Aitken's Acceleration Method With Mid-point rule on the dimension z and Simpson's rule on the two dimensions x and y to Evaluate Triple Integrals Numerically

طريقة تعجيل آيتكن مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي وقاعدة سمبسون على البعدين الأوسط والداخلي لحساب التكاملات الثلاثية عددياً

م.صفاء مهدي موسى	م.م.محمد رزاق سلمان	م.م.حسن عبد الرحيم جبير
جامعة الكوفة – كلية التربية للبنات	المديرية العامة لتربية كربلاء المقدسة	المديرية العامة لتربية النجف الأشرف
قسم الرياضيات		

المستخلص

الهدف الأساس من هذا البحث هو أيجاد قيم التكاملات الثلاثية عدديا التي مكاملاتها دوال مستمرة او مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية والمعتلة في أحدى نهايتي منطقة التكامل وذلك من خلال استخدام القاعدة الناتجة من (قاعدة النقطة الوسطى Mid-point rule على البعد الخارجي Z وقاعدة سمبسون Simpson's rule على البعدين الأوسط Y والداخلي X) والتي يرمز لها بقاعدة MSS ولتحسين النتائج طبقنا تعجيل آيتكن على القيم الناتجة وذلك لتعجيل التقارب والحصول على نتائج أفضل من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم التقريبية الى القيم التحليلية للتكاملات وسنرمز لهذه الطريقة بـرمز $AMSS$ حيث A يشير الى تعجيل آيتكن و MSS تشير إلى القاعدة المذكورة .

Abstract

The main aim of this paper is to find the integrals triple values numerically whose integrands are continuous or continuous but a partial derivatives singular or the integrands their selves are singular at one of two ends of the region of integration and through use the *MSS method* resulting *from* (Mid-point rule on the dimension z and Simpson's rule on the two dimensions x and y) by symbol *MSS method* to improve the results we applied Aitken's acceleration *and* so as to accelerate the convergence and get the best results We denoted this method by symbol $AMSS$, where A refers to accelerate Aitken and MMS refers to the rule mentioned.

1- المقدمة

أن أيجاد قيم التكاملات الثلاثية تحليليا ليس أمراً سهلاً في كثير من الأحيان لذا أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات او التكاملات التي لايمكن ايجاد حلها التحليلي نهائياً بالطرق المعروفة او التكاملات التي تحتاج الى وقت طويل وعمليات وفرضيات كثيرة لإيجاد نتائجها، وتكمن أهمية التكاملات الثلاثية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم وايجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع او صفيحة رقيقة من المعدن ، فرانك ايرز[3] وهناك استخدامات لاحدود لها للتكاملات بشكل عام والثلاثية بشكل خاص في كافة العلوم الطبيعية والهندسية .

ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على إيجاد قيمة التكامل الثلاثي هي ضياء [4] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة وهي طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على التكامل الخارجي (Z) وكل من الطرائق ($RM\,(RS)$ ، $RM\,(RM)$ و ($RS\,(RM)$ فضلاً عن طريقة ($RS\,(RS)$ على التكامل الأوسط (Y) والتكامل الداخلي (X) مع إلغاء الاعتلال على البعدين الأوسط والداخلي وهذه الطرائق هي طريقة ($RMRM\,(RS)$ ، $RMRM\,(RM)$ ، $RMRS\,(RM)$ و $RMRS\,(RS)$ حيث أن الحرف R يرمز لتعجيل رومبرك وM قاعدة النقطة الوسطى وS قاعدة سمبسون وكانت النتائج جيدة وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي هي الأفضل عند حساب تكاملات مستمرة ومستمرة لكن مشتقاتها معتلة أو تكاملات مكاملاتها معتلة (التي من الممكن جعل اعتلالها في البعد الخارجي Z فقط).

