرارية هذا المائع، فإذا تعرض مائع جاري إلى إزعاج فقد يزول هذا الإزعاج بمرور الزمن ويتلاشى. وترجع خصائص المائع إلى وضعها السابق، وقد يزداد هذا الإزعاج مع

مرور الزمن فيتحول إلى مائع مضطرب وقد يزداد هذا الاضطراب ويؤدي إلى تغيير كامل في خصائص المائع إلى ما يسمى بالـ (الفوضوية) Chaos.

إن شرائح الصابون وفقاغاته قد سحروا البشر بجمالهم لمدة طويلة ويعتقد أن دراسة شرائح الصابون بدأت منذ وقت بعيد يقارب زمن ليوناردو دافينشي (Davinci). لقد اتخذ البحث في هذا الموضوع اتجاهين متميزين:

الأول سلكه علماء الرياضيات بإيجاد أشكال هذه السطوح ومعادلاتها الرياضية ودراسة استقراريتها. أما الثاني فقد سلكه علماء الفيزياء بدراسة السلوك العياني الفيزيائي والوصف الجزيئي لشرائح الصابون والفقاعات. [3]

لقد كان أول من درس فكرة الاستقرار هو العالم الفرنسي الكبير بونكاريه (Poincare) (1854-1912)، والذي يعد من كبار العلماء في العالم.

ويقترن موضوع الاستقرار كذلك باسم ليبونوف (A.M. Laypunov) (1867-1918) إذ يعد اسمه مرادفا لنظرية الاستقرار في العالم الغربي منذ عام 1960 وان أفكاره وجدت طريقها في الحقول المليئة بالأفكار الخصبة والمثمرة من التطبيقات في النظم الديناميكية غير الخطية خصوصا بعد نشره واحدا من أكثر البحوث الهامة في 1892 وهو المسألة العامة لاستقرار الحركة (On the general problem of the stability of motion) [4].

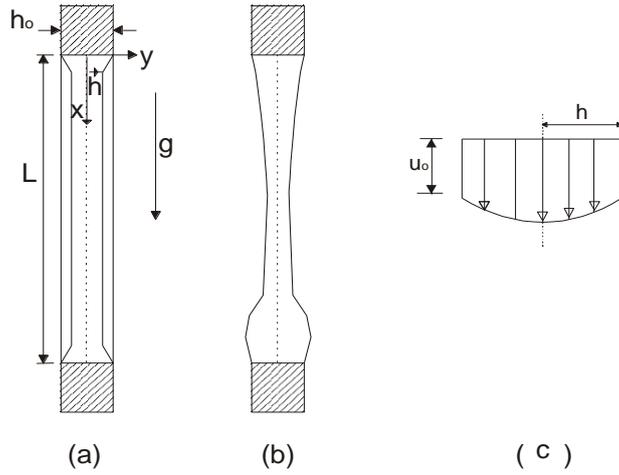
إن أي نظام، ومنه نظام معادلات التدفق لطبقة رقيقة من شريحة الصابون مهما كانت طبيعته إذا وجد في حالة ما S فيقال إن الحالة S (Stable) إذا كانت الإزعاجات أو التأثيرات الخارجية التي يتعرض لها النظام لا تؤثر في الحالة S. وكذلك النظام الشمسي على سبيل المثال موجود حاليا في حالة معتمدة على الزمن ذلك أن الكواكب تدور حول الشمس بصورة منتظمة وفي حالة دخول جسم سماوي إضافي صغير إلى النظام الشمسي فإن هذا النظام لا يتأثر بصورة مهمة إذ لا تتأثر الحالة الأصلية لهذا النظام بالإزعاجات الصغيرة أي أن النظام الشمسي مستقر فيما له علاقة بهذه الإزعاجات. [1, 2]

2- النموذج الرياضي والمعادلات التي تحكم الجريان:

ليكن لدينا غشاء صابونياً أفقياً في النظام الثنائي البعد مثبتاً عند نهايته بدليلين. ولتكن صيغة معادلة الغشاء:

$$y = \mp h(x)$$

نفرض أن الغشاء متناظر مع الإحداثي العمودي وكما مبين في الشكل (1) وكذلك نأخذ بنظر الاعتبار أن نصف الغشاء $h(x) \geq 0$.



