New Acceleration Formula For Improvement Results Of The Numerical Integrations

صيغة تعجيلية جديدة لتحسين نتائج التكاملات العددية

م.م. ندى احمد محمد طه الكرمي
جامعة الكوفة / كلية التربية للبنات
nadaa.kharmi@uokufa.edu.iq

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو اقتراح صيغة تعجيلية جديدة لتحسين نتائج التكاملات الاحادية عدديا ذات المكاملات المستمرة او المعتلة في احدى او كلتي نهايتي فترة التكامل او المستمرة لكن معتلة المشتقة في احدى او كلتي نهايتي فترة التكامل بالاستفادة من تعجيل رومبرك [6] وحدود التصحيح المرافقة في حالة استخدام لقواعد نيوتن – كوتس [6].حيث قارنا النتائج المحصل عليها مع نتائج تعجيلي ريتشاردسون [7] و ايتكن[1] المعروفين فحصلنا على نتائج افضل ذات دقة عالية وبفترات جزئية .

Abstract

The main aim of this paper is to suggest new accelerate formula to improve the results of single integral numerically when the integrand is continuous function or singular or has singularity in one of the end of integration or both by depending on Romberg acceleration

1- المقدمة

يعرف التكامل العددي (Numerical Integration) بأنه دراسة كيفية إيجاد القيمة التقريبية لتكامل معين ، ويرجع تاريخ تطبيق التكامل العددي إلى بداياته في إيجاد مساحة دائرة بطريقة التربيع الإغريقي (Greek quadrature) وذلك من خلال تجزئة الدائرة إلى مضلعات منتظمة (Regular polygon) وبواسطة هذه الطريقة تمكن ارخميدس من أيجاد الحدود العليا والدنيا لقيمة النسبة الثابتة (π)، موسى [8] .

وقد عمل عدد من الباحثين على ايجاد قيم التكاملات العددية بشكل متسلسلة تقترب الى القيمة الدقيقة للتكامل ، كما عمل اخرون في مجال تعجيل نسبة تقارب القيمة التقريبية الى القيمة الدقيقة للتكامل الاحادي منهم العالم الانكليزي لويس فراي ريتشاردسون, Lewis Fry Richardsonحيث قدم في عام 1910 طريقة لتحسين النتائج وهي طريقة الاستكمال لريتشاردسون في حل مسائل التكامل العددي ، والحلول العددية للمعادلات التفاضلية والمسائل التي يقسم فيها المدى إلى عدد محدود من الفترات الجزئية المتساوية التي طولها يساوي h وهي طريقة تطبق على المسائل التي يمكن كتابة صيغة الخطأ على شكل متسلسلة قوى في h .

وفي عام 1926 أوجد ألكسندر أيتكن منهجاً جديداً لتعجيل نسبة تقارب المتتابعة المحسوبة في إيجاد قيمة مسألة ما و عُرفت طريقته بطريقة أيتكن دلتا التربيعة Aitken's delta – Squared Process وتعتبر هذه العملية ما هي إلا عملية تعجيل إقتراب القيم المحصل عليها بطريقة تكاملية عددية ما إلى القيمة الدقيقة ، فإذا كان لدينا على سبيل المثال n قيمة بقاعدة شبه المنحرف أو غيرها فسوف نحصل على $n-2$ قيمة بطريقة تعجيل ايتكن . من الجدير بالذكر ان الصيغة الأولى لهذه الطريقة معروفة للعالم الرياضي الياباني تاكاكازوسكي كوا Takakazu Seki kowa الذي عاش نهاية القرن السابع عشر ،ناصر [9]

اما في عام 1955 قام العالم الالماني ورنر رومبرك Romberg Werner بتقديم طريقة تتضمن انشاء ترتيبا مثلثيا متألفاً من قيم تقريبية عدديه للتكامل المحدد وذلك بتطبيق التعديل الخارجي لريتشاردسون بصورة متكررة على مسائل التكامل العددي التي يتم فيها تقسيم المدى إلى عدد من الفترات الجزئية المتساوية التي طولها يساوي h وهي طريقة تطبق على المسائل التي يمكن كتابة صيغة الخطأ على شكل متسلسلة قوى في h .

وفي عام 2010 عملت الباحثة ناصر [9] على استخدام قاعدة ايتكن بشكل متكرر فحصلت على نتائج افضل من الطريقة الاولى من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية .

و بالمثل قدمت الكرمي في عام 2012 تحسين لنتائج قاعدة ريتشاردسون باستخدام عدد من حدود التصحيح بدل من الاكتفاء بالحد الرئيس وكانت النتائج افضل من الطريقة الاولى [10] من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية .

وفي هذا البحث قدمنا طريقة تعجيلية جديدة لتحسين نتائج التكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرة او المعتلة في احدى او كلتي نهايتي فترة التكامل او المستمرة لكن معتلة المشتقة في احدى او كلتي نهايتي فترة التكامل الناتجة من استخدام احدى طرائق نيوتن _كوتس مستفيدين من حدود التصحيح المرافقة لها وكانت النتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية

2- قواعد نيوتن – كوتس وحدود التصحيح المرافقة لها

لنفرض التكامل J مكتوب بالصيغة الآتية

$$J=\int_{x_0}^{x_m} f(x)\ dx = G(h)+E_G(h)+R_G$$

فوكس [2]

حيث $G(h)$ تمثل تقريب لاكرانج Lagrangian - Approximation لقيمة التكامل J و (الحرف G يرمز لنوع القاعدة) ، $E_G(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح Correction terms الممكن إضافتها إلى قيم $G(h)$.

R_G هو المتبقي Remainder والمتعلق بالبتر Truncation من $E_G(h)$ بعد استعمال حدود معينة عدة من $E_G(h)$

فان $G(h)$ لصيغ نيوتن – كوتس هي كالاتي

أ- قاعدة شبه المنحرف $T(h)$

$$T(h)=\frac{h}{2}\left[f(x_m)+f(x_0)+2\sum_{i=1}^{m-1}f(x_i)\right]$$

ب- قاعدة النقطة الوسطى $M(h)$

$$M(h)=\sum_{i=0}^{m-1}f(x_i+\tfrac{h}{2})$$

جـ- قاعدة سمبسون $S(h)$

$$S(h)=\frac{h}{3}\left[f(x_m)+f(x_0)+2\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}f(x_{2i})+4\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-1}f(x_{2i+1})\right]$$

فوكس [3]

