The Administration & Economic College Journal
For Economics & Administration & Financial Studies
Vol.15,N1, P P397-416
ISSN PRINT 2312-7813
ISSN ONLINE 2313-1012
مجلة كلية الإدارة والاقتصاد للدراسات الاقتصادية والإدارية والمالية
المجلد ١٥، العدد١ آذار٢٠٢٣ ص ص٣٩٧ -٤١٦

Employment of MCMC to estimate hidden Markov models with the application

*توظيف MCMC لتقدير نماذج ماركوف المخفية مع التطبيق

** انصاف جاسم مهدي ***أ.د. مهند فائز كاظم السعدون

Abstract

This research includes the study of hidden Markov models, which has witnessed wide interest by researchers, scholars and modern applications, as it is considered as a finite set of cases, in which the cases are related to a certain probability distribution. This research aims to estimate the parameters of the CIR and SABR models using Bayesian methods MCMC from During Metropolis-Hasting. In this research, he reviewed the hidden Markov models and the methods of Bayes' estimators, and one of the basic methods that are used in the Bayes' estimators of Monte Carlo for the Markov series MCMC, which is the Metropolis-Hasting method. The MCMC method in the simulation experiment and for three levels of samples (small, medium, and large) and different sizes, by determining the lowest value to watch the CIR model at different times, in addition to determining the initial value, determining or creating the random error from a specific distribution,

*بحث مستل .

**جامعة كربلاء – كلية الادارة والاقتصاد .

***جامعة القادسية – كلية الادارة والاقتصاد .

and calculating estimates for the parameters of the two CIR models And SABR,depending on the method of the greatest possibility in determining the parameters of the model (σ, β, α) in order to build or generate random processes with random variables that follow the normal normal distribution, and then draw these generated variables with graphics or shapes to obtain the best results, as well as the experimental side The practical side has been applied to the financial statements of the Iraq Stock Exchange for different years. The study concluded by employing MCMC in the simulation that the estimation through the trace plot and the iterative shape of the parameters was good for all the parameters of the model, and that the value of Volatility remained always greater than zero (positive), which is considered the basic condition for the estimation

المستخلص :يتضمن هذا البحث دراسة نماذج ماركوف المخفية الذي شهد اهتماما واسعاً من قبل الباحثين والدارسين والتطبيقات الحديثة ، اذ تعتبر كمجموعة منتهية من الحالات ، التي تكون فيها الحالات مرتبطة بتوزيع احتمالي معين .يهدف هذا البحث الى تقدير معالم نموذجي CIR وSABR باستخدام الطرائق البيزية MCMC وذلك من خلال Metropolis- Hasting. وقد استعرض في هذا البحث نماذج ماركوف المخفية وطرائق مقدرات بيز واحدى الطرائق الاساسية التي تستخدم في مقدرات بيز لمونتي كارلو لسلسة ماركوف MCMC وهي طريقة Metropolis- Hasting.اذ تناول الجانب العملي لهذا البحث جانبان وهما الجانب التجريبي والجانب التطبيقي ، ففي الجانب التجريبي تم استعمال او توظيف طريقة MCMC في تجربة المحاكاة ولثلاث مستويات من العينات (صغيرة ومتوسطة وكبيرة) وبأحجام مختلفة ،وذلك عن طريق تحديد اقل قيمة لمشاهدة نموذج CIR وبأوقات زمنية مختلفة ، بالإضافة الى تحديد القيمة الاولية ، وتحديد او انشاء الخطأ العشوائي من توزيع معين ، وحساب تقديرات معالم نموذجي CIR وSABR بالاعتماد على طريقة الامكان الاعظم في تحديد معلمات النموذج (σ,β,α) وذلك لبناء او توليد عمليات عشوائية ذات متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي العادي ، ومن ثم رسم هذه المتغيرات المتولدة برسوم او اشكال بيانية للحصول على

افضل النتائج، فضلا عن الجانب التجريبي تم تطبيق الجانب العملي التطبيقي على البيانات المالية لسوق العراق للأوراق المالية لسنوات مختلفة . اذ توصلت الدراسة بتوظيف MCMC في المحاكاة الى ان التقدير من خلال trace plot والشكل التكراري للمعالم كان جيد لكل معالم النموذج ، وان قيمة Volatility بقيت دائماً اكبر من الصفر (موجبة) الذي يعتبر الشرط الاساسي للتقدير .

المقدمة: ان نماذج ماركوف المخفية (HMMs) هي نماذج تصادفية ظهرت في اواخر الستينيات وبداية السبعينات من القرن العشرين ، قدمت في الاصل من قبل العالمين (Baum and Petrie) في عام ١٩٦٦، ويعبر عن نماذج ماركوف المخفية بالصيغة $\lambda=(A,B,\prod)$ ، إذ ان A هي مصفوفة احتمال انتقال الحالة ، B هي مصفوفة احتمالية الرابط بين الحالات المخفية والمشاهدات ، $\prod$ هي متجه توزيع الحالة الابتدائية ، وتتكون نماذج ماركوف المخفية من ثلاث مسائل اساسية هي(مسالة التقويم ، مسألة حل الشفرة ومسألة التدريب)

في بحثنا هذا سنقوم بتقدير معالم نموذجي CIR و SABR كنماذج ماركوف المخفية باستخدام MCMC والتي تعتبر اهم الطرائق لتقدير المعالم .

اولا : مشكلة البحث :امكانية تطبيق النماذج المخفية كمثالين CIR و SABR بالاعتماد على البيانات الحقيقية لتقدير المعالم .

ومن اجل شمول الجانب المالي بنماذج احصائية رصينة ولأهمية هذا الجانب في حياتنا وخاصة في اسواق العراق للاوراق المالية و لعدم وجود دراسات سابقة تناولت الموضوع ، اذ ارتأى الباحث الى البحث في هذا الجانب لحل المشكلة التي تكمن في تعزيز الجانب المالي .

ثانيا : هدف البح - هو عملية تقدير المعالم لنموذجي CIR و SABR باستخدام الطرائق البيزيه MCMC من خلال Metropolis hasting algorithm .

الجانب النظري :سوف يتم التطرق الى بعض امثلة من نماذج ماركوف المخفية وطرائق التقدير وكما يلي :

- نماذج ماركوف المخفية [2] Hidden Markov Models

ان عملية ماركوف تطلق على العمليات التصادفية ، وفي هذا الانموذج يكون احتمال الانتقال الى حالة معينة في المستقبل يعتمد فقط على حالتها في الحاضر ولا يعتمد على حالتها في

الفترات الزمنية السابقة ، ويطلق على عملية ماركوف بسلسلة ماركوف عندما يكون فضاء المعلمة (الزمن) متقطع .

حيث ان كلمة المخفي في أنموذج ماركوف المخفي تشير الى سلسلة ماركوف وليست الى معلمات الانموذج ، اذ يعبر عن نماذج ماركوف المخفية بالصيغة الاتية:

$$\lambda = (A, B, \pi)$$

حيث ان A: تمثل مصفوفة احتمال انتقال الحالة .

B تمثل مصفوفة احتمالية رابطة بين الحالات المخفية والحالات المشاهدة.