وفي عام 2010 قدمت عكار[5] طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد الثلاثة X و Y و Z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وأسمتها $RMMM$ وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

وفي عام 2014 قدم شبر[6] ست طرائق عددية لحساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية وهي $RMTS$ من استخدام قاعدة سمبسون على البعد الداخلي X و قاعدة شبه المنحرف على البعد الاوسط Y وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي Z مع تعجيل رومبرك حيث أن حرف T يرمز لقاعدة شبه المنحرف و $RMST$ من استخدام قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي X و قاعدة سمبسون على البعد الاوسط Y وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي Z مع تعجيل رومبرك و $RTSM$ من استخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي X وقاعدة سمبسون على البعد الاوسط Y وقاعدة شبه المنحرف على البعد الخارجي Z و $RTMS$ من استخدام قاعدة سمبسون على البعد الداخلي X وقاعدة النقطة الوسطى على البعد Y وقاعدة شبه المنحرف على البعد الخارجي Z مع تعجيل رومبرك و $RSMT$ من استخدام قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي X وقاعدة النقطة الوسطى على البعد الاوسط Y وقاعدة سمبسون على البعد الخارجي Z مع تعجيل رومبرك و $RSTM$ من استخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي X وقاعدة شبه المنحرف على البعد Y وقاعدة سمبسون على البعد الخارجي Z مع تعجيل رومبرك عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وقد حصل على نتائج جيدة.

وفي العام نفسه قدمت كاظم [7] وبنفس أسلوب الباحثين عكار[5] وشبر[6] أيضا ست طرائق عددية هي :- $(RSTS,\ RSST,RTSS,\ RTST,\ RSTT,\ RTTS)$ لحساب القيم التقريبية للتكاملات الثلاثية وهذه الطرائق لناتجة من تعجيل رومبرك مع قاعدتين من قواعد نيوتن – كوتس (شبه المنحرف و سمبسون) وأيضا حصلت على نتائج جيدة.

أما في بحثنا هذا قدمنا طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة او مستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية او المعتلة في احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام تعجيل آيتكن مع قاعدة MSS الناتجة من (تطبيق قاعدتي النقطة الوسطى على البعد الخارجي Z و سمبسون على البعدين الاوسط Y والداخلي X) ، محمد وآخرون [8] وقد حصلنا على نتائج جيدة من حيث الدقة والسرعة في الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات واسمينا الطريقة $AMSS$.

2- الطريقة العددية MSS

يمكن الحصول على الصيغة العامة لهذه القاعدة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى Mid-point rule على البعد الخارجي Z وقاعدة سمبسون Simpson‘s rule على البعدين الأوسط Y والداخلي X) ، محمد وآخرون [8]

$$
\begin{aligned}
MSS=\frac{h^3}{9}\sum_{k=1}^{2n}\Bigg[\; & f(a,c,z_k)+f(a,d,z_k)+f(b,c,z_k)+f(b,d,z_k) \\
& +4\sum_{j=1}^{n}\Big(f\big(a,y_{(2j-1)},z_k\big)+f\big(b,y_{(2j-1)},z_k\big)\Big)+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(f\big(a,y_{(2j)},z_k\big)+f\big(b,y_{(2j)},z_k\big)\Big) \\
& +4\sum_{i=1}^{n}\Bigg(f(x_{(2i-1)},c,z_k)+f(x_{(2i-1)},d,z_k)+4\sum_{j=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_{(2j-1)},z_k)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_{(2i-1)},y_{(2j)},z_k)\Bigg) \\
& +2\sum_{i=1}^{n-1}\Bigg(f(x_{(2i)},c,z_k)+f(x_{(2i)},d,z_k)+4\sum_{j=1}^{n}f(x_{(2i)},y_{(2j-1)},z_k)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_{(2i)},y_{(2j)},z_k)\Bigg)\Bigg] \qquad ...(1)
\end{aligned}
$$

حيث

$$x_{(2i)}=a+(2i)h\ ,\ i=1,2,\ldots,n\text{-}1 \quad ; \quad x_{(2i-1)}=a+(2i-1)h\ ,\ i=1,2,\ldots,n$$

$$; \quad y_{(2j-1)}=c+(2j-1)h\ ,\ j=1,2,\ldots,n \quad y_{(2j)}=c+(2j)h\ ,\ j=1,2,\ldots,n\text{-}1$$

$$z_k=e+\frac{(2k-1)}{2}h\ ,\ k=1,2,\ldots,2n$$

3-طريقة آيتكن دلتا التربيعية Aitken’s delta – Squared Process

في عام 1926 وجد ألكسندر آيتكن(1895- 1964) منهجاً جديداً لتعجيل نسبة تقارب المتتابعة وقد كانت الصيغة الأولى لهذه الطريقة معروفة للعالم الرياضي الياباني تاكاكازوسكي كوا Takakazu Seki kowa الذي عاش نهاية القرن السابع عشر وتحديداً في(1642 - 1708) .