ان لحدود التصحيح اهمية كبيرة في تحسين قيمة التكامل وتعجيل اقتراب القيمة العددية للتكامل من القيمة التحليلية او الدقيقة وبذلك عمل العالم فوكس [3] وايضا الباحثة ضياء [11] على ايجاد سلاسل حدود التصحيح المرافقة لقواعد نيوتن - كوتس للتكاملات المستمرة او المعتلة في حد او كلي حدي فترة التكامل او المستمرة لكن معتلة المشتقة في حد واحد او كلي حدي فترة التكامل

1 - حدود التصحيح لقواعد نيوتن - كوتس للتكاملات المستمرة

حدود التصحيح لقاعدة شبه المنحرف
$$J-T(h)=A_T h^2+B_T h^4+C_T h^6+\cdots$$

حدود التصحيح لقاعدة النقطة الوسطى
$$J-M(h)=A_M h^2+B_M h^4+C_M h^6+\cdots$$

حدود التصحيح لقاعدة سمبسون
$$J-S(h)=A_S h^4+B_S h^6+C_S h^8+\cdots$$

فوكس [2]

حيث إن $T(h)$ ، $M(h)$ ، $S(h)$ ترمز لقاعدة شبه المنحرف و قاعدة النقطة الوسطى وقاعدة سمبسون على التوالي وان $A_S,B_S,C_S,\ldots$ $A_M,B_M,C_M,\ldots$, $A_T,B_T,C_T,\ldots$ ثوابت و J القيمة الحقيقية (الدقيقة) للتكامل .

2 - حدود التصحيح لقواعد نيوتن - كوتس للتكاملات المستمرة لكن معتلة المشتقة في حد واحد من نهاية فترة التكامل إذ إن الدالة $f(x)$ معتلة المشتقة في النقطة $x=x_0$ ومستمرة في فترة التكامل $(x_1,x_m]$

ان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة شبه المنحرف عندما $f'(x_0)$ غير معرفة تكون :-

$$E_T(h)=\left[\frac{1}{12}h^2D-\frac{1}{12}h^3D^2+\frac{29}{720}h^4D^3-\cdots\right]f_1+A_T h^2+B_T h^4+\cdots$$

وان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة النقطة الوسطى عندما $f'(x_0)$ غير معرفة تكون :-

$$E_M(h)=\left[-\frac{1}{6}h^2D+\frac{1}{6}h^3D^2-\frac{23}{360}h^4D^3+\cdots\right]f_1+A_M h^2+B_M h^4+\cdots$$

وان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة سمبسون عندما $f'(x_0)$ غير معرفة تكون :-

$$E_S(h)=\left[\frac{1}{180}h^4D^3-\frac{1}{180}h^5D^4+\frac{2}{945}h^6D^5-\cdots\right]f_1+A_S h^4+B_S h^6+\cdots$$

إذ إن $A_T,B_T,\ldots,A_M,B_M,\ldots,A_S,B_S,\ldots$ ثوابت تعتمد على قيم مشتقات الدالة $f(x)$ في النقطة $x=x_m$ ، فوكس [3]

اما سلسلة حدود التصحيح للتكامل مع وجود الاعتلال في المشتقة عند النهاية العليا للتكامل باستعمال قاعدة شبه المنحرف وقاعدة النقطة الوسطى وقاعدة سمبسون على التوالي تكون كالاتي

$$E_T(h)=\left[-\frac{1}{12}h^2D-\frac{1}{12}h^3D^2-\frac{29}{720}h^4D^3-\cdots\right]f_{m-1}+A_T h^2+B_T h^4+\cdots$$

$$E_M(h)=\left[-\frac{1}{6}h^2D-\frac{1}{6}h^3D^2-\frac{23}{360}h^4D^3-\cdots\right]f_{m-1}+A_Mh^2+B_Mh^4+\cdots$$

$$E_S(h)=\left[-\frac{1}{180}h^4D^3-\frac{1}{180}h^5D^4-\frac{2}{945}h^6D^5-\cdots\right]f_{m-1}+A_Sh^4+B_Sh^6+\cdots$$

إذ أن $A_T, B_T, \ldots, A_M, B_M, \ldots, A_S, B_S, \ldots$ ثوابت تعتمد على قيم مشتقات الدالة $f(x)$ في النقطة $x=x_0$ ، فوكس[2]

بينما اذا كانت الدالة $f(x)$ مستمرة في فترة التكامل (x_1, x_{m-1}) ومعتلة المشتقة تحديدا في النقطتين $x=x_0$ و $x=x_m$.

فان سلسلة حدود التصحيح لقاعدة شبه المنحرف هي :-

$$E_T(h)(f_0+f_m)=\left(\frac{1}{12}h^2D-\frac{1}{12}h^3D^2+\cdots\right)f_1+\left(-\frac{1}{12}h^2D-\frac{1}{12}h^3D^2-\cdots\right)f_{m-1}$$

وكذلك سلسلة حدود التصحيح لقاعدة النقطة الوسطى هي :-

$$E_M(h)(f_0+f_m)=\left(-\frac{1}{6}h^2D+\frac{1}{6}h^3D^2+\cdots\right)f_1+\left(-\frac{1}{6}h^2D-\frac{1}{6}h^3D^2-\cdots\right)f_{m-1}$$

وكذلك سلسلة حدود التصحيح لقاعدة سمبسون هي :-

$$E_S(h)(f_0+f_m)=\left(\frac{1}{180}h^4D^3-\frac{1}{180}h^5D^4+\cdots\right)f_1+\left(-\frac{1}{12}h^4D^3-\frac{1}{12}h^5D^4-\cdots\right)f_{m-1}$$

ضياء [11] .

3- تكامل رومبرك Romberg

تعود طريقة رومبرك الى العالم الالماني ورنر رومبرك (Werner Romberg) (1909-2003) م و التي قدمها في عام 1955 م وذلك بتطبيق التعجيل الخارجي لريتشادسون بحيث تضاعف عدد فترات التجزئة بصورة متكررة عند حساب التكامل بإحدى طرق نيوتن – كوتس ولقد اعتمد على سلسلة حدود التصحيح للتكاملات المستمرة او المعتلة المشتقة .

بفرض انه لدينا التكامل الاتي

$$G=\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx \simeq a(h)+Ah^{k_1}+Bh^{k_2}+Ch^{k_3}+\cdots$$

$$G-a(h) \simeq Ah^{k_1}+Bh^{k_2}+Ch^{k_3}+\cdots$$

حيث G القيمة الدقيقة للتكامل ، $\alpha(h)$ قيمة التكامل العددية بإستخدام إحدى طرائق نيوتن - كوتس

$h=\dfrac{x_m-x_0}{m}$ ، m عدد فترات التجزئة المجزء اليها فترة التكامل $[x_0, x_m]$

$Ah^{k_1}+Bh^{k_2}+Ch^{k_3}+\cdots$ صيغة الخطأ او حدود التصحيح المرافقة لطريقة $\alpha(h)$ ، فوكس [3] ، فوكس [2]

ومنها يكون لدينا

$$\bar{\alpha}\left(h,\frac{h}{2}\right)=\frac{2^k\alpha\left(\frac{h}{2}\right)-\alpha(h)}{2^k-1}$$

حيث k هي قوى h في سلسلة حدود التصحيح ، فوكس [3] ، فوكس [2]

والصيغة السابقة هي صيغة تعجيل رومبرك بالاعتماد على حد واحد من حدود التصحيح بشكل متكرر .