π تمثل متجه توزيع الحالة الابتدائية ،حيث ان $\pi=[\pi_{ij}]$ وهو احتمال ان يبدأ i النظام من الحالة j

وهنالك ثلاث حالات رئيسية يجب التعامل معها لصياغة نماذج ماركوف المخفية وهي(حالة التقييم ، حالة فك التشفير، وحالة التدريب). وان انموذج ماركوف المخفي يتكون من عمليتين عشوائيتين وهما:

العملية العشوائية الاولى:هي سلسلة ماركوف التي تتميز بوجود الحالات والاحتمالات الانتقالية ، حيث ان هذه الحالات تكون غير مرئية او مشاهدة فلهذا السبب هي مخفية .

العملية العشوائية الثانية:.تنتج انبعاثات مشاهدة عند كل لحظة ، حيث تعتمد على التوزيع الاحتمالي للحالات (كل حالة تقترن بتوزيع احتمالي) .

ولتقدير نماذج ماركوف المخفية نحتاج الى التعرف على طرائق مقدرات بيز

- Cox-Ingersoll-Ross model[7][9]

تم اقتراح نموذج Cox-Ingersoll-Ross (CIR) أو كما يسمى بنموذج سعر الفائدة (interest rate model) من قبل العلماء (J.C Cox و J.E Ingersoll و S.A Ross) في عام (١٩٨٥) لحل مشكلة تسعير السندات ذات القسيمة الصفرية بخصم مع آجال استحقاق مختلفة في ظل ظروف عدم الموازنة (no-arbitrage) ، وذلك من خلال افتراض أن تطور معدل سعر الفائدة الأساسي (short-term interest rate) على المدى القصير هو حل وحيد لعملية الانتشار(diffusion process) للمعادلة التفاضلية العشوائية (SDE) وكالاتي:[9]

$$dr_t = \alpha(\mu - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

مع العلم ان الحالة الأولية $r(0) = r_0 > 0$. وان $\{W_t = W(t)\}_{t\geq 0}$ هي تمثل عملية وينر (Wiener process) القياسية الأحادية البعد. وأن عملية معدل الفائدة (the interest rate process) $(r(t))_{t\geq 0}$ تسمى CIR أو عملية الجذر التربيعي (square root process).

وأن α وμ و σ هما معلمات ، اذ ان α تمثل سرعة الارتداد (the speed of adjustment) للمتوسط μ الذي هو متوسط طويل المدى ، ومعدل تقلب (volatility rate) لـ σ. اذ ان الحل الوحيد للمعادلة رقم (1) تُعرف أيضًا باسم عملية CIR :[7]

$$r_t = r_s + \int_s^t \alpha(\mu - r_u)du + \sigma\int_s^t \sqrt{r_u}dW_u \qquad s < t$$

وبالتالي فأن متوسطة :

$$E[r_t/r_s] = r_s + \int_s^t \alpha(\mu - E[r_u/r_s]\, du \qquad s < t$$

حيث ان $m_t = E[r_t/r_s]$ ، وان:

$$\frac{d}{dt}m_t = \alpha(\mu - m_t) \qquad s < t$$

وبالتالي فأن المتوسط سيكون كالاتي:

$$E[r_t/r_s] = m_t = r_s e^{-\alpha(t-s)} + \mu\left(1 - e^{-\alpha(t-s}\right) \qquad s < t$$

وبالمثل يمكن اثبات ان التباين يكون كالاتي:

$$Var[r_t/r_s] = \frac{r_s\sigma^2}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t-s)} - e^{-2\alpha(t-s)} + \frac{\mu\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-\alpha(t-s)^2}\right)$$

ويمكن دراسته على شكل نماذج لنموذج ماركوف المخفي وكما يلي :

$$X_{t+1} = X_t + (\theta_1 - \theta_2 X_t)\Delta\theta_t + \theta_3\sqrt{X_t}dw_t$$

$$Y_t = \emptyset X_t + \sigma u_t$$

حيث ان Δt تمثل الفرق بين الازمنة ، وان Θ_1 و Θ_2 و Θ_3 و Φ و σ تمثل معالم النموذج

وان $\Delta w_t \sim N(0, \Delta)$

وان $u_t \sim N(0, \Delta)$

- The stochastic alpha beta rho model (SABR)[5][4]

هو نموذج تقلب عشوائي للأسعار الآجلة (forward prices)المستخدمة بشكل شائع في نمذجة مشتقات أسعار الفائدة (interest rate). ان ألفا وبيتا ورو(alpha, beta and rho) هي معلمات يجب قياسها. اذ يصف الفا Alpha حجم التقلب في سعر الأصل الأساسي(the price of the underlying asset) ؛ ويصف بيتا Beta حساسية تحركات الأسعار الآجلة للسعر الفوري (the sensitivity of forward price movements to the spot price)؛ وان رو rho يصف العلاقة بين التحركات في السعر الآجل(the forward price) والتحركات في تقلب سعر الأصل الأساسي(the price of the underlying asset).

ان نموذج SABR يحاول التقاط ديناميكيات سعر آجل واحد(single forward prices)، حيث ان هذا السعر الآجل يمكن أن يكون هو LIBOR الآجل ، وسعر المقايضة الآجلة (forward swap prices)، والعائد الآجل على السند (the forward yield on a bond). وان نموذج SABR يعد امتدادًا لـنموذج CEV كالاتي: [4]

$$dF(t) = \sigma F(t)^{\beta} dW(t) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

حيث أن σ يمثل معلمة التقلب (the volatility parameter) و المسمى β-volatility

ان الديناميكيات الكاملة لنموذج SABR يتم الحصول عليها من خلال المعادلتين الاتيتين:[4][5]

$$dF(t) = \sigma(t)C\big(F(t)\big)^{\beta} dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha\sigma(t)\, dZ(t) \qquad \dots\dots\dots (3)$$

حيث ان F(t) و σ(t) تمثل عملية السعر الآجل و التقلب (the forward rate process and volatility) ، و W (t) و Z (t) تمثل عمليتا وينر(Wiener processes) او تمثل حركات براونية قياسية BM (Brownian motions) واللتان ترتبطان بشكل عام بـ r كما في المعادلة الاتية :[4][5]

$$E[dW(t)dZ(t)] = rdt \qquad \dots\dots\dots(4)$$

حيث ان r يمثل معامل ارتباط ثابت ، وتم افتراضه في بحثنا هذا مساوياً الى الصفر.

اذ ان هنالك حالة خاصة للمعادلة (3) التي لها دور مهم في التحليل ، والحالة هي عندما C(F(t))=1 و r=0 ، ففي هذه الحالة يكون للمعادلات الاساسية للحركة (motion) شكل بسيط وكالاتي:[5]

$$dF(t) = \sigma(t)dW(t)$$

$$d\sigma(t) = \alpha\sigma(t)dZ(t) \qquad \dots\dots\dots (5)$$

مع $E[dW(t)dZ(t)] = 0$

حيث يشار الى النموذج اعلاه في المعادلة (5) بنموذج SABR العادي (the normal SABR model)

وأن معامل الانتشار C (F) يُفترض ان يكون من النوع ثابت مرونة التباين (constant-elasticity-of-variance)CEV :[4]

$$C(F) = F^{\beta} \qquad \dots\dots\dots (6)$$

حيث ان $0 \leq \beta < 1$

فعلى افتراض أنه تم اختيار عدد مناسب من F (t) بحيث يكون مارتينجال (martingale) ، والعملية σ(t) هي المكون العشوائي لتقلب F(t) ، والثابت α المعروف باسم volvol ، هو التقلب اللوغاريتمي الطبيعي لـ σ (t). اذ ان الديناميكيات تكمل بالشرط الأولي (the initial condition) كالاتي:[4][5]

$$F(0) = F^0$$

$$\sigma(0) = \sigma^0 \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

حيث ان F^0 تمثل القيمة الحالية للأمام (the current value of the forward) ، و $\sigma^\cdot$ تمثل القيمة الحالية (the current value) لتقلب β (β-volatility).