شكل (1)

إن المعادلات التي تحكم الجريان لمجال السرعة $q(u, v)$ تعطى بمعادلة الاستمرارية (Continuity equation) وبمعادلة نافيرستوكس (Navier-Stokes).

إن صيغة معادلة الاستمرارية للجريان غير قابل للانضغاط في النظام الثنائي البعد هي:

$$\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} = 0 \quad \dots(1)$$

إن صيغة معادلات نافيرستوكس في النظام الثنائي البعد للجريان العمودي بانعدام قوى القصور الذاتي هي باتجاه الإحداثي X وبتجاه الإحداثي y .

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t'} - \frac{\partial p'}{\partial x'} + \mu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2} \right) + \rho g &= 0 \\ \frac{\partial v'}{\partial t'} - \frac{\partial p'}{\partial y'} + \mu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

3- المعاملات والمعادلات اللابعديّة (Non Dimensional Form):

لغرض إيجاد المعادلات اللابعديّة، سوف نعرف بعض القيم اللابعديّة وعلى افتراض أن u_0 هي مصدر السرعة و d_0 هي المسافة وكالاتي [4]:

$$\begin{aligned} x' &= d_0 X & y' &= d_0 y \\ u' &= u_0 u & v' &= u_0 v \\ t' &= \frac{t d_0}{u_0} & p' &= p u_0 \end{aligned}$$

وبتعويض الكميات والقيم اللابعديّة في (1) و(2) نحصل على المعادلات اللابعديّة لمعادلة الغشاء الصابوني كالاتي [6]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= o \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \rho g &= o \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= o \end{aligned} \right\} \dots(3)$$

4- تحليل الاستقرار (Stability Analysis):

لغرض تحليل الاستقرار لنموذج معادلات تدفق المائع في شريحة الصابون المعرفة بـ (3) نجزأ كلاً من u, v, p باستخدام المعادلات التالية :

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= u_1(x) + u_2(x, y, t) \\ v(x, y, t) &= v_1(x) + v_2(x, y, t) \\ p(x, y, t) &= p_1(x) + p_2(x, y, t) \end{aligned} \right\} \dots(4)$$

إذ أن $u_1(x), v_1(x), p_1(x)$

تمثل الأجزاء المستقرة وتكون صغيرة جداً مقارنة بالأجزاء الأخر وهو الجزء المهم في حساب الاستقرار لـ $u_2(x, y, t), v_2(x, y, t), p_2(x, y, t)$ [5]. الآن وبتعويض المعادلة (4) في المعادلة (3) نحصل على:

$$\frac{\partial(u_1 + u_2)}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = o \dots(5)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - \frac{\partial(p_1 + p_2)}{\partial x} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2(u_1 + u_2)}{\partial x^2} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \rho g = o \dots(6)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} - \frac{\partial p_2}{\partial y} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2(v_1 + v_2)}{\partial x^2} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = o \dots(7)$$

وبتجزئة المعادلات (5)، (6)، (7) إلى حالتها الاستقرار والاضطراب نحصل على:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = o \dots(8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = o \dots(9)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} + \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \rho g = o \dots(10)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \rho g = o \dots(11)$$

$$\frac{\mu}{d_0 u_0} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = o \dots(12)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial y} - \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = o \dots(13)$$

ويمكن فرز المعادلات (13) و(11) و(9) والتي تمثل الحالة غير الثابتة (Unsteady State) بكتابتها بالشكل:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} - \rho g &= 0 \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} + \frac{\partial p_2}{\partial x} - \frac{\mu}{d_0 u_0} \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(14)$$

إذ أن:

$$\begin{aligned} v_2=0 \text{ at } y=0, \quad u_2=0 \text{ at } y=0 \\ v_2=0 \text{ at } y=1, \quad u_2=0 \text{ at } y=1 \end{aligned}$$

5- الاضطراب الحادث بالاتجاهين x, y

لإيجاد الحل لهذه المنظومة من المعادلات، نتصور أن الاضطراب حاصل بالاتجاهين x, y وأن السعة ثابتة، يمكن كتابة المعادلات بالصورة الآتية [2]

$$\left. \begin{aligned} U_2 &= U(y) e^{at} e^{ikx} \\ V_2 &= V(y) e^{at} e^{ikx} \\ P_2 &= P(y) e^{at} e^{ikx} \end{aligned} \right\} \dots(15)$$

إذ أن k تمثل قيمة حقيقية لا بعدية لطول الموجة بالاتجاهين x, y ، a سرعة الموجة وهي قيمة معقدة (Complex) $(a=a_1+ia_2)$ وأن القيمة الموجبة أو السالبة لـ a_1 بهذه الحالة هي التي تؤدي إلى نمو الاضطراب أو تلاشيها على التوالي. فعندما تكون $a_1 > 0$ فالمنظومة تكون غير مستقرة (Unstable) وعندما تكون $a_1 < 0$ فمنظومة (تدقق المائع في شريحة الصابون تكون مستقرة (Stable) [5].