4- الطريقة التعجيلية المقترحة

بفرض ان $\alpha(h),\alpha\left(\frac{h}{2}\right),\alpha\left(\frac{h}{4}\right)$ قيم متتالية لاحدى قواعد نيوتن _ كوتس عندما $m_{i+1}=2m_i$ حيث m_i هي عدد التقسيمات لفترة التكامل و $i=1,2,3,\cdots$ ، $h=\dfrac{x_m-x_0}{m}$

اذن

$$\bar{\alpha}\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{4}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)}{2\left(2^{k_1}-1\right)}$$

حيث $\bar{\alpha}\left(\frac{h}{4}\right)$ قيمة تعجيل رومبرك عند $\frac{h}{4},\frac{h}{2}$ باستخدام الحد الاول من حدود التصحيح

لإشتقاق الطريقة التعجيلية المقترحة (الكرمي Ka) سوف نستخدم صيغة تعجيل رومبرك عند حدين من حدود التصحيح متتاليين بحيث يكون

$$\eta\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{\bar{\alpha}\left(\frac{h}{4}\right)+\bar{\bar{\alpha}}\left(\frac{h}{4}\right)}{2}$$

حيث $\bar{\bar{\alpha}}\left(\frac{h}{4}\right)$ قيمة تعجيل رومبرك عند $\frac{h}{4},\frac{h}{2}$ باستخدام الحد الثاني من حدود التصحيح

و $\eta\left(\frac{h}{4}\right)$ هي قيمة تعجيل الكرمي عند $\frac{h}{4},\frac{h}{2},h$ باستخدام حدين من حدود التصحيح متتاليين

$$\eta\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{4}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)}{2\left(2^{k_1}-1\right)}+\frac{2^{k_2}\bar{\alpha}\left(\frac{h}{4}\right)-\bar{\alpha}\left(\frac{h}{2}\right)}{2\left(2^{k_2}-1\right)} \qquad \cdots(1)$$

بما ان

$$\bar{\alpha}\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{4}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(2^{k_1}-1\right)} \qquad \cdots(2)$$

$$\bar{\alpha}\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{2}\right)-\alpha(h)}{\left(2^{k_1}-1\right)} \qquad \cdots(3)$$

من المعادلات (1) و(2) و (3) يكون

$$\eta\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{4}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)}{2\left(2^{k_1}-1\right)}+\frac{2^{k_2}\,\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{4}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(2^{k_1}-1\right)}-\frac{2^{k_1}\alpha\left(\frac{h}{2}\right)-\alpha(h)}{\left(2^{k_1}-1\right)}}{2\left(2^{k_2}-1\right)}$$

$$=\frac{\alpha\left(\frac{h}{4}\right)\left(2^{k_1+k_2+1}-2^{k_1}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)\left(2^{k_2+1}+2^{k_1}-1\right)+\alpha(h)}{2\left(2^{k_1}-1\right)\left(2^{k_2}-1\right)}$$

اذن

$$\eta\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{\alpha\left(\frac{h}{4}\right)\left(2^{k_1+k_2+1}-2^{k_1}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)\left(2^{k_2+1}+2^{k_1}-1\right)+\alpha(h)}{2\left(2^{k_1}-1\right)\left(2^{k_2}-1\right)}$$

بصورة عامة يمكن اعتبار $\eta\left(\frac{h}{4}\right)$ قيمة من العمود الجديد من جدول تعجيل الكرمي وكل من $\alpha\left(\frac{h}{4}\right),\alpha\left(\frac{h}{2}\right),\alpha(h)$ قيم في العمود السابق من جدول تعجيل الكرمي و k_{i+1},k_i هو قوى h في سلسلة حدود التصحيح

$$\eta\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{\alpha\left(\frac{h}{4}\right)\left(2^{k_i+k_{i+1}+1}-2^{k_i}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)\left(2^{k_{i+1}+1}+2^{k_i}-1\right)+\alpha(h)}{2\left(2^{k_i}-1\right)\left(2^{k_{i+1}}-1\right)}$$

وبذلك يمكن ان نستنتج انه اذا كان المكامل مستمر في فترة التكامل تكون القاعدة هي

$$\eta\left(\frac{h}{4}\right)=\frac{\alpha\left(\frac{h}{4}\right)\left(2^{2k+3}-2^{k}\right)-\alpha\left(\frac{h}{2}\right)\left(2^{k+3}+2^{k}-1\right)+\alpha\left(h\right)}{2\left(2^{k}-1\right)\left(2^{k+2}-1\right)}$$

حيث ان $k_{i+1}=k_i+2$ ويصح هذا القانون للتكاملات ذات المكاملات المستمرة او ذات المكاملات المعتلة او ذات مكاملات معتلة المشتقة في احدى نهايتي التكامل او كلتيهما

5– الامثلة والنتائج

لقد طبقنا قانون التعجيل الجديد على العديد من التكاملات ذات المكاملات المستمرة او المعتلة في احدى او كلتي نهايتي التكامل او المستمرة لكن معتلة المشتقة في احدى او كلتي نهايتي التكامل وكانت النتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات المستخدمة . نستعرض فيما يلي بعض منها مستخدمين قاعدة النقطة الوسطى مع التعجيل وقارنا النتائج بتعجيلي ريتشاردسون و ايتكن المعروفين . سوف نطلق على التعجيل الجديد اسم الكرمي(Al-Karamy) ونرمز له بالرمز Ka ونرمز لتعجيل ريتشاردسون بالرمز Re ونرمز لتعجيل ايتكن بالرمز At ونرمز لقاعدة النقطة الوسطى بالرمز M .

مما يجدر الاشارة اليه ان القيمة النهائية من جدول تعجيل الكرمي Ka تتحدد تبعا للدقة المطلوبة Eps والتي يكون فيها الخطأ النسبي $\left|\frac{\eta_2-\eta_1}{\eta_1}\right|\le Eps$ ، اذان η_2,η_1 حيث $\eta_1\neq 0$ قيمتين تقريبيتين للتكامل متتاليتين لعددين مختلفين من الفترات الجزئية.