ولتوضيح الطريقة نفرض المتتابعة $\{x_n\}$ حيث $\{x_n\}=\{x_1,x_2,...x_k...\}$ تقترب خطياً Convergence Linearly الى قيمة نهائية معينة β اذن $\beta-x_{i+1}=C_i(\beta-x_i)$ رالستون[1]

بحيث $|C_i|<1$ وان $C_i\to C$

نلاحظ ان C_i ستكون تقريباً ثابتة ويمكننا كتابة :

$$\beta-x_{i+1}\simeq\bar{c}(\beta-x_i) \qquad ...(2)$$

حيث $C = \left|\bar{C}\right|$ونلاحظ كذلك ان:

$$\frac{\beta - x_{i+2}}{\beta - x_{i+1}} \simeq \frac{\beta - x_{i+1}}{\beta - x_i}$$

أي ان :

$$\beta \cong \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} = x_{i+2} - \frac{(\Delta x_{i+1})^2}{\Delta^2 x_i} \qquad ...(3)$$

حيث ان $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$ وان $\Delta^2 x_i = x_i - 2x_{i+1} - x_{i-2}$

وعند استخدام n من عناصر المتتابعة $\{x_n\}$ يمكننا الحصول على $n-2$ من عناصر متتابعة أخرى $\{S\}$ تقترب أسرع الى β من المتتابعة $\{x_n\}$حيث:

$$s_{i+2} = x_{i+2} - \frac{(\Delta x_{i+1})^2}{\Delta^2 x_i} \qquad ...(4)$$

إذ ان $i = 1, 2, ..., n-2$،

إن هذه العملية ما هي إلا تعجيل اقتراب Accelerating The Convergence القيم إلى القيمة النهائية βكونها تستخدم ثلاث قيم للحصول منها على قيمة جديدة تكون أفضل من القيم الثلاث السابقة.

و سنطبقها على القيم الناتجة من قاعدة (MSS) لتعجيل الحصول على قيم تقريبية أفضل للتكاملات بدلاً من الاستمرار في زيادة عدد الفترات الجزئية . فاذا كان لدينا على سبيل المثال n قيمة بقاعدة MSS فسوف نحصل على $n-2$ قيمة بطريقة تعجيل أيتكن وذلك باستخدام المعادلة (4) ثم نستخدم ايضاً تعجيل أيتكن على القيم $n-2$ فنحصل على $n-4$ قيمة وهكذا نستمر الى ان نحصل على الدقة المطلوبة[2].

4– الأمثلة:

نستعرض فيما يلي بعض التكاملات التي مكاملاتها مستمرة اومستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية او المعتلة في احدى نهايتي منطقة التكامل ونستخدم طريقة تعجيل أيتكن مع قاعدة MSS لتحسين النتائج.

مثال1

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{(x+y+z)} dxdydz$$

دالة المكامل هنا مستمرة وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل (5.0732141118) مقربة الى عشر مراتب عشرية بعد الفاصلة مع قيمته في برنامج الماتلاب (جدول رقم 1) نلاحظ انها متطابقة تماما لغاية المرتبة الثامنة بعد الفاصلة عندما $m = 64$ باستخدام طريقة (AMSS) بينما كانت القيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية فقط باستخدام قاعدة (MSS) بدون تعجيل أيتكن . علما أن الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (0.583 ثانية)

m	قيم القاعدة MSS	AMSS	AMSS
2	5.0241370340		
4	5.0602446587		
8	5.0699264701	5.0734736636	
16	5.0723893470	5.0732296043	
32	5.0730077418	5.0732150694	5.0732141490
64	5.0731625081	5.0732141715	5.0732141125
			5.0732141118

جدول رقم (1)