باستثناء الحالة الخاصة الموجودة في المعادلة (5) عندما β = 0 ، لا يوجد لها حل واضح معروف لهذا النموذج. اذ يمكن حل الحالة العامة تقريبًا عن طريق توسيع مقارب في المعلمة الاتية:[4]

$$\varepsilon = \alpha\sqrt{T} \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

حيث ان T تمثل وقت استحقاق الاختيار(the time-to-maturity of the option). وأن SABR هو نموذج أمامي فردي ، وإن وقت انتهاء صلاحية الاختيار T يحدد مقياسًا زمنيًا طبيعيًا للمشكلة. وحيث ان كتابة t = Ts ، تعرف كالاتي:[4]

$$X(s) = F(Ts)$$

$$Y(s) = \frac{\sigma(Ts)}{\alpha} \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

ان صياغة ديناميكيات SABR تعاد كتابتها بالشكل الاتي:[4]

$$dX(t) = \varepsilon Y(t) C\big(X(t)\big) dW(t)$$

$$dY(t) = \varepsilon Y(t)dZ(t) \quad \dots\dots\dots (10)$$

فعند استخدام قانون القياس المعروف جيدًا $W(Ts) = \sqrt{T}W(s)$ للحركة البراونية. فأن الشروط الأولية تأخذ النموذج الاتي:[4]

$$X(0) = F^0$$

$$Y(0) = \frac{\sigma^0}{\alpha} \quad \dots\dots\dots (11)$$

ويمكن دراسته على شكل نموذج ماركوف المخفي ، ولقد تم دراسة النموذج بشكل مخفي كالاتي:

$$F_t = F_{t-1}^{\beta} + \sigma_t F_{t-1} \Delta w_{1,t}$$

$$\sigma_t = \sigma_{t-1} + \alpha \Delta w_{2,t}$$

اسلوب بيز[3][6] Style Bay's

ان الاستخدامات المتنوعة والعديدة لعلم الإحصاء في مجالات الحياة المختلفة ادت إلى اهتمام عدد من الباحثين بدراسة العلوم الإحصائية ، حيث نشأت عن هذه الدراسات بمرور الزمن المدرسة البيزية التي تعتمد في اسلوبها وتحليلها واستنتاجاتها على المعلومات التي توفرها المشاهدات (العينات) فضلا عن المعلومات التي تأتي من الاعتقاد الشخصي والتي تدعى بالمعلومات الأولية (Prior Information) وان المدرسة البيزيه تتميز عن المدرسة التقليدية بأنها تعامل المعلمات في التوزيعات الاحتمالية كمتغيرات عشوائية لها توزيع احتمالي وقد اطلق على هذه المدرسة بمدرسة بيز نسبة إلى مؤسسها الإحصائي البريطاني توماس بيز(Thomas Bayes).

ان اسلوب بيز في التقدير يركز بشكل عام على المعلمة θ التي هي كمية غير معروفة ، حيث ان المعلمة لها قيمة فعلية ولكن غير معروفة المعالم وبالتالي فهي قيمة عشوائية ، وعلى التوزيع السابق $P(\theta)$ الذي ينص على عدم المعرفة الاولية بشان المعلمة ، حيث ان التوزيع السابق يتم انشاؤه بواسطة تحليل وقياس المعلومات التاريخية والمعرفة والمعتقدات المؤهلة ،

للحصول على مزيد من المعلومات حول المعلمة ، وان جمع بيانات المعالم $D=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ للدالة المشتركة من ($(x_1,x_2,\dots,x_n$ للدالة θ تدعى بدالة الاحتمال (likelihood function) ويرمز له بـ $P(D/\theta)$.

اما لحساب التوزيع اللاحق (Posterior distribution) الذي ينص على تحديث عدم المعرفة الاولية لـ θ في ضوء المعلومات الجديدة ، وان التوزيع اللاحق نستطيع إيجاده بتطبيق نظرية بيز المعروفة (Bay's Theorem) وهي:

$$P(\theta/D) = \frac{P(\theta)P\,(D/\theta)}{P(D)} = \frac{P(\theta)P\,(D/\theta)}{\int P(\theta)P\,(D/\theta)\,d\theta} \propto P(\theta)P(D/\theta)$$

او

$$\text{Equivalently Posterior} = \frac{\text{Prior} \times \text{liklehood}}{\text{constant}} \propto \text{Prior} \times \text{liklehood}$$

ومن احدى الطرائق الاساسية التي تستخدم في مقدرات بيز لمونتي كارلو لسلسة ماركوف MCMC ، وهي طريقة Metropolis-Hastings

- خوارزمية متروبوليس هاستينغز [1][8] The Metropolis-Hastings Algorithm

هذه الخوارزمية تم تطويرها في سنة (١٩٥٣) بواسطة (Metropolis) وتم توسيعها وتقديمها في سنة (١٩٧٠) بواسطة (Hastings) ، وهي الطريقة الأكثر شيوعاً لتنفيذ لمونتي كارلو لسلسة ماركوف (MCMC). تنشئ الخوارزمية مجموعة من الحالات $\{X_t\}$ وهي سلسلة ماركوف لأن كل حالة X_t تعتمد فقط على الحالة السابقة X_{t-1}. فلو تم الافتراض بأن لدينا الكثافة الاحتمالية $\pi(x)$ ،التي تسمى كثافة الهدف (target density)، والتي نريد المحاكاة منها. فليتم ذلك ، فلا بد من استخدم دالة $q(y \mid x)$ التي تسمى التوزيع المقترح proposal (أو المرشح candidate) ، والتي يمكن أن تكون أي كثافة احتمالية تنشأ سلسلة ماركوف ergodic. اذ يعتمد توزيع الاقتراح على الحالة الحالية x ويمكن أن يولد عينة مقترحة جديدة y. لضمان إمكانية الانعكاس ، اذ يتم قبول العينة المقترحة مع الاحتمال $\alpha(x,y)$ ورفضها بخلاف ذلك. ان الأساس المنطقي لذلك هو أن التوزيع المقترح عادة ما يكون توزيعًا عشوائيًا ، فلا يمكننا أن نتوقع بأن ذلك يفي بمعادلة الكثافة المستهدفة $\pi(x)$ ، كالاتي:

$$q(y/x)\pi(x) \neq q(x/y)\pi(y)$$

فلو تم الافتراض بأن لدينا $q(y|x)\pi(x) > q(x|y)\pi(y)$. ثم تحديد العامل $\alpha(x,y)<1$ ليتم تعريفة بحيث يوازن عدم المساواة ؛ كالاتي:

$$q(y|x)\pi(x)\alpha(x,y) = q(x|y)\pi(y)$$

من هذا نحصل على قيمة $\alpha(x,y)$ ، والتي يشار إليها بأسم احتمال القبول (acceptance probability) ، كالاتي:[1]

$$\propto (x,y) = \min(1, \frac{q(x/y)\pi(y)}{q(y/x)\pi(x)})$$

اذ أن طريقة Metropolis-Hastings تتطلب فقط تعريف $\pi(x)$ حتى ثابت التطبيع (normalizing) لأن الثابت يسقط في النسبة $\pi(y) / \pi(x)$. فيمكن بعد ذلك وصف الخوارزمية على النحو التالي :

١. البدء بأي قيمة أولية X_0 تحقق $\pi(X_0) > 0$ ، عندما $k = 0$.