1- $\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}dx$ وقيمته التحليلية هي 0.363247973447190 مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية .

2- $\int_{0.5}^1 \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)dx$ وقيمته التحليلية هي 0.192817782492428 مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية .

3- $\int_1^2 xe^{-x}dx$ وقيمته التحليلية هي 0.329753032633047 مقربة لخمس عشرة مرتبة عشرية .

4- $\int_0^1 \sqrt{x^3}dx$ وقيمته التحليلية هي 0.4

5- $\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$ وقيمته التحليلية هي 0.3926990816987 مقربة لثلاث عشرة مرتبة عشرية.

6- $\int_0^1 (x-1)\ln(x)dx$ وقيمته التحليلية هي 0.75

7- $-\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$ وقيمته التحليلية هي 1.64493406684823 مقربة لاربع عشرة مرتبة عشرية .

8- $\int_3^4 \frac{1}{\ln(x)}dx$ غير معروف القيمة تحليلية .

9- $\int_3^4 \frac{\tan(x)}{x^2}dx$ غير معروف القيمة تحليلية .

بالنسبة للتكامل الاول دونا النتائج في الجدولين (1) و(2)

نلاحظ منهما عند استخدام قاعدة النقطة الوسطى حصلنا على ست مراتب عشرية صحيحة عندما n=128 وn= 196 و بعد استخدام تعجيل الكرمي Ka حصلنا على خمس عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=128 ، بينما عند استخدام تعجيل ريتشاردسون حصلنا على اثنتي عشرة مرتبة عشرية صحيحة عند n=196 ، وعند استخدام تعجيل ايتكن حصلنا على ست مراتب عشرية صحيحة عندما n=50 وكانت هذه احسن النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية) .

n	M	التعجيل	
196	0.363248068535437	0.363247973447465	Re
50	0.363249434543404	0.363248480833537	At

جدول (1) يبين قيمة التكامل $\int_{2}^{3} \frac{\ln(x)}{x} dx$ بالطريقتين Re و At

n	M	Ka 1	Ka 2	Ka 3
1	0.366516292749662			
2	0.364134153201736			
4	0.363474531030280	0.363251808649373		
8	0.363304939978868	0.363248201383573		
16	0.363262235759217	0.363247987399031	0.363247973230491	
32	0.363251540321357	0.363247974313939	0.363247973444046	
64	0.363248865246800	0.363247973501277	0.363247973447144	0.363247973447192
128	0.363248196402160	0.363247973450569	0.363247973447190	0.363247973447190

جدول (2) يبين قيمة التكامل $\int_{2}^{3} \frac{\ln(x)}{x} dx$ بالطريقة Ka

بالنسبة للتكامل الثاني دونا النتائج في الجدولين (3) و(4) نلاحظ منهما عند استخدام قاعدة النقطة الوسطى لإيجاد قيمة التكامل حصلنا على ست مراتب عشرية صحيحة عندما n=64 و n=61 وn=121 لكن بعد استخدام تعجيل الكرمي Ka حصلنا على خمس عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=64 بينما عند استخدام تعجيل ريتشاردسون حصلنا على ثلاث عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=121 ، اما عند استخدام تعجيل ايتكن حصلنا على سبع مراتب عشرية صحيحة عندما n=61 ، وكانت هذه افضل النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية) .

n	M	التعجيل	
121	0.192817739126495	0.192817782492352	Re
61	0.192817611861608	0.192817757541242	At

جدول (3) يبين قيمة التكامل $\int_{0.5}^{1} \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) dx$ بالطريقتين Re و At

n	M	Ka 1	Ka 2	Ka 3
1	0.192198387247820			
2	0.192660074668202			
4	0.192778164728449	0.192817646668760		
8	0.192807865907871	0.192817774241650		
16	0.192815302583767	0.192817781981556	0.192817782495574	
32	0.192817162467549	0.192817782460579	0.192817782492474	
64	0.192817627483226	0.192817782490439	0.192817782492429	0.192817782492428

جدول (4) يبين قيمة التكامل $\int_{0.5}^{1} \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) dx$ بالطريقة Ka

وفي التكامل الثالث دونا النتائج في الجدولين (5) و (6) نلاحظ عند استخدام قاعدة النقطة الوسطى لإيجاد قيمة التكامل حصلنا على خمس مراتب عشرية صحيحة عندما n=64 وست مراتب عشرية صحيحة عندما n=140 لكن بعد تحسين النتائج باستخدام تعجيل الكرمي Ka حصلنا على خمس عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=64 اما عند استخدام تعجيل ايتكن حصلنا على ست مراتب عشرية صحيحة بالعدد نفسه من الفترات الجزئية n=64 ، بينما عند استخدام تعجيل ريتشاردسون حصلنا على احدى عشرة مرتبة عشرية صحيحة ولكن بعدد اكبر من الفترات الجزئية n=140 ، وكانت هذه افضل النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية) .

التعجيل		M	n
Re	0.329753032634965	0.329753320333705	140
At	0.329753492022800	0.329754409291248	64

جدول (5) يبين قيمة التكامل $\int_1^2 xe^{-x}dx$ بالطريقتين Re و At

Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	n
			0.334695240222645	1
			0.331117698556758	2
		0.329758904970096	0.330102626262681	4
		0.329753391740754	0.329840963526653	8
	0.329753032558610	0.329753054945734	0.329775048728115	16
	0.329753032631916	0.329753034025502	0.329758538743972	32
0.329753032633047	0.329753032633029	0.329753032720042	0.329754409291248	64

جدول (6) يبين قيمة التكامل $\int_1^2 xe^{-x}dx$ بالطريقة Ka

اما بالنسبة للتكامل الرابع المبين قيمته العددية في الجدولين (7) و(8) حيث المكامل فيه مستمر في فترة التكامل لكن معتل المشتقة في النهاية السفلى للتكامل وان حدود التصحيح المناسبة لقاعدة النقطة الوسطى بالنسبة لهذا التكامل هي

$$E_M(h) = A_M h^2 + bh^{2.5} + B_M h^4 + C_M h^6 + \cdots$$

حيث $b, A_M, B_M, C_M, \ldots$ ثوابت

عند تطبيق قاعدة النقطة الوسطى حصلنا على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية عندما n=256 وكذلك حصلنا على سبع مراتب عشرية صحيحة عندما n=1463 في حين عند تطبيق تعجيل الكرمي Ka حصلنا على خمس عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=256 بينما عند تطبيق تعجيل ريتشاردسون حصلنا على عشر مراتب عشرية صحيحة عندما n=1463 وبتطبيق تعجيل ايتكن كانت القيمة صحيحة لست مراتب عشرية فقط عندما n=187، وكانت هذه افضل النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن وريتشاردسون. وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن وريتشاردسون(من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية)