مثال 2

$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-xyz}}dxdydz$$

المكامل هنا معتل في النقطة (1,1,1) (لأنه عند تعويض النقطة (1,1,1) في الدالة $f(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{1-xyz}}$ فان الناتج يكون غير معرف) ، ونوع الاعتلال هنا جذري ونسبي في أن واحد ، وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل (1.08676647750) مع قيمته في برنامج الماتلاب (جدول رقم 2) نلاحظ انها متطابقة تماماً لغاية المرتبة التاسعة بعد الفاصلة عندما $m=256$ باستخدام تعجيل آيتكن مع قاعدة (MSS) بينما كانت القيمة صحيحة لستة مراتب عشرية فقط باستخدام القاعدة المذكورة بدون تعجيل آيتكن.
علماً ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (51.583 ثانية)

m	قيم القاعدة MSS	AMSS	AMSS	AMSS
2	1.08474283354			
4	1.08610183282			
8	1.08654979477	1.08677006005		
16	1.08670018163	1.08677618332		
32	1.08674735706	1.08676891979	1.08677286090	
64	1.08676120087	1.08676695070	1.08676621835	
128	1.08676506561	1.08676656238	1.08676646716	1.08676645817
256	1.08676610763	1.08676649231	1.08676647655	1.08676647715
				1.08676647750

(جدول رقم 2)

مثال 3

$$I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1(x^4+y^4+z^4)^{\frac{1}{3}}dxdydz$$

المكامل هنا معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0,0)، ونوع الاعتلال هنا جذري وهذا التكامل من التكاملات الغير معروف القيمة التحليلية وهنا تكمن فائدة هذه الطريقة في إيجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات من خلال ملاحظة تكرار القيمة في العمودين الاخرين عند استخدام برنامج الماتلاب (جدول رقم 3) حيث انها متطابقة تماماً لغاية المرتبة الثامنة بعد الفاصلة عندما $m=128$ باستعمال تعجيل ايتكن مع قاعدة (MSS) بينما كانت القيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية فقط باستخدام القاعدة المذكورة بدون تعجيل آيتكن.
علما ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان (9.583 ثانية).

m	قيم القاعدة MSS	AMSS	AMSS	AMSS
2	0.74983900702			
4	0.76553377230			
8	0.76800351312	0.76846473115		
16	0.76855896863	0.76872014148		
32	0.76869460705	0.76873843038	0.76873984098	
64	0.76872834703	0.76873951880	0.76873958767	
128	0.76873677298	0.76873957763	0.76873958115	0.76873958129
				0.76873958095

(جدول رقم 3)

مثال 4

$$I=\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}\frac{-\log(1-xyz)}{\sqrt{x^2+y^2-z^2-z}}dxdydz$$

إن مكامل التكامل هنا معتل في النقاط $(x,y,z)=(0,0,0)$ ، $(x,y,z)=(0,0,-1)$ ، $(x,y,z)=(-1,1,-1)$ ونوع الاعتلال هنا لوغاريتمي وجذري ونسبي في ان واحد ، و القيمة التحليلية لهذا التكامل هي (0.1477408993) مقربة الى عشرة مراتب عشرية بعد الفاصلة. وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل مع قيمته في برنامج الماتلاب (جدول رقم 4) نلاحظ انها متطابقة تماماً لغاية المرتبة التاسعة بعد الفاصلة عندما $m=256$ باستخدام طريقة ($AMSS$) رغم وجود هذا العدد من نقاط الاعتلال بينما كانت القيمة صحيحة لستة مراتب عشرية فقط باستخدام قاعدة MSS بدون تعجيل أيتكن.
علماً ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(57.583 ثانية)

m	قيم القاعدة MSS	AMSS	AMSS	AMSS
2	0.1445975110			
4	0.1465555875			
8	0.1473803428	0.1479805445		
16	0.1476426891	0.1477650655		
32	0.1477152108	0.1477429174	0.1477403801	
64	0.1477343093	0.1477411368	0.1477409812	
128	0.1477392266	0.1477409316	0.1477409049	0.1477409135
256	0.1477404773	0.1477409039	0.1477408995	0.1477408991
				0.1477408993

(جدول رقم 4)

