Al Kut Journal of Economics and Administrative Sciences /ISSN: 1999 -558X /ISSN Online 2707-4560/ Vol (16) Issue: 51-2024 (June)

AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

دراسة مقارنة بين بعض مقدّرات الحرف لنموذج انحدار بيتا باستخدام المحاكاة

https://doi.org/10.29124/kjeas.1651.19

قصيد عبد العزيز حسن[1]   أ.م. د علي حميد يوسـف[2]

كلّية الإدارة والاقتصاد / جامعة واسط

المستخلص :-

تَمّ في هذا البحث التطرق إلى أحد النماذج الخطّية المعمّمة الشائعة في نمذجة النسب ، ألا وهو نموذج انحدار بيتا (Beta Regression Model)، إذْ تَمّ هذا النموذج في حالة وجود علاقة ارتباط قوية بين المتغيّرات التوضيحية والتي تسّبب مشكلة التعدّد الخطّي (Multicollinearity)، وقد تَمّ استعمال طريقة انحدار الحرف البيتا (Ridge Bate Regression) للتغلّب على هذه المشكلة كبديل عن طريقة الإمكان الأعظم. ولأن طريقة انحدار الحرف البيتا تعتمد على مَعْلَمة تسمى بمَعْلَمة الحرف وتتأثر طريقة انحدار الحرف المبنية على المعلمات السبع نتائج كثيراً باختيارها؛ فاختيرت سبع مَعْلمات حرف مختلفة. وقد تَمّ مقارنة قيم عدّة للارتباط ، وكذلك لعدد من حجوم العينات وقيم مختلفة لمعاملات وطريقة الإمكان الأعظم من خلال تجارب محاكاة لعدد من حجوم العينات وقيم مختلفة لمعاملات الارتباط وكذلك قيم عدّة لمَعْلَمة التشتت ϕ الخاصة بنموذج انحدار بيتا ونموذجين للمتغيرات التوضيحية ، وقد كانت من بين أهم النتائج التي أظهرتها هذه التجارب امتلاك الطرائق جميعها خاصية الاتساق لكون قيم متوسّط مربعات الخطأ MSE لجميعها يقل بزيادة حجم العينة. وقد أظهرت النتائج أفضلية طريقة انحدار الحرف مع المَعْلَمة الخامسة تليها المَعْلَمة السادسة في معظم الحالات المدروسة.

1-1 المقدمة

يُعدّ نموذج انحدار بيتا (BRE) هو أحد الأساليب الإحصائية التي يتَمّ استعماله عندما يكون المتغيّر المعتمد يمثّل النسب والنسب المئوية والمعدّلات ولا يتّبع التوزيع الطبيعي ويُعدّ من التوزيعات المرنة والمفيدة لنمذجة المتغيّرات العشوائية المستمرة والتي يشترط ان تكون قيمها ضمن فترة زمنية (0,1) يُعدّ انحدار بيتا امتداد لنماذج الخطّية المعممة (GLM) ويُعدّ الباحثين (Cribari-Neto و Ferrari- Silvia) أول من اقترحا نموذج انحدار بيتا عام 2004 م إذْ قام بربط الدالة المتوسطة لمتغير التابع الخاص به بمجموعة من التركيبات الخطّية من خلال دالة الربط [1] . وبعدها توالت الدراسات والأبحاث في عام 2005 م (Cribari-Netoi و Vasconcellos) قام الباحثان تقدير لمعلمات نموذج انحدار

بيتا الذي يقتصر على البيانات المحصورة قيمها بين (1،0).عام 2007 (Korhonen, L., Korhonen, K.T., Stenberg, P., Maltamo, M) . عام 2008 بين الباحثون (Francisco Espinheira , Patrícia, Ferrari, Silvia , Cribari-Neto) الاخطاء الممكن استعمالها في تقدير انحدار بيتا عندما يكون متغير الاستجابة نسبياً .وغيرهم من الباحثين الذين تنالوا نموذج انحدار بيتا في أبحاثهم نستعرض منهم (Zhao, W., Zhang, R., Lv, Y., & Liu, J) عام 2014 و(Ünlü، Hande , Aktaşk , Serpil)عام 2017 ، (Mohamed R. Abonaze و d Ibrahim M. Tah) عام 2021 ، (عبد الرزاق ، آيه رعد) في العام نفسه ايضًا .