٢. لتكن x_k هي الحالة الحالية للسلسلة. و تعيين Y_k من التوزيع المقترح $q(Y|X)$.

٣. القيام بتوليد متغير عشوائي U من التوزيع $U(0,1)$.

٤. التحديث للخوارزمية والذي يتم على النحو التالي:

- إذا كان $U \le \alpha(X_k, Y_k)$ ، فأن $X_{k+1} = Y_k$
- بخلاف ذلك فانه يتم تعيين $X_{k+1} = X_k$

٥. زيادة k .

فإذا كان $k < N$ يتم الانتقال إلى الخطوة ٢ ؛ وإلا بخلاف ذلك سيتم استرجاع $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$

الجانب التجريبي

- المقدمة عن مفهوم المحاكاة Introduction Simulation Concept ان المنهج التجريبي (Empirical Approach) يعد من المناهج العلمية التي لها جذور واساس في التاريخ الانساني القديم ، ونظرا للسرعة الفائقة التي توفرها البرامج الالكترونية بمختلف انواعها من حزم جاهزة ، دفع اغلب الباحثين بمختلف تخصصاتهم الى اعتماد اسلوب المحاكاة (Simulation) لغرض تطبيق الطرائق الخاصة بالنموذج المدروس والمتمثل بنماذج ماركوف المخفية ،اذ تعرف المحاكاة بأنها طريقة تحليلية عددية علمية تحاول استعمال مناهج وأساليب رياضية منهجية ، وذلك لغرض أيجاد صورة طبق الاصل من أي نموذج من دون الرجوع الى اخذ ذلك النموذج ، كما وان اسلوب المحاكاة يستخدم عادة

لوصف سلوك نظام حركي معين عن طريق تطبيق تجارب تكون مماثلة وملائمة ومقاربة للنموذج الحقيقي والواقعي الموجود اصلا.

- ففي هذا الجانب سيتم توليد متغيرات الاخطاء العشوائية والخاضعة للتوزيعات التي من خلالها يتم ايجاد متغير السلسلة لنماذج ماركوف المخفي ومن ثم اتباع مقدر بيز لتقدير معالم نماذج ماركوف المخفي ، وكما تم ذكره في الجانب النظري.
- مخطط بناء تجربة المحاكاة

لغرض تشغيل النموذج باستخدام اسلوب المحاكاة استخدمنا المعلومات الاتية باستخدام البرمجة بلغة(R 4.2.0) ، اذ لابد من تحديد اهم العوامل الخاصة لمراحل بناء تجارب المحاكاة ، وذلك لغرض تحليل البيانات وكالاتي:

١.تحديد حجوم العينات بأربعة حجوم للعينات (صغيرة ، متوسطة، كبيرة) وهي(,N=100 125,150) على التوالي ، وتحديد اقل قيمة لمشاهدة نموذج CIR والتي تبدأ من (F_t=1) ولأوقات زمنية تصل الى (t=20) بقيمة اولية (Initial Value) تساوي (y=0.02).

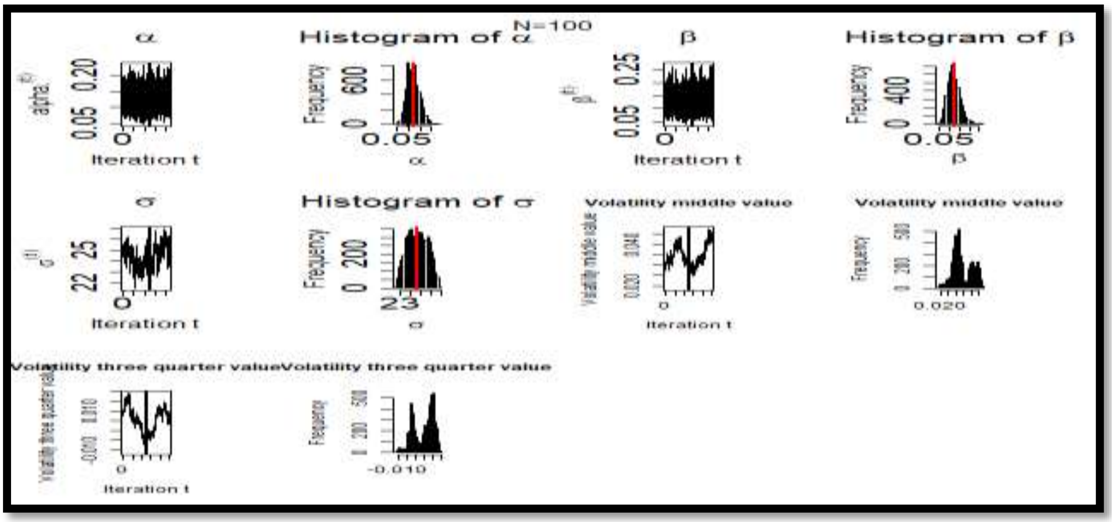
٢.انشاء خطأ عشوائي (Generating random error) ، يتم تحديد او انشاء الخطأ العشوائي من التوزيع الطبيعي العادي (Standard normal distribution) بمتوسط يساوي صفر و تباين يساوي ٥ ، اي ان $y \sim r\ \mathrm{norm}(0,5)$.

٣.معلمات نموذج CIR يتم حساب تقديرات معالم نموذج CIR بالاعتماد على طريقة الامكان الاعظم (MLE)، اذ يتم تحديد معلمات النموذج بـ (α=0.1 و β=1.5 و σ=0.5).

٤.ادراج القيم الاولية ثم بناء عملية عشوائية يتم في هذه المرحلة ادراج القيم الاولية لمعلمات النموذج (σ،β،α) وذلك لبناء أو توليد عمليات عشوائية ذات متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي العادي.

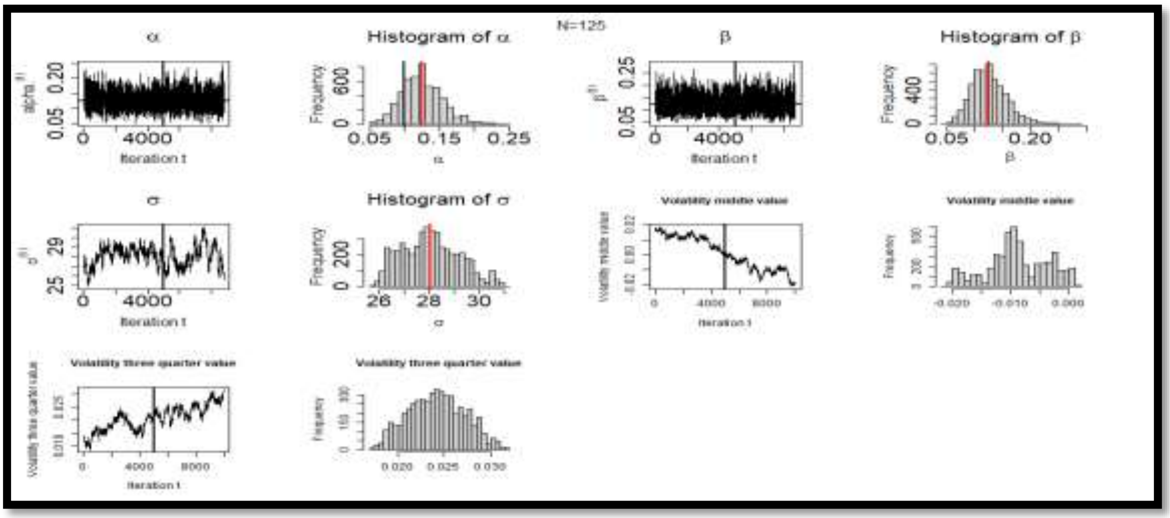
٥.رسم المتغيرات المتولدة Plotting the generated variables