التعجيل		M	N
Re	0.399999999950085	0.399999971000666	1463
At	0.399999526009672	0.399998247154488	187

جدول (7) يبين قيمة التكامل $\int_0^1 \sqrt{x^3}dx$ بالطريقتين Re و At

Ka 4	Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	N
				0.353553390593274	1
				0.387259526419165	2
			0.399854396919443	0.396606818742048	4
			0.399974614013390	0.399114337804122	8
		0.400000021093177	0.399995540548427	0.399771941117509	16
		0.400000001233462	0.399999213565200	0.399941808515279	32
	0.399999999998100	0.400000000074656	0.399999861097173	0.399985243955453	64
	0.399999999999972	0.400000000004620	0.399999975452786	0.399996274179352	128
0.400000000000000	0.400000000000000	0.400000000000288	0.399999995661098	0.399999062037193	256

جدول (8) يبين قيمة التكامل $\int_0^1 \sqrt{x^3}dx$ بالطريقة Ka

التكامل $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx$ مستمر في فترة التكامل لكن معتل المشتقة في نهايتي فترة التكامل وبذلك تكون حدود التصحيح المرافقة لقاعدة النقطة الوسطى هي

$$E_M(h) = b_1 h^{1.5} + b_2 h^{2.5} + b_3 h^{3.5} + \cdots$$

نلاحظ من الجدولين (9) و (10) عند استخدام قاعدة النقطة الوسطى حصلنا على قيمة صحيحة لاربع مراتب عشرية عندما n=256 و n=2130 وبعد تطبيق تعجيل الكرمي Ka حصلنا على ثلاث عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=256 بينما عند تطبيق تعجيل ريتشاردسون حصلنا على عشر مراتب عشرية صحيحة عندما n=2130 وبتطبيق تعجيل ايتكن كانت المراتب العشرية الصحيحة اربع مراتب فقط عندما n=98، وكانت هذه احسن النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية) .

التعجيل		M	N
Re	0.392699081749617	0.392700320404140	2130
At	0.392749998406866	0.392824432356483	98

جدول (9) يبين قيمة التكامل $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx$ بالطريقتين Re و At

Ka 4	Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	N
				0.5000000000000	1
				0.4330127018922	2
			0.3931073699251	0.4074209160795	4
			0.3927704467935	0.3979911525765	8
		0.3926990068569	0.3927116011345	0.3945858664123	16
		0.3926990777814	0.3927012873171	0.3933689759908	32
	0.3926990817150	0.3926990814279	0.3926994710400	0.3929364253353	64
	0.3926990816984	0.3926990816762	0.3926991504816	0.3927830840017	128
0.3926990816987	0.3926990816987	0.3926990816968	0.3926990938544	0.3927287966897	256

جدول (10) يبين قيمة التكامل $\int_0^1 \sqrt{x - x^2}dx$ بالطريقة Ka

في التكامل السادس المكامل مستمر خلال فترة التكامل لكن معتل في الحد الادنى للتكامل لذا تكون حدود التصحيح المرافقة لقاعدة النقطة الوسطى كالاتي

$$\mathrm{E}(h) = ah + bh^2 + ch^2 \ln(\mathrm{h}) + dh^4 + eh^6 + \cdots$$

حيث $a,b,c,d,f \cdots$ ثوابت .

(سنعمل بمقترح شانكس [4]) لوجود اللوغارتم في حدود التصحيح .

نلاحظ من الجدولين (11) و(12) الخاصين بالتكامل في اعلاه عند تطبيق قاعدة النقطة الوسطى حصلنا على قيم قليلة الدقة تتراوح بين مرتبتين عشريتين والاربع مراتب وبفترات جزئية كثيرة تتراوح بين n=349 و n=8791 ، وعند استخدام تعجيل الكرمي Ka بالاستفادة من اقتراح شانكس [4] حصلنا على اربع عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=1024 في حين عند استخدام تعجيل ريتشاردسون حصلنا على ثمان مراتب عشرية صحيحة عندما n=8791 وعند استخدام تعجيل ايتكن كانت افضل نتيجة محصل عليها هي ثلاث مراتب عشرية صحيحة عندما n=349 ، وكانت هذه افضل النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية)

التعجيل		M	n
Re	0.750000004991593	0.749960570724941	8791
At	0.749500911771556	0.749004507567204	349

جدول (11) يبين قيمة التكامل $\int_0^1 (x-1)\ln(x)dx$ بالطريقتين Re وAt

Ka 5	Ka 4	Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	N
					0.34657359027997	1
					0.55582064447643	2
				0.75555687500133	0.65636810428685	4
				0.75187717987540	0.70448252666840	8
			0.75007184782715	0.75058519158988	0.72767755609058	16
			0.75001844747879	0.75017471365112	0.73897598286097	32
		0.75000006513436	0.75000467480664	0.75005074303900	0.74452933913515	64
		0.75000000379883	0.75000117348910	0.75001444937792	0.74727676897306	128
	0.74999999998521	0.75000000022153	0.75000029368750	0.75000405308904	0.74864185001119	256
	0.74999999999976	0.75000000001350	0.75000007344184	0.75000112344838	0.74932190155842	512
0.75000000000000	0.74999999999999	0.75000000000083	0.75000001836171	0.75000030840550	0.74966122246054	1024

جدول (12) يبين قيمة التكامل $\int_0^1 (x-1)\ln(x)dx$ بالطريقة Ka

اما بالنسبة للتكامل السابع حيث المكامل مستمر في الفترة المفتوحة $(0,1)$ ومعتل في النقطتين $x=1$ و $x=0$ تكون حدود التصحيح المرافقة لقاعدة النقطة الوسطى بالنسبة للتكامل في اعلاه هي

$$E(h)=ah+bh^2+ch^2\ln(h)+dh^3+eh^3\ln(h)+fh^4+gh^4\ln(h)+\cdots$$

حيث $a,b,c,d,f\ \cdots$ ثوابت .

نلاحظ من الجدول (14) عند تطبيق قاعدة النقطة الوسطى حصلنا على ثلاث مراتب عشرية صحيحة عندما n=2048 لكن بعد تطبيق تعجيل الكرميKa وبالاستفادة من اقتراح شانكس [4] حصلنا على اربع عشرة مرتبة عشرية صحيحة بالعدد نفسه من الفترات الجزئية ، ومن الجدول (13) نلاحظ عند استخدام تعجيل ريتشاردسون كانت المراتب العشرية صحيحة لسبع مراتب عندما n=4788 اما تعجيل ايتكن كانت دقة نتائجه هي اربع مراتب عشرية صحيحة فقط عندما n=1971 ، وكانت هذه افضل النتائج الممكن الحصول عليها من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية) .