كما أن $U(y), V(y), P(y)$ تمثل سعة الموجة (Amplitude Functions).

بعد إهمال الحدود الصغيرة وغير الخطية بالنسبة للاضطراب وتعويض (15) في (14) نحصل على:

$$ikU(y) + V'(y) = 0 \dots(16)$$

$$aU(y) - \frac{\mu}{d_0 u_0} U''(y) = 0 \dots(17)$$

$$aV(y) - \frac{\mu}{d_0 u_0} V''(y) = 0 \dots(18)$$

إذ أن: $e^{at+ikx} \neq 0$

الآن سوف نقوم بتطبيق طريقة كالاركين (Galerkin method) على المعادلات (16)، (17)، (18) وكما يلي:
لتكن:

$$U(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (An \cos \lambda_n y + Bn \sin \lambda_n y)$$

$$U(y) = A \cos \lambda y + B \sin \lambda y$$

الحد النموذجي هو

$$y = 0 \Rightarrow U(0) = A + 0 = 0$$

$$\therefore u(y) = B \sin \lambda y$$

$$y = 1 \Rightarrow U(1) = B \sin \lambda = 0$$

يمكن الحصول على الحل الصفري (Trivial Solution)

$$\lambda = n\pi \text{ عندما}$$

$$U(y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(n\pi)y$$

وبنفس الطريقة يمكن كتابة

$$V(y) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \sin(n\pi)y$$

وبتعويض $U(y), V(y)$ في (19) و (20)

$$aU(y) + \frac{\mu^2}{d_0^2 u_0^2 iK} V''(y) = 0 \quad \dots(19)$$

$$aV(y) - \frac{\mu}{d_0 u_0} V''(y) = 0 \quad \dots(20)$$

نحصل على:

$$aB_n \sin(n\pi)y - \frac{\mu(n\pi)^2}{d_0^2 u_0^2 iK} D_n \sin(n\pi)y = 0$$

المتبقي R_1 (Residual) هو

$$R_1 = \sum_{n=1}^p \left[aB_n - \frac{\mu^2(n\pi)^2}{d_0^2 u_0^2 iK} D_n \right] \sin(n\pi)y$$

وكذلك

$$aD_n \sin(n\pi)y + \frac{\mu(n\pi)^2}{d_0^2 u_0^2} D_n \sin(n\pi)y = 0$$

$$R_2 = \sum_{n=1}^p \left[a + \frac{\mu(n\pi)^2}{d_0^2 u_0^2} \right] D_n \sin(n\pi)y$$

بما أن المتبقي (Residuals) متعامد مع $\sin(m\pi)y$

إذن

$$\int_0^1 \{R_1\} \sin(m\pi)y dy = 0 \quad \dots(21)$$

$$\int_0^1 \{R_2\} \sin(m\pi)y dy = 0 \quad \dots(22)$$

إذ أن (21)، (22) تمثل معادلات جبرية متجانسة عند B_n, D_n .

للملائمة أكثر يمكن كتابة

$$X_1(n, m) = \int_0^1 a \sin(n\pi)y \sin(m\pi)y dy$$

$$X_2(n, m) = 0$$

$$y_1(n, m) = - \int_0^1 \frac{\mu^2 (n\pi)^2}{d_0^2 u_0^2 iK} \sin(n\pi)y \sin(m\pi)y dy$$

$$y_2(n, m) = \int_0^1 \frac{\mu(n\pi)^2}{d_0 u_0} \sin(n\pi)y \sin(m\pi)y dy$$

$$m=1, 2, \dots, n$$

هي مصفوفات مربعة والتي تنشئ المصفوفة المربعة X . X_1, X_2, Y_1, Y_2

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \dots (23)$$

المعادلات (21)، (22) تبين أن الثوابت D_n, B_n تحقق المعادلات الجبرية المتجانسة

$$X_1(m, n)B_n + Y_1(m, n)D_n = 0$$

$$X_2(m, n)B_n + Y_2(m, n)D_n = 0$$

أو بالمصفوفات التي بالشكل

$$\begin{bmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots (24)$$

المعادلة (24) تمثل نظام من المعادلات الجبرية الخطية المتجانسة وهذا النظام له حل إذا فقط إذا كان $|x| = 0$