1-3 : مشكلة البحث

في بعض الدراسات يكون المتغيّر المعتمد على شكل معدلات أو نسب مئوية فيكون الانحدار الخطي غير ملائم للتعامل مع هكذا بيانات كما أن وجود ارتباط بين المتغيّرات التوضيحية سيؤثّر على مقدّرات الإمكان الأعظم لذا من المناسب استعمال انحدار بيتا (Beta) مــع مقدّرات انحدار الحــرف .

1-4: هدف البحث

يهدف البحث إلى المقارنة بين بعض مقدّرات الحرف لنموذج انحدار بيتا وتتّمّ عملية المقارنة بين المقدّرات عن طريق استعمال المحاكاة بطريقة مونت كارلو وذلك بالاعتماد على معيار MSE .

الكلمات المفتاحية : نموذج انحدار بيتا ، متوسّط مربعات الخطأ ،الإمكان الأعظم ، طريقة انحدار الحرف

1-2 نموذج انحدار بيتا

يُعدّ توزيع بيتا من التوزيعات المرنة والملائمة لنمذجة المتغيّرات العشوائيــة المستمرة ، التي يشترط فيها أنّ تكون القيم ضمن فترة زمنية (0,1) مثل المعدلات والنسب المئوية ، في بعض الاحيان يكون الباحث مهتّم بنمذجة بالتغييرات ، مثل معدل الدخل ومعدل البطالة نسبة الانفاق على الطعام إلى الدخل الكلي وغيرها [2] ويُعدّ الباحثين (Ferrari,Ribarimeto,2004) هما اول من قدما مفهوم انحدار بيتا إذْ بينا أنّ متغير الاستجابة (y) يتبع توزيع بيتا وتكون قيمته ضمن (0,1) ويُعدّ التوزيع المنتظم هو حالة خاصة من توزيع بيتا عندما تكون قيم المعلمتين (β&α) تساوي وأحد ($\beta = \alpha = 1$).يمكن تعريف نموذج انحدار بيتا للمتغيرات العشوائية المستمرة والذي تحتوي على معلمتين (μ) مَعْلَمة الشكل و (ϕ) مَعْلَمة الدقة ويمكن كتابة دالة كثافة نموذج انحدار بيتا بمعلمات جديدة الذي اقتراحاه الباحثان (Gribario - Neto and Ferrari) كما بالشكل الآتي [3]:-

$$f(y,\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma\alpha\Gamma\beta} y^{\alpha-1}\,(1-y)^{\beta-1} \qquad y \in (0,1) \qquad (1)$$

إذْ ان :-

E(y)= μ $(0 < \mu < 1)$ و $V(y) = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\phi}$, $\phi > 0$

إذْ ان μ هو الوسط الحسابي لمتغير الاستجابة (مَعْلَمة الشكل) و ϕ هي مَعْلَمة الدقّة بمعنى ان كلما زادت قيمتها قّل التباين y بثبوت لـــ μ و المَعْلَمة (ϕ^{-1}) تدعى بمَعْلَمة التشتت.(12)

$$f(y,\mu,\boldsymbol{\phi}) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma\mu\phi\Gamma(1-\mu)\phi}\ y^{\mu\phi-1}\left(1-y\right)^{(1-\mu)\phi-1} \qquad (2)$$

يُعدّ انحدار بيتا امتداد لنماذج الخطّية المعممة (GLM) إذْ أنْ النماذج الخطّية المعممة تختلف عن الانحدار الخطي القياسي لكون القيم المتوقعة μ_i للمتغير العشوائي التابع y يمكن استبدالها بدالة ربط . وهناك العديد من دوال الربط منها .

$$g(\mu i) = \eta = \acute{x}_i\beta = \log\left(\frac{\mu_i}{1-\mu_i}\right) \qquad (3)$$

إذْ أنّ :-

η : هي تركيبة خطية من المتغيّرات التوضيحية .

g (.)   تمثل دالة ربط رتيبة قابلة للاشتقاق تستعمل لربط المتغير   التابع بالمتغيّرات التوضيحية والهدف الأساس من دالة الربط هو جعل تباين الخطأ اكثر استقراراً x_i هو صف (i) من المصفوفة X وهي مصفوفة البيانات من الدرجة (n×p) .

$B = (B_1, B_2 \ldots B_P)'$ متجه معاملات الانحدار غير المعلومة من الدرجة (p×1).