مثال5

$$I=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}\ln(x+y+z)dxdydz$$

المكامل هنا معتل في النقطة (0,0,0) (لانه عند تعويض النقطة (0,0,0) في الدالة $f(x,y,z)=\ln(x+y+z)$ فان الناتج يكون غير معرف) ، ونوع الاعتلال هنا لوغاريتمي ، وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل (0.3378332434) مع قيمته في برنامج الماتلاب (جدول رقم 5) نلاحظ انها متطابقة تماماً لغاية المرتبة التاسعة بعد الفاصلة عندما $m=128$ باستخدام طريقة $(AMSS)$ بينما كانت القيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية فقط باستخدام قاعدة MSS بدون تعجيل أيتكن .
علماً ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(7.583 ثانية)

m	قيم القاعدة MSS	AMSS	AMSS	AMSS
2	0.3428650370			
4	0.3395097476			
8	0.3383184620	0.3376626584		
16	0.3379637897	0.3378134307		
32	0.3378670990	0.3378308595	0.3378331376	
64	0.3378418637	0.3378329516	0.3378332370	
128	0.3378354183	0.3378332074	0.3378332430	0.3378332433
				0.3378332434

(جدول رقم 5)

5-المناقشة

نستنتج من خلال نتائج هذا البحث انه عند حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة والمستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية والمعتلة بالقاعدة(MSS) انها أعطت قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستخدام عدد من الفترات الجزئية دون استخدام الطريقة التعجيلية (تعجيل ايتكن) عليها، وعند استخدام هذا التعجيل مع القاعدة المذكورة حصلنا على نتائج أفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية مقارنةً مع قيم التكاملات الحقيقية، ففي المثال الأول كانت النتيجة صحيحة لثمانية مراتب عشرية بعد الفاصلة و تسع مراتب عشرية في المثال الثاني اما المثال الثالث فهو من التكاملات الغير معروفة القيمة التحليلية وهنا تكمن احدى فوائد هذه الطريقة التي تجد نتائج هذا النوع من التكاملات التي تعجز عن ايجادها الطرق التحليلية المعروفة ، اما التكامل الرابع فهو من التكاملات التي فيها مجموعة من الاعتلالات في ثلاث نقاط ورغم ذلك كانت النتائج جيدة وصلت الى تسع مراتب عشرية بعد الفاصلة وكذلك الحال للتكامل في المثال الخامس المعتل المكامل .

وعند مقارنة هذه الطريقة مع الطرائق التي استخدمها الباحثون محمد واخرون[8] مع تعجيل رومبرك $RMSS$ كانت نتائجهم أفضل من حيث عدد المراتب الصحيحة بعد الفاصلة مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات ولكن طرائقهم هذه تحتاج الى وقت طويل نوعاً ما لايجاد سلسلة حدود التصحيح (صيغ الخطأ) الواجب إيجادها لتحسين النتائج باستخدام تعجيل رومبرك بينما في هذه الطريقة لانحتاج ذلك وهذا يوفر الوقت والجهد وقد حصلنا على دقة عالية بالنتائج وصلت الى تسعة مراتب عشرية بعد الفاصلة وهذه نتيجة ممتازة مقارنة مع القيمة التقريبية للقاعدة MSS بوقت بسيط لايتجاوز بضعة ثواني وأحيانا أجزاء من الثانية ولذلك يمكن الاعتماد على طريقة $AMSS$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة والمعتلة المشتقات الجزئية والمعتلة.

المصادر

[1] Anthony Ralston , "A First Course in Numerical Analysis " McGraw – Hill Book Company , pp. 87-94 , 114-133 , 347-348 ,(1965).

[2] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , (1967).

[3] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين (1988).

[4] ضياء ،عذراء محمد ، " طرائق العددية لإيجاد التكاملات الأحادية والثنائية والثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، (2009).

[5] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب التكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة (2010).

[6] شبر، عدنان وسيل ، " اشتقاق طرائق عددية مركبة من صيغ نيوتن – كوتس وصيغ أخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عددياً وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية " رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، (2013).

[7] كاظم ، رحاب رحيم، "اشتقاق طرائق عددية مركبة من قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون وصيغ أخطائها لحساب التكاملات الثلاثية المحددة عددياً وتحسين النتائج باستخدام طرائق تعجيلية"، "رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ،2013 .

[8] محمد ، علي حسن ، صفاء مهدي ، جنان رحيم ، "حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة عدديا "،بحث مقدم الى جامعة كربلاء،2013.

البرنامج المستخدم في هذا البحث

```
tic
clear all
clc
%a=0;b=(pi/2);c=0;d=(pi/2);e=0;f=(pi/2);eps=10^(-10);
a=0;b=1;c=0;d=1;e=0;f=1;eps=10^(-12);
%find triple integral of function g(x,y,z) on the [a,b]*[c,d]*[e,f]
%using AMSS
%D(1)=2;D(2)=4;D(3)=6;D(4)=8;D(5)=10;D(6)=12;D(7)=14;D(8)=16;D(9)=18;D(10)=20;
D(11)=22;D(12)=24;
n=2;h=(b-a)/n;h1=(d-c)/n;h2=(f-e)/n;
uu=2;zz=3;
s(1,1)=2;
s(1,2)=h*h1*h2*(g(a,c,e+0.5*h2)+g(a,c,e+(3/2)*h2)+g(a,d,e+0.5*h2)+g(a,d,e+(3/2)*h2)+g(b,c,e+0
.5*h2)+g(b,c,e+(3/2)*h2)+g(b,d,e+0.5*h2)+g(b,d,e+(3/2)*h2)+4*(g(a,c+h1,e+0.5*h2)+g(a,c+h1,e+
```

```
(3/2)*h2)+g(b,c+h1,e+0.5*h2)+g(b,c+h1,e+(3/2)*h2)+4*(g(a+h,c+h1,e+0.5*h2)+g(a+h,c+h1,e+(3/
2)*h2))+g(a+h,c,e+0.5*h2)+g(a+h,c,e+(3/2)*h2)+g(a+h,d,e+0.5*h2)+g(a+h,d,e+(3/2)*h2)))/9;
for k=2:7
   n=2^k;s(k,2)=0;
   h2=(f-e)/n;
for t=1:n
   s(k,2)=s(k,2)+g(a,c,e+((2*t-1)/2)*h2)+g(b,c,e+((2*t-1)/2)*h2)+g(a,d,e+((2*t-
1)/2)*h2)+g(b,d,e+((2*t-1)/2)*h2);
   h1=(d-c)/n;h=(b-a)/n;
for i=2:2:n-2
   s(k,2)=s(k,2)+2*(g(a+i*h,c,e+((2*t-1)/2)*h2)+g(a+i*h,d,e+((2*t-1)/2)*h2));
end
for u=1:2:n-1
         s(k,2)=s(k,2)+4*(g(a+u*h,c,e+((2*t-1)/2)*h2)+g(a+u*h,d,e+((2*t-1)/2)*h2));
end
for m=1:2:n-1
         s(k,2)=s(k,2)+4*(g(a,c+m*h1,e+((2*t-1)/2)*h2)+g(b,c+m*h1,e+((2*t-1)/2)*h2));
for L=1:2:n-1
            s(k,2)=s(k,2)+16*g(a+L*h,c+m*h1,e+((2*t-1)/2)*h2);
end
for p=2:2:n-2
         s(k,2)=s(k,2)+8*g(a+p*h,c+m*h1,e+((2*t-1)/2)*h2);
end
end
for q=2:2:n-2
         s(k,2)=s(k,2)+2*(g(a,c+q*h1,e+((2*t-1)/2)*h2)+g(b,c+q*h1,e+((2*t-1)/2)*h2));
for w=1:2:n-1
            s(k,2)=s(k,2)+8*g(a+w*h,c+q*h1,e+((2*t-1)/2)*h2);
end
for v =2:2:n-2
            s(k,2)=s(k,2)+4*g(a+v*h,c+q*h1,e+((2*t-1)/2)*h2);
            s(k,1)=n;
end
end
end
         s(k,2)=s(k,2)*h1*h2*h/9;
if (k>=3)
if mod(k,2)==1
uu=uu+1;
end
forzz=3:uu
      s(k,zz)=(s(k,zz-1)*s(k-2,zz-1)-s(k-1,zz-1)^2)/(s(k,zz-1)+s(k-2,zz-1)-(2*s(k-1,zz-1)));
end
if abs(s(k,zz)-s(k,zz-1))<=eps
sprintf('%5.of%2-13f',n,s(k,zz));
    s(k,zz)
break
end
end
end
xlswrite('E:/(AMSS-74).xls',s,1,'A2')
toc
```