التعجيل		M	n
Re	1.64493405000754	1.64486170171595	4788
At	1.64485412793179	1.64475833101337	1971

جدول (13) يبين قيمة التكامل $-\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$ بالطريقتين Re و At

Ka 5	Ka 4	Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	N
					1.38629436111989	1
					1.49956038565016	2
				1.63770673449450	1.56685639404989	4
				1.64271029893588	1.60417206817244	8
			1.64485492050005	1.64426768295718	1.62402130837465	16
			1.64491476170474	1.64473928300994	1.63431824323279	32
		1.64493413465276	1.64492932012177	1.64487829258372	1.63957947401591	64
		1.64493407079818	1.64493288823554	1.64491835441609	1.64224336781478	128
	1.64493406684541	1.64493406703796	1.64493377286580	1.64492969705635	1.64358492990395	256
	1.64493406684588	1.64493406684976	1.64493399339841	1.64493286408483	1.64425844184498	512
1.64493406684846	1.64493406684807	1.64493406684681	1.64493404848783	1.64493373859492	1.64459596273360	1024
1.64493406684823	1.64493406684821	1.64493406684793	1.64493406225806	1.64493397789659	1.64476493500978	2048

جدول (14) يبين قيمة التكامل $-\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$ بالطريقة Ka

اما التكامل الثامن على الرغم من ان قيمته التحليلية غير معروفة نلاحظ من الجدول (16) بان القيم الناتجة من تطبيق تعجيل الكرمي Ka تثبت افقيا و تقترب من مقدار معين وتتطابق لعدة اعمدة عندما (n=128 و n=256 و n=512) وهذه القيمة هي غاية اقتراب سلسلة حدود التصحيح وهي صحيحة لخمسة عشر مرتبة عشرية ، عند استعمال تعجيلي ريتشاردسون و ايتكن وبمقارنة نتائجهما مع النتيجة الآنفة من تعجيل الكرمي فان افضل قيمة تظهر مقربة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية عندما n=130 هذا بالنسبة تعجيل ريتشاردسون اما بالنسبة الى تعجيل ايتكن فان افضل قيمة صحيحة هي خمس مراتب عشرية عندما n=47 (كما مبين في الجدول (15) . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث تكهن قيمة التكامل و دقتها وعدد الفترات الجزئية) .

	التعجيل	M	n
Re	0.803996500370572	0.803996140183506	130
At	0.80399552330213	0.80399374480940	47

جدول (15) يبين قيمة التكامل $\int_{3}^{4} \frac{1}{\ln(x)} dx$ بالطريقتين Re و At

Ka 4	Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	n
				0.798235600147928	1
				0.802497036421847	2
			0.803993413850661	0.803617483235292	4
			0.803996315477562	0.803901477982209	8
		0.803996500504165	0.803996489002123	0.803972727873654	16
		0.803996500373778	0.803996499664502	0.803990556188716	32
	0.803996500371858	0.803996500371888	0.803996500327702	0.803995014259876	64
	0.803996500371859	0.803996500371860	0.803996500369100	0.803996128839725	128
0.803996500371859	0.803996500371859	0.803996500371859	0.803996500371687	0.803996407488567	256
0.803996500371859	0.803996500371859	0.803996500371859	0.803996500371848	0.803996477151020	512

جدول (16) يبين قيمة التكامل $\int_{3}^{4} \frac{1}{\ln(x)} dx$ بالطريقة Ka

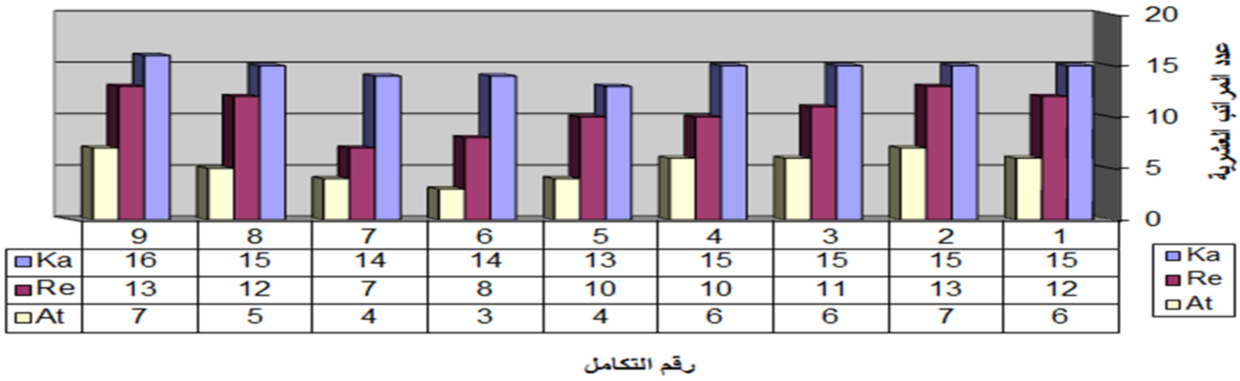
كذلك التكامل التاسع قيمتة التحليلية غير معروفة الا اننا نرى من خلال الجدول (18) الخاص بايجاد قيمة التكامل باسعمال تعجيل الكرمي Ka بان القيمة تقترب من مقدار معين ثم تثبت افقيا لعدة اعمدة عندما (n=256 و n=512 و n=1024 و n=2048) ، من هذا التقارب يمكننا ان نستنتج بان القيمة صحيحة على الاقل لست عشرة مرتبة عشرية وهي (0.0297441000562105) ونلاحظ عند استعمال تعجيلي ريتشاردسون وايتكن لا يمكن تكهن قيمة التكامل الا من خلال مقارنة نتائجهما مع النتيجة السابقة لتعجيل الكرمي فحصلنا على ثلاث عشرة مرتبة عشرية صحيحة عندما n=324 عند استخدام تعجيل ريتشاردسون اما بالنسبة لتعجيل ايتكن حصلنا على سبع مراتب عشرية صحيحة عندما n=63 (جدول (17)) . وبذلك يكون تعجيل الكرمي افضل من تعجيلي ايتكن و ريتشاردسون (من حيث تكهن قيمة التكامل و دقتها وعدد الفترات الجزئية) .