هذه المرحلة تعتبر المرحلة النهائية من مراحل مخطط بناء تجربة المحاكاة ، اذ تتضمن هذه المرحلة اهم الرسوم البيانية والاشكال لغرض الحصول على افضل النتائج ، ومن هذه الرسوم البيانية والاشكال هي:



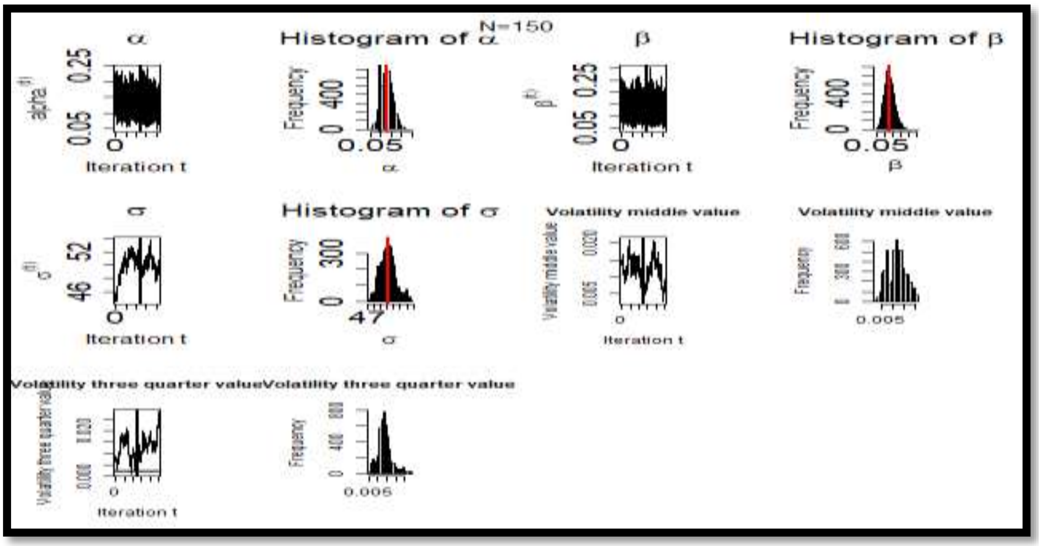
الشكل (١) يمثل تقديرات MCMC لنموذج CIR المخفي

ان الشكل(1) لحجم العينة N=100 ، يتكون من trace plot لكل معلمة من معالم النموذج σ,β,α وبعد الشكل التكراري لنفس المعالم ، والواضح ان تقدير المعالم كان جيد لكل المعالم وتم تقدير ايضا الربع الثالث للتباين والشكل التكراري لربع الثالث للتباين، حيث ان قيم التقلب (volitility value بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.



الشكل (٢) يمثل تقديرات MCMC لنموذج CIR المخفي

ان الشكل(٢) لحجم العينة N=125 ، يتكون من trace plot لكل معلمة من معالم النموذج σ,β,α وبعد الشكل التكراري لنفس المعالم ، والواضح ان تقدير المعالم كان جيد لكل المعالم وتم تقدير ايضا الربع الثالث للتباين والشكل التكراري لربع الثالث للتباين، حيث ان قيم volitility بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.



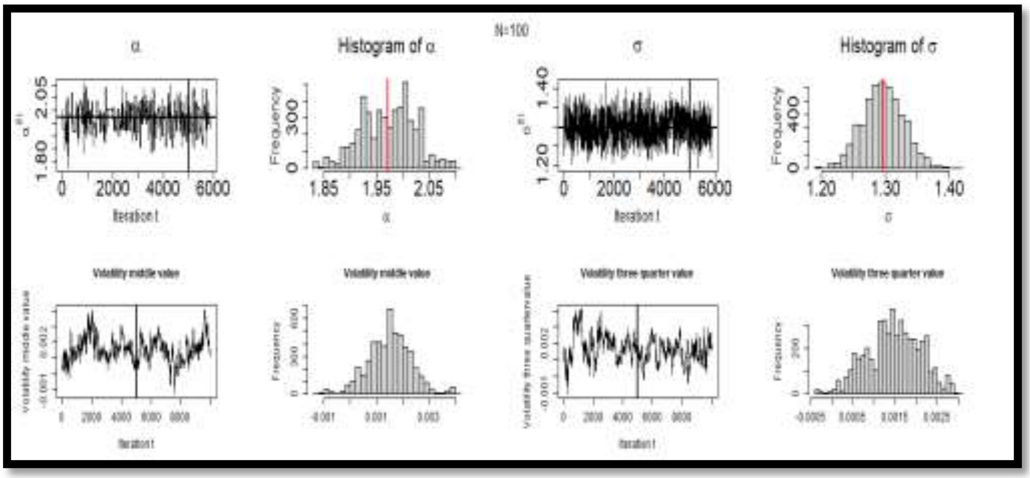
الشكل (٣) يمثل تقديرات MCMC لنموذج CIR المخفي

ان الشكل(٣) لحجم العينة N=150 ، يتكون من trace plot لكل معلمة من معالم النموذج σ,β,α وبعد الشكل التكراري لنفس المعالم ، والواضح ان تقدير المعالم كان جيد لكل المعالم وتم تقدير ايضا الربع الثالث للتباين والشكل التكراري لربع الثالث للتباين، حيث ان قيم volitility بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.

ولغرض تشغيل نموذج SABR استخدمنا المعلومات الاتية :

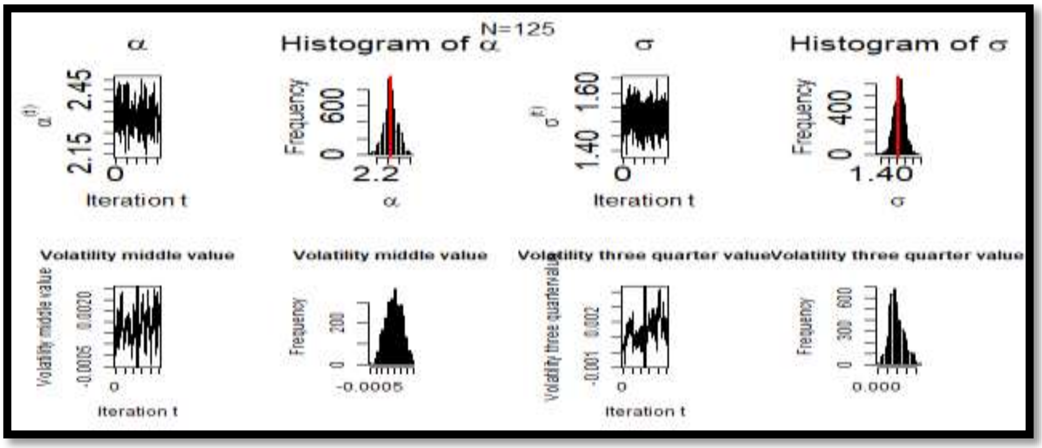
اذ اعطينا للمعالم σ=1.5 و α=0.2 ، والزمن الاول (T_1=10) والزمن الثاني (T_2=5) وحجم العينة (N=100)، اذ ان التغير بالزمن الاول ($dw_1 = \frac{T_1}{N}$) والتغير بالزمن الثاني ($dw_2 = \frac{T_2}{N}$) ، ثم اجرينا عملية التوليد وذلك باضافة حد المتغير العشوائي الذي يولد من توزيع طبيعي موجب بمتوسط يساوي (واحد) وتباين يساوي (٣)، وبالنسبة لـ σ تولد ايضا من التوزيع الطبيعي الموجب بمتوسط يساوي(٢) وتباين يساوي (٥) ، ومن بعد عملية التوليد قمنا بالاجراءات الاتية:

اذ قدرنا معلمات النموذج اعلاه باستخدام دالة الامكان الاعظم(Maximum likelihood function)، علماً ان المتوسط للنموذج الاول (حد المتغير العشوائي) يساوي (صفر) ومتوسط النموذج الثاني(σ)يساوي (صفر) ايضا ،ومن بعد ذلك تم توظيف هذه المقدرات باستخدام MCMC حيث كان عدد الدورات (١٠٠٠٠) دوره وتم استخدام قيم ابتدائية وهي عندما (T_1=10، T_2=5)، اذ كانت النتائج كالاتي:



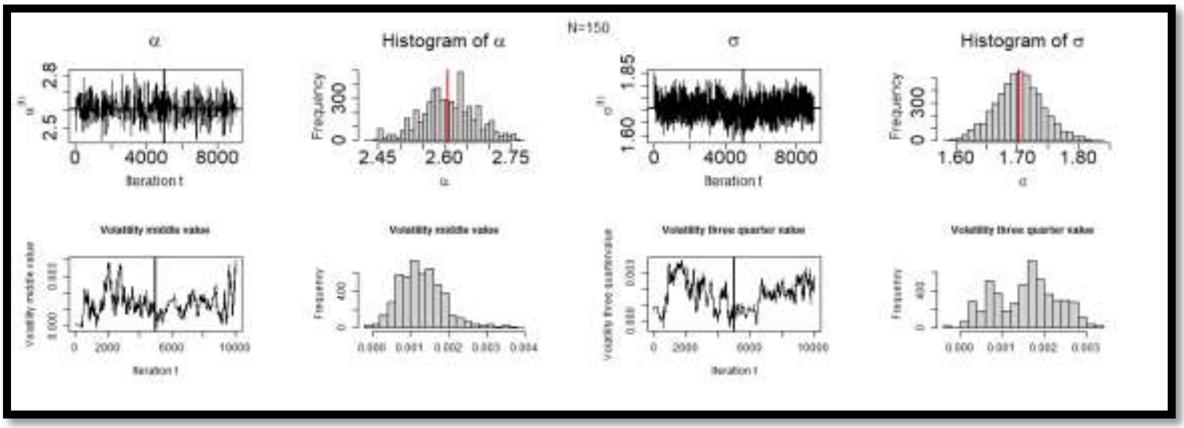
الشكل (٤) يمثل تقدير المعالم SABR باستخدام MCMC

في الشكل (٤) لحجم عينة N=100 ، كانت التقديرات من خلال trace plot والشكل التكراري جيد للمعالم (α,σ) ، اما الصنف الثاني من الشكل فيمثل متوسط التباين والربع الثالث للتباين وبقيت محافظ على القيم الموجب للظاهرة وهذا هو المطلوب.



الشكل (٥) يمثل تقدير المعالم SABR باستخدام MCMC

في الشكل (٥) لحجم عينة N=125 ، كانت التقديرات من خلال trace plot والشكل التكراري جيد للمعالم (α,σ) ، اما الصنف الثاني من الشكل فيمثل متوسط التباين والربع الثالث للتباين وبقيت محافظ على القيم الموجب للظاهرة وهذا هو المطلوب.



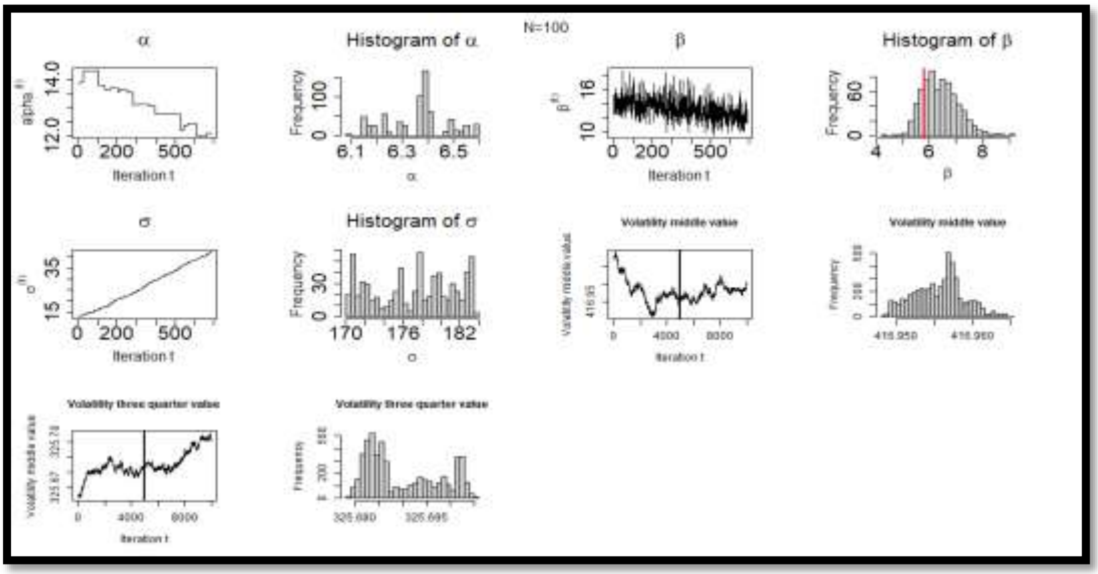
الشكل (٦) يمثل تقدير المعالم SABR باستخدام MCMC

في الشكل (٦) لحجم عينة N=150 ، كانت التقديرات من خلال trace plot والشكل التكراري جيد للمعالم (α,σ) ، اما الصنف الثاني من الشكل فيمثل متوسط التباين والربع الثالث للتباين وبقيت محافظ على القيم الموجب للظاهرة وهذا هو المطلوب.