لغرض تقدير معلمات بيتا نأخذ Log لدالة الإمكان بناءً على n من المشاهدات للمتغيرات التوضيحية والتي تعطى بالشكل الاتي [4]**:-**

$$L(B,\phi) = \sum_{i=1}^{n} L(\mu_{i,}\phi) \qquad (4)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \log\Gamma\phi - \log\Gamma(\mu_i\ ,\phi) - \log\ (1-\mu_i)\phi + (\phi\mu_i - 1)log\, y_i(\phi - \phi\mu\ - 1)\ + \log\Gamma(1-\ y_i\ ) \qquad (5)$$

يتَمّ الحصول على دالة الهدف (النتيجة) عن طريق الاشتقاقات بين اللوغاريتَمّ   لدالّة الامكان

$$U(B) = \phi \acute{X} T (y^* - \mu^*) \qquad (6)$$

إذْ أنّ :-

$$T = diag \left\{ \frac{1}{\acute{g}(\mu_1)} \quad , \quad \dots \frac{1}{\acute{g}(\mu_n)} \right\}$$

$$y^* = (y^*{}_1, \dots, y^*{}_n)\acute{} \quad , \quad \mu^* = (\mu_1{}^*, \dots, \mu^*{}_n)\acute{}$$

$$y^* = \log(\frac{y_i}{1-y_i})$$

$$\mu^* = \psi \{\mu_i \phi - \psi(1-\mu_i)\phi\}$$

يتّم استعمال طريقة الأسلوب التكراري ضمن طرائق خوارزمية نيوتن رافسون لكون المعادلة (4) غير خطية لإيجاد مقدّرات معلمات B ويمكن كتابة الخوارزمية بالشكل الآتي :-

$$B^{(r+1)} = B^r + I_{BB}^r \; U_{BB}^r(B) \qquad (7)$$

اذ ان :-

I_{BB}^r هي مصفوفة الوحدة (مصفوفة المعلومات) لــ B

.... r = 0,1,2 هي عدد التكرارات التي يتَّم تنفيذها حتى الوصول إلى التقارب للقيم من ثابت صغير معين وبعد التبسيط يكون الشكل النهائي في الصيغة خوارزمية التقدير بعد أنْ تَمّ ربطها بالمربعات الصغرى الاعتيادية الموزونة التكرارية وكالآتي [2] :-

$$\widehat{\beta}_{ML} = \left(\acute{X} W X\right)^{-1} \acute{X} W z \qquad (8)$$

$$Z = \widehat{\eta} + \widehat{W}^{-1} \widehat{T} (y^* - \mu^*)$$

$$W = diag(\widehat{w}_1 \quad \dots \widehat{w}_n)$$

اما متوسّط مجموع مربعات الخطأ (Mean Squared Error) لمعلمات نموذج انحدار بيتا Beta المقدرة وفق طريقة مقدّرات الإمكان الأعظم كما يأتي

$$MSE(\widehat{\beta}_{ML}) = E(\hat{\beta}_{ML} - \beta)\acute{}(\hat{\beta}_{ML} - \beta)$$

$$= \mathrm{trace}\left\{\emptyset(\acute{X}WX)^{-1}\right\}$$

$$= \phi \sum_{j=1}^{p} \frac{1}{\lambda_j} \qquad (9)$$

إذْ أنّ :

λ_j : للمصفوفة للعنصر المميزة الجذور تمثل $(\acute{X}\widehat{W}X)$

1-5 مقدّرات انحدار بيتا الحرف :-

في حالة وجود ارتباطات بين المتغيّرات التوضيحية فأن طريقة الإمكان الأعظم تكون غير كفؤة إذْ يكون التباين عالياً لمقدّراتها والأسلوب المقترح هو استعمال طريقة انحدار الحرف (Beat Ridde Regression) والتي تعمل على تصغير مجموع مربعات الاخطاء الموزونة ، فيمكن كتابة مجموع مربعات الاخطاء الموزونة Weighted Sum of Square Error (WSSE) بالمعادلة الاتية [5] :-

$$\phi = (y - \hat{\beta}\acute{)}(y - \beta)$$

$$= (y - X\hat{\beta}_{ML})'(y - X\hat{\beta}_{ML}) + ((\hat{\beta} - \hat{\beta}_{ML}))'X'WX(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{ML})$$

$$\phi = \phi_{min} + \phi(\beta) \qquad (10)$$

إذْ إنّ :

ϕ_{min} : تمثّل دالة مجموع مربعات الخطأ

$\phi(\beta)$: تمثل مقدار التحيز

يتّم الحصول على مقدر $\hat{\beta}_{BRR}$ الذي يقلل مجموع مربعات الاخطاء الموزونة وفقًا للقيد الاتي

$$(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{ML}\acute{)}\acute{X}WX(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{ML}) = \phi_0 \qquad (11)$$

$$Minimize(F) = (y - \hat{\beta}\acute{)}\left(y - \hat{\beta}\right) \qquad (12)$$

$$= (y - X\hat{\beta}_{ML}\acute{)}(y - X\hat{\beta}_{ML}) + \left(\hat{\beta} - \acute{\hat{\beta}}_{ML}\right)\acute{X}WX\left(\hat{\beta} - \hat{\beta}_{ML}\right) \qquad (13)$$

إذْ إنّ

$1/\lambda$: مضاعف لانكرانج Lagrangian [2]

نقوم باشتقاق المعادلة بالنسبة لـــ β وبمساواة المشتقة للصفر

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 2\beta + \frac{\{2\acute{X}WX(\hat{\beta}-\hat{\beta}_{ML})\}}{\lambda} = 0$$

وبعد التبسيط نحصل على مقدر BRR كما في المعادلة الآتية :

$$\hat{\beta}_{BRR} = \hat{\beta} = \left(\acute{X}WX + \lambda I\right)^{-1}\hat{X}WX\hat{\beta}_{ML} \qquad (14)$$

إذْ إنّ λ معامل التقليص و I مصفوفة الوحدة

اما متوسّط مربعات الخطأ (MSE) هو معيار لقياس أيّ المقدّرين لمعْلمات انحدار بيتا المقدّرة وفق انحدار الحرف فيكون[6].

$$\text{MMSE} = \text{Var}(\hat{\beta}) + \{Bias(\hat{\beta})\}\{(Bias(\hat{\beta})\}' \qquad (15)$$

إذْ إنّ

$\text{Var}(\hat{\beta})$ تمثل مصفوفة التباين ـ التباين المشترك والتحيز($\hat{\beta}$) هو مقدر متجه التحيز لــ β .

إذْ إنّ يمكن كتابة مصفوفة التباين والتغاير لــ $\hat{\beta}_{BRR}$ كالآتي

$$Var(\hat{\beta}_{BRR}) = \phi\ \left[\left(\acute{X}WX + \lambda I\right)^{-1}\acute{X}WX(\acute{X}WX) + \lambda I)^{-1}\right] \qquad (16)$$

ومتجه التحيز لــ β_{BRR} هو

$$\text{Bias}(\beta) = \text{E}(\hat{\beta}_{\text{BRR}}) - \hat{\beta} = -\lambda(\acute{X}\text{WX} + \lambda I)^{-1}\beta \qquad (17)$$

ويمكن تعريف MSE لـ $\hat{\beta}_{BRR}$ من خلال تطبيق تأثير الحرف ع النحو الآتي :

$$\text{MSE}\ (\hat{\beta}_{BRR}) = trace[\phi\{(\acute{X}\text{WX}+\lambda I)^{-1}\acute{X}\text{WX}(\acute{X}\text{WX}+\lambda\text{I})\}]^{-1} + \lambda^2\acute{\beta}(\acute{X}\text{WX} + \lambda\text{I})^{-2}\beta$$

$$= \phi\ \sum_{j=1}^{p}\frac{\lambda j}{(\lambda j+k)^2} + \lambda^2\sum_{j=1}^{p}\frac{\Upsilon_j^2}{(\lambda j+k)^2} = \delta_1(\lambda) + \delta_2(\lambda). \qquad (18)$$

إذْ إنّ:-

$\lambda_1\ \lambda_2, \ldots.. \lambda_p,$ هي الجذور المميزة لمصفوفة $\acute{X}WX$ و jth هو العنصر $\acute{X}$ لـ$\hat{\beta}_{ML}$ و X هي المصفوفة التي تمثل اعمدتها المتجهات الذاتية لـــ $\acute{X}WX$,i ,e., $X = (X_1, X_2, \ldots X_p)$

إذْ إنّ X_j هو المتجه الذاتي للمصفوفة $\acute{X}WX$, كذلك تعمل هذه الكمية (λ) على تقليل التباين على الرغم من أنّ طريقة انحدار الحرف متحيزة لكنها تمتلك متوسّط مربعات الخطأ (MSE) اقل من متوسّط مربعات الخطأ للإمكان الاعظم[1]. [

1-6:طرائق تقدير مَعْلَمة الحرف

تَمّ اقتراح صيغ عديدة ومتنوعة لاختيار افضل مقدر مَعْلَمة الحرف او مَعْلَمة التحيز (**λ**) من قبل الباحثين وفيما يأتي استعراض بعض صيغ تقدير المَعْلَمة :-

1- اقترح Lawless and Wang طريقة تستند إلى الأسلوب البيزي ويمكن تعديل هذه الطريقة لــ BRR وفق الصيغة الاتية [7] .

$$\lambda_1 = \frac{p\phi}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_j \Upsilon_j^2} \qquad (19)$$

اذ ان :

λ_j : تمثل القيم الذاتية لمصفوفة المعلومات .

2- اقترح Qasim e al افضل المعلمات الحرف لــ BRRE باستعمال دالة ربط logit كما موضح بالصيغ الرياضية[2]:-

$$\lambda_2 = \max\left(\frac{(n-p)/\phi + \lambda_{max}\Upsilon_j^2}{\min(\lambda_j)}\right) \qquad (20)$$

$$\lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_j \Upsilon_j^2}{p\phi} \qquad (21)$$

$$\lambda_4 = \frac{\sum_{j}^{p+1} \lambda_j \alpha_j^2}{(p+1)\phi} \qquad (22)$$

3- قمنا باقتراح مَعْلَمة الحرف كما موضح في الصيغة الرياضية الاتية :-

$$\lambda_5 = \max\left(\frac{(n-p)/\phi + \lambda_{min}\Upsilon_j^2}{\lambda_{min}}\right) \qquad (23)$$

1-7 دراسة أسلوب محاكاة - Monte - Carlo

إذ يتَمّ في هذه المرحلة اختيار القيم الافتراضية للمعلمات، وقد تَمّ اختيار حالتين من عدد المتغيّرات التوضيحية (p=4, 8)، وكما يأتي:

وبالنسبة لمَعْلَمة التشتت فقد تَمّ اختيار ثلاث قيم هي $\phi = 1,5$، وبأحجام عينات مختلفة هي 30 و60 و100 . ولأن اهتمام الدراسة هو حل مشكلة الارتباط المتعدد بين المتغيّرات التوضيحية فقد اختيرت قيم مختلفة للارتباط بين هذه المتغيّرات ومعاملات الارتباط هي $\rho = 0.95,0.99$ والجدول الآتي يلخص الحالات المدروسة جميعها.

وهي مرحلة مهمة جداً لاعتماد الخطوات التي تليها عليها، فقد تَمّ توليد المتغيّرات التوضيحية وفقاً للصيغة الآتية:

$$x_{ij} = (1-\rho^2)^{1/2} z_{ij} + \rho z_{i(j+1)}; i = 1,2, \dots n; j = 1,2, \dots, p$$

إذْ إن z_{ij} هي قيم يتَمّ توليدها من التوزيع الطبيعي القياسي. وقد تَمّ توليد المتغيّر المعتمد من توزيع بيتا وفقاً لما يأتي:

$$y_i \sim Beta\big(\mu_i \phi, (1-\mu_i)\phi\big); i = 1,2, \dots, n$$

إذْ إن:

$$\mu_i = \frac{exp(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta})}{1 + exp(\boldsymbol{x}_i' \boldsymbol{\beta})} \qquad (24)$$

لغرض المقارنة بين طريقتي التقدير تَمّ اللجوء إلى معيار متوسّط مربعات الخطأ (MSE)، وكما يأتي:

$$MSE(\hat{\beta}) = \frac{1}{L} \sum_{I=1}^{L} (\hat{\beta}_I - \beta)' (\hat{\beta}_I - \beta) \qquad (25)$$

إذْ إن $\boldsymbol{j}$ هو متجه بالبعد $(p+1) \times 1$ جميع قيمه هي الواحد الصحيح.

نتائج عمليات المحاكاة :

قيم تقديرات المَعْلَمات وقيم معيار MSE عندما

$$\boldsymbol{p = 4, \phi = 5, \rho = 0.95, 0.99, n = 30, 60, 100}$$

P	**phi**	**Rho**	**N**	**MLE**	**BBR1**	**BBR2**	**BBR3**	**BBR4**	**BBR5**	**BBR6**	**BBR7**
4	**5**	**0.95**	**30**	**1114.08**	**185.964**	**836.468**	**969.328**	**23.24095**	**1.498272**	**2.925408**	**21.34896**
			60	**349.2361**	**48.80334**	**79.06061**	**29.00938**	**18.72436**	**1.21632**	**1.560864**	**3.875244**
			100	**50.55943**	**20.98829**	**20.18749**	**6.113052**	**8.152128**	**0.942396**	**1.157028**	**2.521668**
4	**5**	**0.99**	**30**	**1321.188**	**594.2614**	**880.356**	**1091.587**	**23.26498**	**1.622232**	**5.649792**	**22.19296**
			60	**536.3352**	**108.5129**	**308.6266**	**125.7721**	**21.4229**	**1.255752**	**2.057592**	**7.665468**
			100	**116.2578**	**30.06652**	**24.488**	**11.85073**	**10.91026**	**1.106184**	**1.18242**	**2.766612**

قيم تقديرات المَعْلمات وقيم معيار MSE عندما

$$p = 4, \phi = 1, \rho = 0.95, 0.99, n = 30, 60, 100$$

P	phi	rho	n	MLE	BBR1	BBR2	BBR3	BBR4	BBR5	BBR6	BBR7
4	1	0.95	30	750.46422	27.21404	508.84867	104.0752	0.703098	0.479899	0.250446	0.758236
			60	8.54472	7.539781	5.3958967	1.473858	0.580185	0.285787	0.168796	0.742488
			100	1.593144	1.593144	1.0210843	0.80339	0.80339	0.252673	0.162183	0.738179
4	1	0.99	30	929.752	276.4924	698.1052	236.9832	0.97234	0.510437	0.316768	0.834495
			60	10.197397	7.176023	6.348335	2.265643	0.595677	0.324686	0.190227	0.743526
			100	2.1742623	1.840504	1.4343093	1.135421	0.497065	0.290448	0.166804	0.739455

الاستنتاجات:-

1- بزيادة حجم العينة تقل قيمMSE الطرائق المدروسة جميعها مما يدل على امتلاكها جميعًا لخاصية الاتّساق وباختلاف قيم ϕ وعدد التغيرات .

2- تقارب سلوك الطرائق المختلفة عند زيادة حجم العينة بغض النظر عن عدد المتغيّرات وقيم ϕ.

3- يقل تأثير التعدد الخطي بزيادة حجم العينة ، مما يعني التخلص من مشكلة يكون عن طريق زيادة حجم العينة عند القيم المختلفة لمَعْلَمة ϕ ، وعدد المتغيّرات التوضيحية .

4- تقل كفاءة طريقة التقدير بزيادة قيمة معامل الارتباط ، ممّا يدلّ على وجو علاقة عكسية بينهما ،

5- زيادة قيم MSE بزيادة قيمة مَعْلَمة ϕ ، ممّا يدلّ وجود علاقة طردية بينهما .

التوصيات :- من خلال نتائج البحث نوصي بالآتي

1- استخدام انحدار بيتا عمومًا عندما تكون بيانات المتغيّر التابع ، هي عبارة عن نسب وانحدار بيتا بوجود مَعْلَمة الحرف، ولا سيمّا عند وجود مشكلة التعدد الخطي .

2- استخدام طريقة الحرف عند المَعْلَمة الخامسة والسادسة وذلك لتفوقهما في عملية التقدير.

المصادر

1- Bayer, F. M., & Cribari-Neto, F. (2013). Bartlett corrections in beta regression models. Journal of Statistical Planning and Inference, 143(3), 531-547.

2- Qasim, M., Månsson, K., & Golam Kibria, B. M. (2021). On some beta ridge regression estimators: Method, simulation and application. Journal of Statistical Computation and Simulation, 91(9), 1699-1712.

3- Abonazel, M. R., & Taha, I. M. (2021). Beta ridge regression estimators: simulation and application. Communications in Statistics-Simulation and Computation, 1-13.

4- FERRARI, SILVIA, CRIBARI-NETO, FRANCISCO (2004) , `Beta Regression for Modelling Rates and Proportions‟ , Journal of Applied Statistics, Vol. 31, No. 7, 799–815

5- Hoerl, A. E., & Kennard, R. W. (1970). Ridge regression: Biased estimation for nonorthogonal problems. Technometrics, 12(1), 55-67.

6- Alkhamisi, M., Khalaf, G., & Shukur, G. (2006). Some modifications for choosing ridge parameters. Communications in Statistics-Theory and Methods, 35(11), 2005-2020.

7- Korhonen, L., Korhonen, K. T., Stenberg, P., Maltamo, M., & Rautiainen, M. (2007). Local models for forest canopy cover with beta regression.