	التعجيل	M	N
Re	0.0297441000561513	0.0297441055437840	324
At	0.0297441496759464	0.0297442452379218	63

جدول (17) يبين قيمة التكامل $\int_{3}^{4} \frac{\tan(x)}{x^2} dx$ بالطريقتين Re و At

Ka 5	Ka 4	Ka 3	Ka 2	Ka 1	M	N
					0.0305784196047832	1
					0.0299181590171384	2
				0.0297385604121543	0.0297824805087818	4
				0.0297437295732417	0.0297532606482418	8
			0.0297441018545506	0.0297440783827077	0.0297463604566401	16
			0.0297441000995034	0.0297440987535508	0.0297446632512398	32
		0.0297441000561559	0.0297441000568631	0.0297440999758102	0.0297442407351586	64
		0.0297441000562099	0.0297441000562200	0.0297441000512024	0.0297441352184478	128
	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562107	0.0297441000558978	0.0297441088463009	256
	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000561910	0.0297441022537038	512
0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562093	0.0297441006055820	1024
0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441000562105	0.0297441001935533	2048

جدول (18) يبين قيمة التكامل $\int_{3}^{4} \frac{\tan(x)}{x^2} dx$ بالطريقة Ka



مخطط يبين عدد المراتب العشرية الصحيح المحصل عليها عند التعجيلات الثلاث

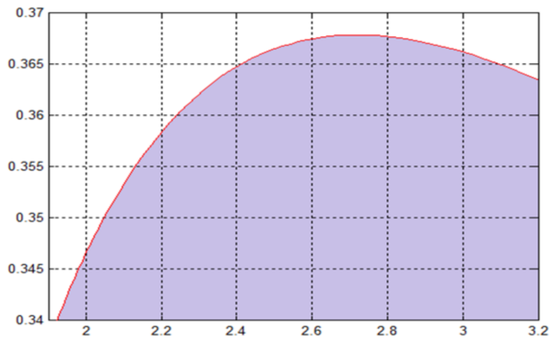
6- المناقشة والاستنتاج

نستنتج من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب التكاملات باستخدام طريقة النقطة الوسطى فانها تعطي قيم صحيحة لعدة مراتب عشرية وبدقة تتراوح بين ثلاث الى ست مراتب عشرية صحيحة وبفترات جزئية تتراوح بين $n=21$ فترة جزئية و $n=2048$ فترة جزئية في حين عند تحسين النتائج باستخدام صيغة تعجيل الكرمي فانها تعطي دقة تفوق ذلك بكثير وبفترات جزئية تتراوح بين $n=64$ فترة جزئية و $n=2048$ فترة جزئية حيث تتراوح الدقة بين ثلاث عشرة الى ست عشرة مرتبة عشرية صحيحة وهذه الدقة تفوق دقة الطريقتين التعجيليتين ريتشاردسون وايتكن حيث تتراوح دقة الاولى بين سبع الى ثلاث عشرة مرتبة عشرية صحيحة وبفترات تجزئة تتراوح بين $n=121$ فترة جزئية و $n=4788$ فترة جزئية بالنسبة للاول اما الثاني فهي تتراوح بين ثلاث الى سبع مراتب عشرية صحيحة وبفترات تجزئة تتراوح بين $n=47$ فترة جزئية و $n=1971$ فترة جزئية . مما سبق نستنتج بشكل واضح امكانية الاعتماد على تعجيل الكرمي في تحسين نتائج التكاملات العددية ، كذلك نرى افضليته على تعجيلي ريتشاردسون وايتكن من حيث دقة النواتج وقلة الفترات الجزئية المستخدمة. كما يُمكّننا تعجيل الكرمي من استنتاج قيمة التكامل للتكاملات غير معروفة القيمة التحليلية وذلك من خلال اقتراب قيمة التكامل من مقدار معين و ثبوت القيمة افقيا في سلسلة حدود التصحيح حيث هي سلسلة كوشية متقاربة وهذه الصفة غير موجودة في تعجيلي ريتشاردسون وايتكن كما هو واضح من التكاملين الثامن والتاسع في البحث .

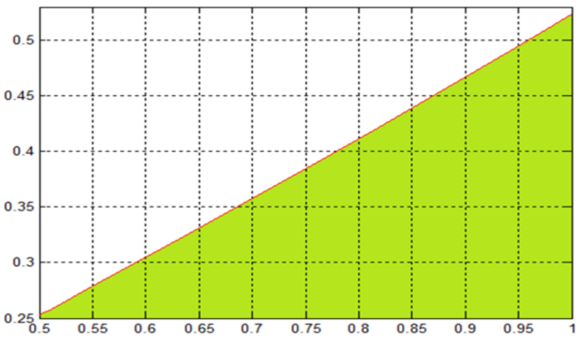
ت	الدالة	$\frac{M}{n}$	$\frac{Ka}{n}$	$\frac{Re}{n}$	$\frac{At}{n}$
1	$\int_2^3 \frac{\ln(x)}{x}dx$	$\frac{6}{128}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{12}{196}$	$\frac{6}{50}$
2	$\int_{0.5}^1 \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)dx$	$\frac{6}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{13}{121}$	$\frac{7}{61}$
3	$\int_1^2 xe^{-x}dx$	$\frac{5}{64}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{11}{140}$	$\frac{6}{64}$
4	$\int_0^1 \sqrt{x^3}dx$	$\frac{5}{256}$	$\frac{15}{256}$	$\frac{10}{1463}$	$\frac{6}{187}$
5	$\int_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$	$\frac{4}{256}$	$\frac{13}{256}$	$\frac{10}{2130}$	$\frac{4}{98}$
6	$\int_0^1 (x-1)\ln(x)dx$	$\frac{3}{1024}$	$\frac{14}{1024}$	$\frac{8}{8791}$	$\frac{3}{349}$

$\frac{4}{1971}$	$\frac{7}{4788}$	$\frac{14}{2048}$	$\frac{3}{2048}$	$-\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$	7
$\frac{5}{47}$	$\frac{12}{130}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{5}{128}$	$\int_3^4 \frac{1}{\ln(x)}dx$	8
$\frac{7}{63}$	$\frac{13}{324}$	$\frac{16}{256}$	$\frac{7}{256}$	$\int_3^4 \frac{\tan(x)}{x^2}dx$	9

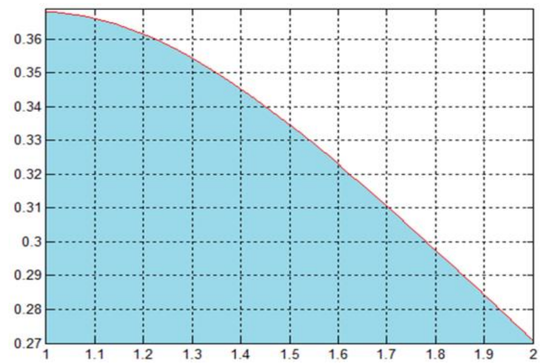
جدول (27) يبين نسبة المراتب الصحيحة الى عدد فترات الجزئية للتعجيلات الثلاث وقاعدة النقطة الوسطى M , At , Re , Ka