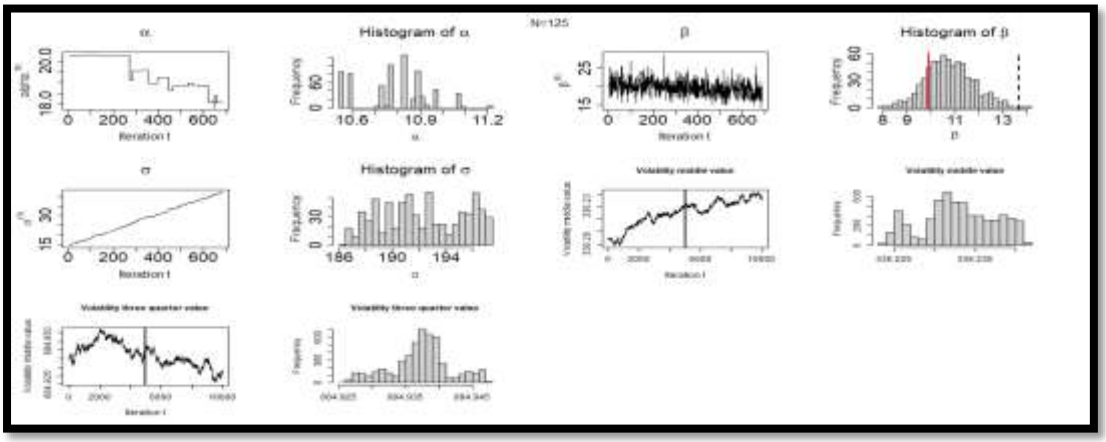
الجانب التطبيقي

للوصول الى حقيقة التقدير ودقته ، تم اعتماد احد البيانات المالية كجانب تطبيقي

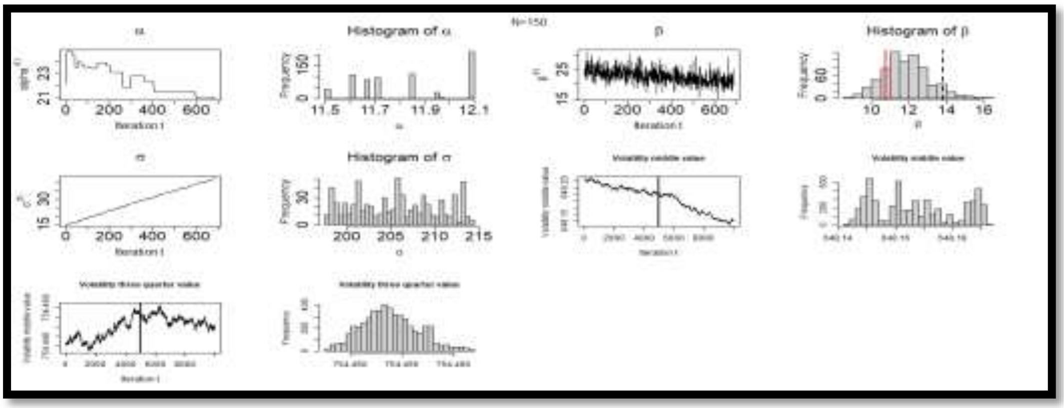
اذ تم الحصول على البيانات المالية من سوق العراق الدولية ، اذ تم سحب عينة حجمها (٧١٤) عينة للفترة الزمنية (٢٠١٧-٢٠١٩) ، وكانت النتائج لغرض تشغيل نموذج CIR كالاتي:



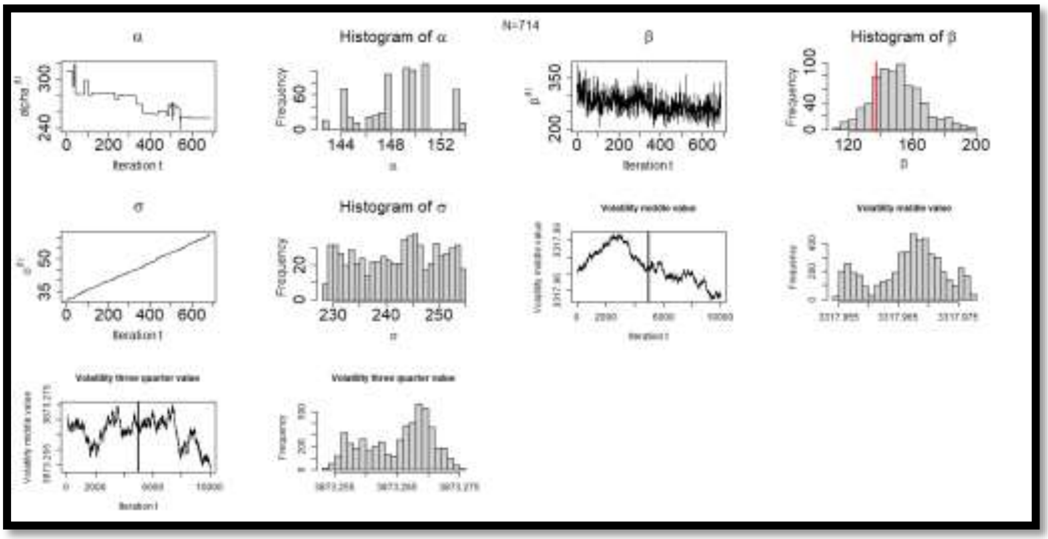
الشكل (٧) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج CIR المخفي



الشكل (٨) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج CIR المخفي



الشكل (٩) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج CIR المخفي

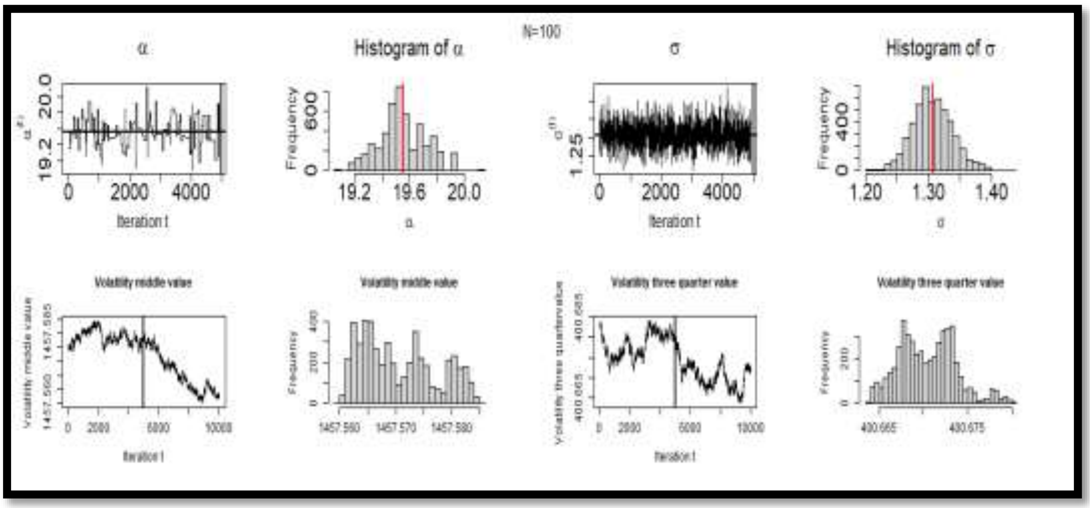


الشكل (١٠) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج CIR المخفي

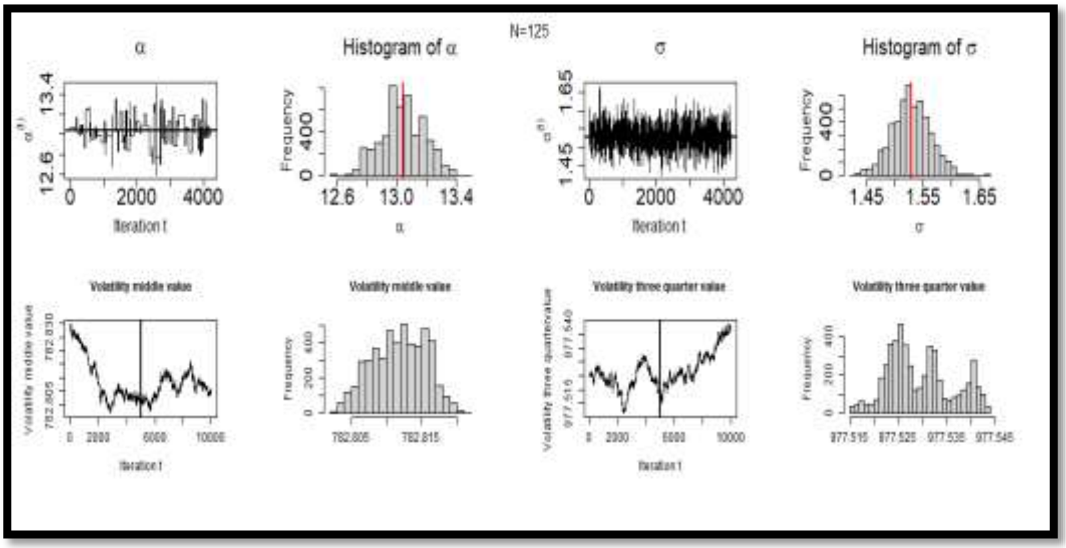
في الشكل(٧) والشكل (٨) والشكل(٩) والشكل(١٠) لحجم العينة (٧١٤) وللاحجام الاخرى المختلفة ، يتكون من trace plot لكل معلمة من معالم النموذج σ,β,α وبعد الشكل

التكراري لنفس المعالم ، والواضح ان تقدير المعالم كان جيد لكل المعالم وتم تقدير ايضا الربع الثالث للتباين والشكل التكراري لربع الثالث للتباين، حيث ان قيم volitility بقيت دائما اكبر من الصفر وهذا هو الشرط الاساسي للتقدير.

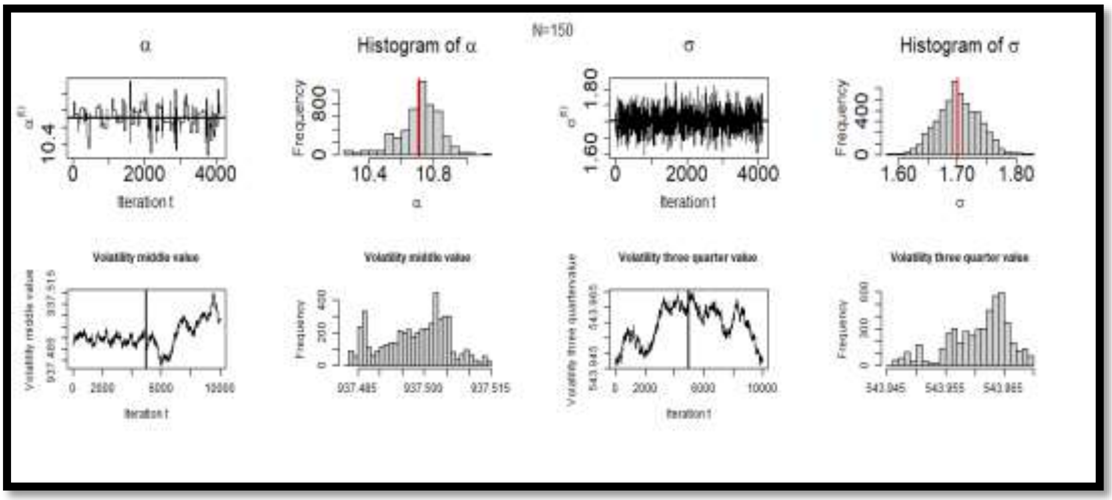
ولغرض تشغيل نموذج SABR ، تم الحصول على النتائج الاتية :



الشكل (١١) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج SABR



الشكل (١٢) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج SABR



الشكل (١٣) يمثل تقديرات MCMC الحقيقية لنموذج SABR

في الشكل (١١) والشكل (١٢) والشكل(١٣) لإحجام العينة المختلفة، كانت التقديرات من خلال trace plot والشكل التكراري جيد للمعالم (α,σ) ، اما الصنف الثاني من الشكل فيمثل متوسط التباين والربع الثالث للتباين وبقيت محافظ على القيم الموجب للظاهرة وهذا هو المطلوب

الاستنتاجات

١.توصلت الدراسة الى ان تقديرات المعالم (α,β,σ) وفق طريقتي MLE وMCMC تعطيان افضل تقديرات لمعالم نموذجي CIR وSABR .

٢.نستنتج بأن تقدير المعالم (α,β,σ) كان جيداً للحجوم المختلفة لكل المعالم.

٣.نستنتج بأن تقدير الربع الثالث للتباين والشكل التكراري للربع الثالث للتباين عند قيم التقلب Volitility حقق الشرط الاساسي للتقدير وهو اكبر من الصفر(موجب).

٤.نستنتج من خلال المقارنة بين نموذجي CIR وSABR باستخدام طرائق التقدير ، بأن نموذج SABR اعطى اقل قيم لتقدير المعلمات .

التوصيات

١.استعمال نماذج اخرى غير نموذجي CIR و SABR عند تطبيق البيانات لتقدير المعالم.

٢.استعمال طريقتي MLE و MCMC في توزيعات احتمالية اخرى ، وتطبيقها في جوانب تطبيقية اخرى كالجوانب الاجتماعية او الاقتصادية او الطبية.

٣.ضرورة تشجيع الباحثين على استعمال طريقة MCMC والتطرق لها في البحوث النظرية والتطبيقية ، لغرض الحصول على تقدير المعلمات بأفضل تقدير ممكن من تقديرات الطرائق الاخرى.

المصادر

1) Auranen ,Kari, Halloran,Elizabeth, Minin,Vladimir, " MCMC Methods for Infectious Disease Studies", Summer Institute in Statistics and Modeling of Infectious Diseases, 2016.
2) Dymarski, Przemyslaw, ed., "Hidden Markov models: Theory and applications", BoD–Books on Demand, 2011.
3) Ghosh,Jayantak,Delampady,Mohan,Samanta,Tapas,"An Introduction to Bayesian Analysis Theory and Method", Springer, 2006 .
4) Hagan, Patrick, and Andrew Lesniewski, "LIBOR market model with SABR style stochastic volatility" , JP Morgan Chase and Ellington Management Group 32 :57, 2008.
5) Hagan, Patrick, Andrew Lesniewski, and Diana Woodward,"Probability distribution in the SABR model of stochastic volatility", Springer Proceedings in Mathematics & Statistics , Cham, 1-35, 2015.
6) Ida kjersem " Bayesian Forecasting and dynamic models applied to strain data from the Gotariver bridge", Faculty of mathematics and natural sciences , university of Oslo ,2009.
7) Miao,zan,"CIR Modeling of Interest Rates", Linnaeus University, Department of Mathematics, 2018.
8) Oliver C. Ibe, " Markov Processes for Stochastic Modeling", University of MassachusettsLowell, Massachusetts, Elsevier Academic Press, 2009.
9) Orlando, Giuseppe, and Michele Bufalo, "Interest rates forecasting: Between Hull and White and the CIR#—How to make a single-factor model work", Journal of Forecasting 40.8 ,1566-1580, 2021.