المصفوفة X التي هي مصفوفة مربعة $(p \times p)$ إذ أن $p = 2n$ تمثل مصفوفة في (23).

الآن لنختار $n = 2$ إذن كل من المصفوفات X_1, X_2, Y_1, Y_2 هي برتبة 2×2

(يمكن اختيار $n > 2$ والتي تعطينا نتائج متكافئة)

إذن X يجب أن تكون 4×4 وكما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 & \frac{-\mu^2 \pi^2}{d_0^2 u_0^2 (iK)} & 0 \\ 0 & (a + \frac{\mu}{d_0 u_0} (2\pi)^2) & 0 & \frac{-\mu^2 (2\pi)^2}{d_0^2 u_0^2 (iK)} \\ 0 & 0 & \frac{\mu \pi^2}{d_0 u_0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu (2\pi)^2}{d_0 u_0} \end{bmatrix}$$

وباستخدام برنامج في نظام الـ MATLAB يمكن حساب

$$|x| \quad 1.$$

2. حل المعادلة $|x| = 0$ بالنسبة لـ a وكما يلي :

$$|x| = a \frac{\mu^2 \pi^6}{d_0^2 u_0^2} + \mu \frac{\mu^3 \pi^6}{d_0^3 u_0^3}$$

$$a = -4 \frac{\mu \pi^2}{d_0 u_0}$$

الحالة الأولى:

عندما تكون قيمة u_0, d_0 بإشارتين متشابهتين وهذا يؤدي إلى استقرار النظام [4].

الحالة الثانية:

عندما تكون قيمة u_0, d_0 بإشارتين مختلفتين وهذا يؤدي إلى عدم استقرار النظام.

6- الاستنتاجات

لقد قمنا بإيجاد قيم سرعة الموجة a إذ أنها تمثل كمية معقدة اي $(a=a_1+ia_2)$ وان القيمة الموجبة أو السالبة لـ a_1 هي التي تؤثر في حالة الاضطراب أو تلاشيه، لقد تم تجزئة نظام المعادلات إلى جزئين. الجزء الأول هو الجزء المستقر ويكون صغيرا جدا مقارنة بالجزء الثاني والمهم في تحليل الاستقرار وتم إيجاد الحل أو قيم a باستخدام تقنية كلاركين ثم استخدمنا نظام (Matlab) للحصول على سرعة الموجة a والتي تعتمد على قيم u_0, d_0 وبين أن هذا النظام يكون مستقر إذا كانت قيمة u_0, d_0 مختلفتين بالإشارة ويكون النظام غير مستقر إذا كانت قيمة u_0, d_0 بإشارة متشابهة.

المصادر

- [1] Al-Obaidi, M.F. and Abraham, B.M. 2001, "Stability analysis an chaos in a Bend Duct", Raf. J. Sci, Vol. 12, No.1, pp. 91-99.
- [2] David L. Geoge, 2004, "Numerical Approximation of the Nonlinear Shallow water Eqations with Topography and Dry Beds", pp. 5-8.
- [3] Frederik Brasz, 2010, "soap films :Statics and Dynamics".
- [4] Henry M.P. and Robert J.S., 1978, "Introduction to dynamics and control", Mc Graw-Hill, London.
- [5] John M.Burgess, J.B Swift, 1998, "Instability of the Kolmogorov flow in a soap film".
- [6] Logan J.D., 1987, "Applied Mathematics Wiley and Sony".
- [7] L.W. Schwartz and R.V. Roy, 2000, "Modeling Draining Flow in Mobile and Immobile Soap films".
- [8] Rutayna J. Essa, 2004, "Analysis of thin liquid films " .
- [9] Valeria Casteletto, 2003, "Stability of Soap films: Hysteresis and Nacleatiion of Black films".