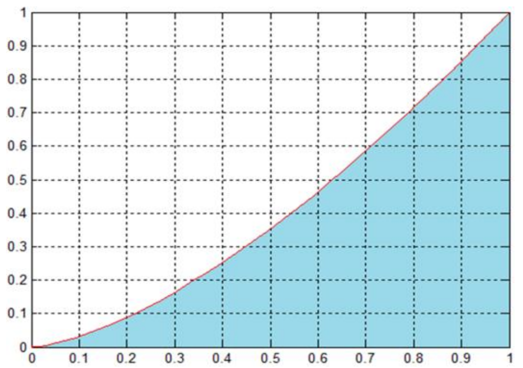
الشكل (1) يبين تمثيل هندسي للدالة التكامل $\frac{\ln(x)}{x}$ خلال الفترة $[2,3]$



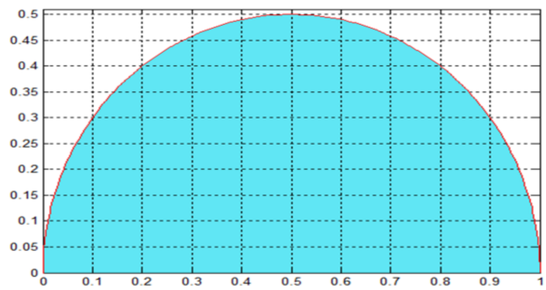
الشكل (2) يبين تمثيل هندسي للدالة $\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$ خلال الفترة $[0.5,1]$



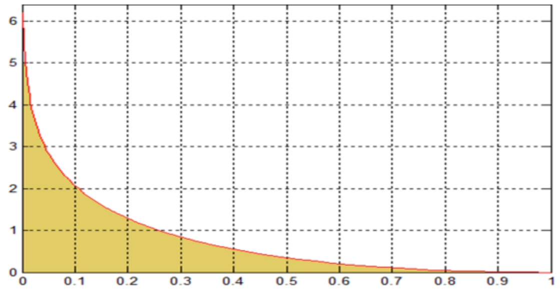
الشكل (3) يبين تمثيل هندسي للدالة xe^{-x} خلال الفترة $[1,2]$



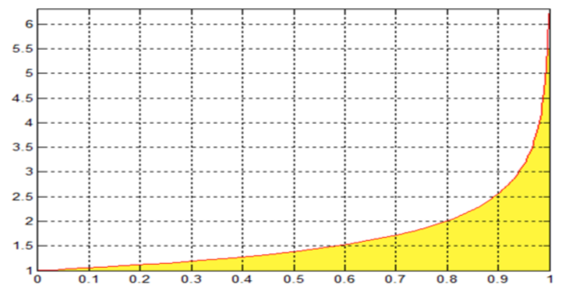
الشكل (4) يبين تمثيل هندسي للدالة $\sqrt{x^3}$ خلال الفترة $[0,1]$



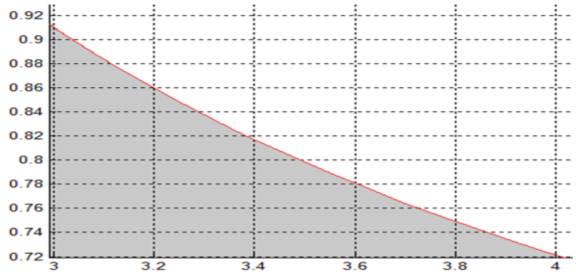
الشكل (5) يبين تمثيل هندسي للدالة $\sqrt{x-x^2}$ خلال الفترة $[0,1]$



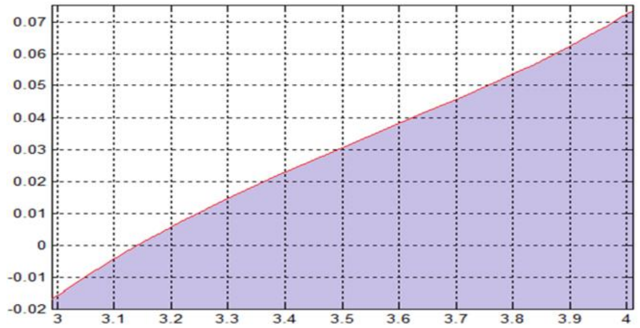
الشكل (6) يبين تمثيل هندسي للدالة $(x-1)\ln(x)$ خلال الفترة $[0,1]$



الشكل (7) يبين تمثيل هندسي للدالة $-\frac{\ln(1-x)}{x}$ خلال الفترة $[0,1]$



الشكل (8) يبين تمثيل هندسي للدالة $\frac{1}{\ln(x)}$ خلال الفترة $[3,4]$



الشكل (9) يبين تمثيل هندسي للدالة $\frac{\tan(x)}{x^2}$ خلال الفترة $[3,4]$

المصادر

[1] Anthony Ralston,"A First Course in Numerical Analysis" Mc Graw –Hill Book Company ,1965
[2] Fox L. And Linda Hayes," On the Definite Integration of Singular---- Integrands" SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .
[3] Fox L.,"Romberg Integration for a Class of Singular Integrands", comput.J.10, pp.87-93,1967.
[4] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .
[5] FausAtt L.V.," Applied Numerical Analysis Using Matalb ",second edition, Person Prentice-Hall, 2008
[6] سيفي ، علي محمد صادق ، " مبادئ التحليل العددي " ، جامعة بغداد كلية العلوم ، 1985
[7] ريتشاردبوردين و دوكلاس فاريز ، " التحليل العددي " ، الجزء الاول ، ترجمة الاستاذ المساعد خالد احمد السامرائي وسعد ابراهيم مهدي ، جامعة بغداد كلية التربية للبنات ، 1992 .
[8] موسى ، صفاء مهدي ، " تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عدديا باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2011 .
[9] ناصر ، رسل حسن ، " المقارنة بين الطريقتين التعجيليتين ايتكن و رومبرك في حساب التكاملات عدديا " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2011 .
[10] الكرمي ، ندى أحمد، "اشتقاق طرائق مركبة من قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى لحساب التكاملات الثنائية عدديا و صيغ الخطأ لها و تحسين النتائج باستعمال طرائق تعجيلية" ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2012
[11] ضياء ، عذراء محمد ، " طرائق عددية لايجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .