

تأثير تغير أعماق ومواقع الشقوق المستعرضة على ترددات الأعمدة الدوارة

Effect of the change of Depth and Location of Transverse Cracks on Frequencies of Rotating Shaft

م.م. عناد فتحي مصطفى
قسم الهندسة الميكانيكية، كلية
الهندسة جامعة الموصل، نينوى،
العراق

أ.د. صباح محمد جميل
قسم الهندسة الميكانيكية، كلية
الهندسة جامعة الموصل،
نينوى، العراق

م.م. زياد شكيب الصراف
قسم الهندسة الميكانيكية، كلية
الهندسة جامعة الموصل، نينوى،
العراق

الخلاصة

في هذا البحث، تم استخدام تقنية فحص لا إتلافية لدراسة تأثير تغير أعماق ومواقع الشقوق المستعرضة على الخصائص الاهتزازية للأعمدة الدوارة. حيث تضمنت الخطوة الأولى قياس الترددات الطبيعية للأعمدة الدوارة قبل إحداث الشق وذلك باستخدام جهاز محلل الاهتزازات (Vibration Analyzer B & K type 2515) لتحليل الموجات الاهتزازية الناتجة عن الدوران ومقارنتها مع القيمة النظرية وحسب طريقة تثبيت العمود الدوار وذلك بعد معرفة السرعة التدويرية للعمود. أما الخطوة الثانية فقد تم إحداث شق ذو عمق وبعد معينين عن محمل العمود وأجريت القياسات للذبذبة الحرة الطبيعية بوجود الشق، تمت الدراسة بتحديد تأثير كل من قطر العمود وطوله. أظهرت النتائج العملية أن وجود الشقوق أدى إلى انخفاض في قيم الترددات الطبيعية للعمود الدوار، حيث أن هذا الانخفاض في قيم الترددات الطبيعية للأعمدة والمتضمنة شقاً مستعرضاً في مواقع قريبة من المحمل كانت أقل مما هو عليه في المواقع البعيدة من المحمل.

Abstract

In this paper, An-Non destructive test technique was used to study the change of depth and Location of transverse cracks on the vibration characteristics of the rotating shafts. Firstly, It measured the natural frequencies of rotating shaft are measured before renewing cracks with different dimensions and depths from the bearing of the rotating shaft. And by knowing the Speed of Shaft, Then by using (Vibration analyzer B & K type 2515) to analyze the vibrational characteristics during the rotation and comparing it with mathematical analysis using the method of mounting the rotating shaft. Secondly, a crack of certain depth and dimension away from the rotating shaft bearing was made. The measurements of the natural free vibration due to the presence of the crack were carried out. The study took into consideration the diameter and the length of the rotating shaft.

The practical results showed a decrease in the natural frequencies of rotating shaft when the crack presence. This decrease was more when the crack located in areas near the bearing than was located away from the bearing.

١. المقدمة

تعد التشققات السبب الرئيسي في فشل الهياكل الهندسية، إذ إن العتبات والقضبان والأعمدة الدوارة تستخدم في نقل الأحمال العالية في العديد من المكين، لذلك الفشل المفاجئ خلال التشغيل في الأحمال العالية ربما يسبب العديد من الأضرار وبالتالي فإن التنبؤ بحدوث التشققات ضروري جداً [1].

إن تعرض الأعمدة الدوارة إلى حالة اللاتوازن من الأسباب الهامة التي تؤدي إلى حدوث وظهور التشققات فيها، فضلاً عن الاهتزازات العالية أثناء العمل. ويمكن أن تنشأ الشقوق من خلال قلة التزييت أو نتيجة تعرض تلك الأعمدة إلى قوة خارجية مؤثرة فيها [2].

إن استخدام طريقة تحليل الاهتزازات لكشف العيوب تعد من التقنيات الفعالة جداً في المكين المعرضة للفشل في محطات توليد الطاقة للأنظمة الدوارة لأن تحليل الاهتزازات للأنظمة الدوارة تعكس التغيرات في الخصائص الميكانيكية لهذه الأجزاء لذا أصبح من الممكن التنبؤ بفشل الأنظمة الدوارة في مراحل مبكرة فضلاً عن أن هذه الطريقة سريعة وغير مكلفة [3,4].

قام الباحث (Adams) وآخرون [5] بدراسة عملية حول استخدام تقنية تحليل الاهتزازات بوصفها طريقة فحص لإتلافية في تخمين مدى استقامة الأجزاء الميكانيكية الدوارة التي تتضمن شقوق ولتحديد أعماق ومواقع هذه الشقوق. توصل الباحث إلى وجود توافق بين الأضرار الحقيقية والأجزاء ذات الأضرار المتنبأ عنها.

درس الباحثان (Dimarogonas and Massouos) [6] نظرية حول تأثير الشق على السلوك الديناميكي لعمود دوار في حالة الالتواء فضلاً عن دراسة تأثير عامل المرونة الموقعية في منطقة الشق من خلال قياس التردد الطبيعي الأول، واستنتج الباحثان أن الاهتزاز الطبيعي في حالة الالتواء يتأثر بوجود الشق من خلال ملاحظة نقصان في قيم الترددات.

درس الباحثان (Davis and Mayes) [4] تأثير الشق على السلوك الديناميكي لنظام العمود الدوار المتعدد والمثبت على محامل متعددة (Multi- Shaft and Multi- bearing) فضلاً عن دراسة تأثير الإجهاد الديناميكي في منطقة الشق للعمود الدوار والمتضمن شقاً. توصل الباحثان بأن السلوك الديناميكي لعمود دوار وتحت تأثير عزم الانحناء في منطقة الشق يعتمد على السرعة الدورانية للعمود وعلى عمق الشق.

أنجز الباحثان (Rajab and Al-Sabeeh) [7] دراسة حول تأثيرات المرونة الموقعية في منطقة الشق لعمود من نوع (تيموشينكو) لغرض التنبؤ بموقع الشق وعمقه عن طريق تطوير تحاليل رياضية، استنتج الباحثان أن التغير في أول الترددات الطبيعية يعد كافياً لتقدير الشق.

درس الباحث (Papadopoulos) [8] ظاهرة الاهتزاز لعمود دوار متضمن شق من النوع المستعرض في حالة الالتواء عن طريق تمثيل نموذجاً للشق باستخدام المصفوفات لحساب المرونة الموقعية نظرياً وإجراء القياسات عملياً. واستنتج الباحث بتطابق الطريقتين في إيجاد قيم المرونة الموقعية وكذلك في إيجاد وتمثيل أول ثلاث قيم من الترددات الطبيعية مع موقع وعمق الشق.

أما في الدراسة الحالية فقد تم استخدام أعمدة ذات أقطار وأطوال مختلفة مع استخدام محامل متنوعة حسب قطر العمود، إذ تم تثبيت العمود على محامل (Bearings) في كلتا نهايتيه مع إحداث شقوق مستعرضة في ثلاثة مواقع مختلفة على امتداد العمود الدوار.

إن الهدف من هذا البحث، هو دراسة الكشف والتنبؤ عن مواقع وأعماق التشققات في الأعمدة الدوارة بأسلوب تحليل مديات الاهتزازات عن طريق ملاحظة التغيرات الحاصلة في قيم الترددات الطبيعية، فضلاً عن دراسة تأثير أقطار وأطوال هذه الأعمدة على الخصائص الاهتزازية. إذ تم تصميم نموذج عملي لتحليل الخصائص الاهتزازية للعمود الدوار وبالتالي مقارنتها مع النتائج النظرية.

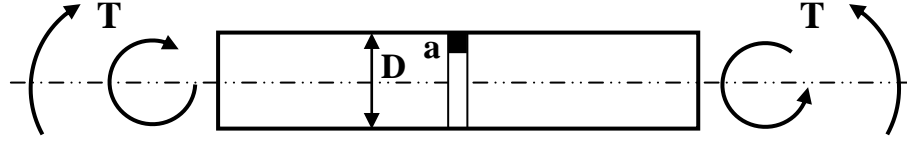
٢. التحليل الرياضي

٢-١ حساب قيمة الترددات الطبيعية للأعمدة الدوارة (ω_0) :

لأجل دراسة تأثير أعماق ومواقع الشقوق على الخصائص الاهتزازية للأعمدة الدوارة، فإنه يتطلب معرفة قيم الترددات الطبيعية لتلك الأعمدة قبل إحداث التشققات. وتم حساب هذه القيم نظرياً لدراسة تأثير كل من طول وقطر العمود على الخصائص الاهتزازية، إذ استخدم ثلاث أعمدة مختلفة الأقطار (8 و 10.5 و 12 ملم) ولكل قطر من هذه الأقطار تم استخدام ثلاثة أطوال مختلفة (500 و 600 و 700 ملم). ولحساب قيمة هذه الترددات الطبيعية تم استخدام المعادلة (1) [9]، وذلك لغرض تخمين التردد الطبيعي الأساسي اعتماداً على حالة التثبيت للعمود.

$$\omega_0 = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \dots\dots\dots (1)$$

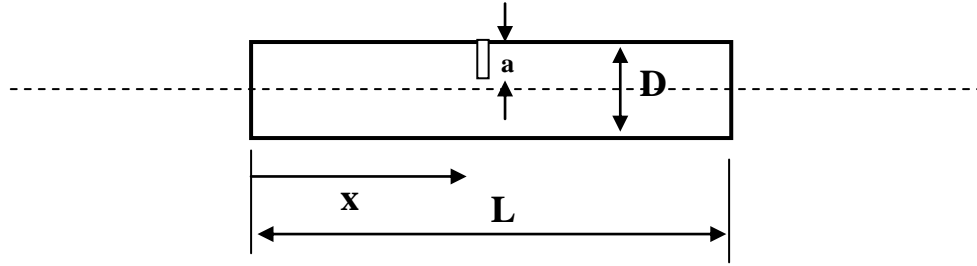
والشكل (١) يوضح حالة العمود المتعرض إلى حالتي التحميل (الانحناء والالتواء).



شكل (١) حالة العمود المتعرض إلى حالتي الانحناء والالتواء

٢-٢ النموذج الرياضي للشق

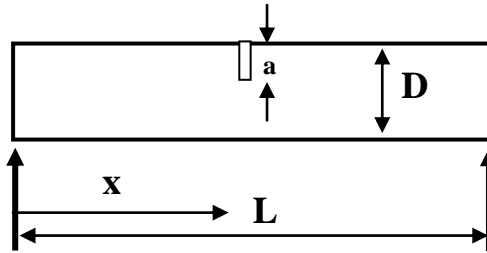
تمت دراسة تأثير مواقع وأعماق الشقوق المستعرضة على الخصائص الاهتزازية باعتبار أن عمق الشق هو (a) في عمود قطره (D) وفي موقع (x/L) من طول العمود كما موضح في الشكل (٢). والشكل (٣) يمثل حالة تثبيت العمود الدوار.



(٢)

شكل

مقطع الشق في العمود الدوار



الدوار

شكل (٣) حالة تثبيت العمود

٣. الخطوات العملية

٣-١ عينات الاختبار

لغرض إجراء التجارب، تم استخدام معدن صلب متوسط الكربون (Mild Steel) بنسبة كربون (٠.١٢٥%) والجدول (١) يوضح المواصفات الميكانيكية والفيزيائية لمعدن الأعمدة المستخدمة للجانب العملي في البحث.

جدول (١) المواصفات الميكانيكية والفيزيائية للأعمدة الدوارة

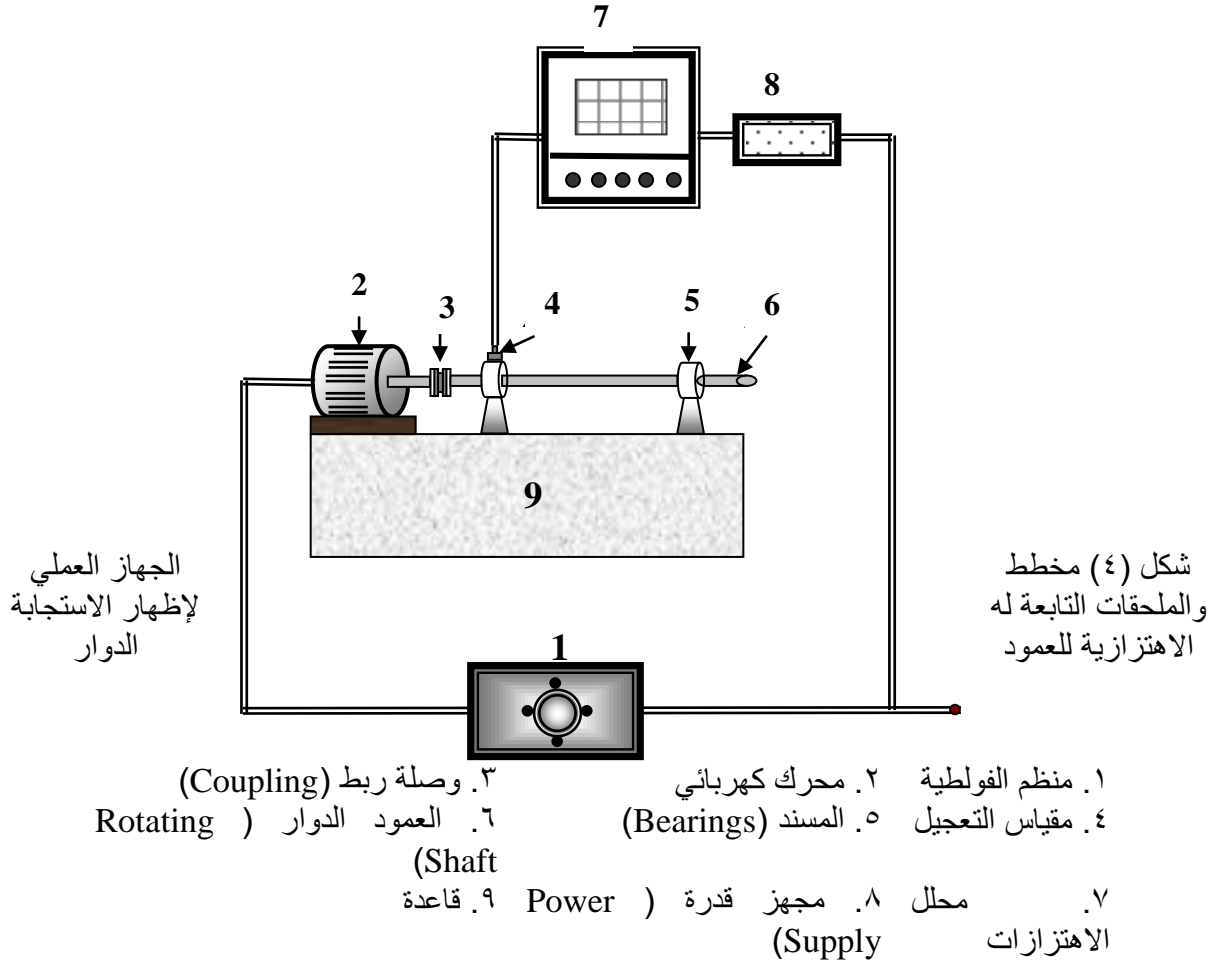
قطر العمود (D)	8, 10.5, 12	(mm)
طول العمود (L)	500, 600, 700	(mm)
الكثافة (ρ)	7800	(Kg/m ³)
معامل يونج للمرونة (E)	207	(GN/m ²)
حد المرونة (σ_y)	279.95	(MN/m ²)
النسبة المئوية للاستطالة	28	(%)

٣-٢ جهاز الاختبار

إن الجهاز المختبري المستخدم مكون من عدة أجهزة قياس وأجهزة تحكم وكما هو موضح في الشكل (٤)، وتم أخذ القراءات من خلال جهاز محلل الاهتزازات (Vibration Analyzer Type 2515) وملحقاته، إذ أن أعمدة الدوران تثبتت على اثنين من المحامل (Bearings) ذي أقطار مختلفة وحسب قطر العمود المستخدم، في حين تثبتت هذه المحامل على قاعدة حديدية متزنة وذات استقامة جيدة، حيث إن هذه المحامل لديها الحرية في الحركة على القاعدة الحديدية قبل التثبيت في المواقع المطلوبة وحسب أطوال الأعمدة.

تم تصميم قاعدة للمحرك الكهربائي لتثبيته وعلى نفس استقامة المحامل، واستخدم وصلة ربط مرنة (Flexible Coupling) لربط المحرك الكهربائي بالعمود الدوار ولمنع حدوث حالة الالتواء (Torsion). بعد الانتهاء من عملية التصميم والتثبيت تم تدوير العمود من خلال دوران المحرك الكهربائي المربوط به مباشرة بوساطة وصلة الربط، استفيد من جهاز منظم الفولطية الذي يغذي المحرك الكهربائي بالفولطية المطلوبة للتحكم في سرعته، وقياس السرعة الدورانية تم الاستعانة بأجهزة قياس السرعة.

وبعد تدوير العمود بالسرعة المطلوبة تمت عملية قياس الاستجابة الاهتزازية للعمود بوساطة جهاز محلل الاهتزازات لإجراء تحليل كامل لمديات الاهتزازات المنبعثة من اهتزاز العمود من خلال النقاط الإشارات بوساطة استخدام المجس (مقياس التعجيل) (Accelerometer) الذي يكون إحدى نهايته متصلاً بصورة مباشرة مع الجهاز، أما النهاية الثانية والتي تمثل جسم المجس فقد تم تثبيته في أقرب نقطة (بشكل عمودي) من العمود الدوار على المحامل (Bearings).



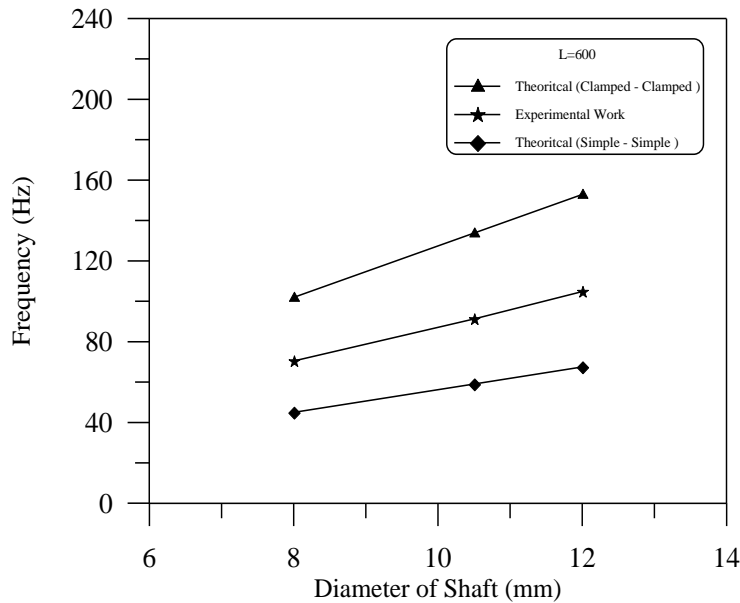
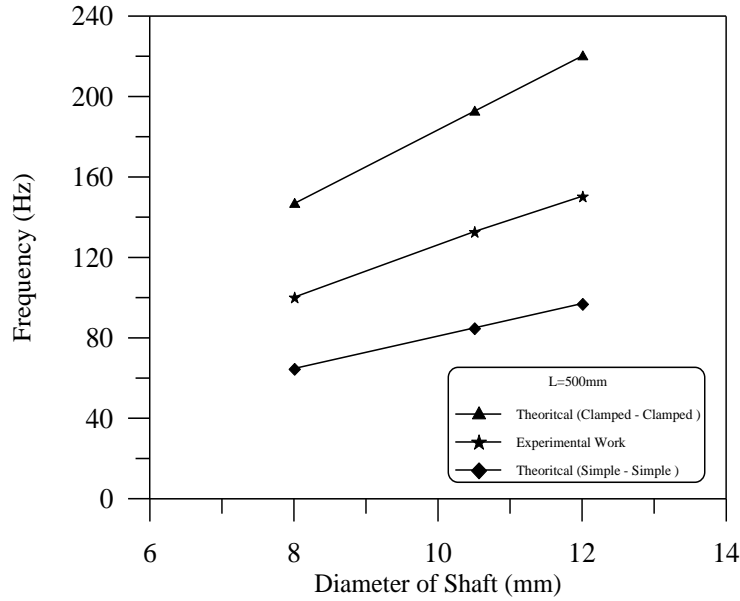
٣-٣ طريقة الاختبار

بعد الانتهاء من عملية تحضير الأعمدة، دُور العمود بواسطة المحرك الكهربائي الى السرعة المطلوبة بالاستفادة من جهاز منظم الفولتية. بعد تدوير العمود وبالسرعة المطلوبة والتي تم تسجيلها، تمت عملية قياس مديات الاهتزازات بواسطة جهاز محلل الاهتزازات (Vibration Analyzer Type 2515)، إذ يقوم هذا الجهاز بتحليل كامل مديات الاهتزازات وعلى شكل طيف موجي حيث يعتمد مبدأ عمله على تحليل الموجات الاهتزازية المنبعثة عن اهتزاز العمود الدوار باستخدام المعادلات الرياضية والمتمثلة بتحويلات فورير السريعة الموجودة ضمنياً داخل الجهاز وبوساطة استخدام دوائر إلكترونية رقمية مبرمجة دقيقة موضعاً قيم الترددات الناتجة على الشاشة الرقمية من خلال النقاط الإشارات بواسطة المجس الذي يكون مثبتاً على جسم المحمل، علماً أن الجهاز يملك مضخم (Amplifier) ذاتي للذبذبات. بعد قياس التردد الطبيعي للعمود تم إحداث شق مستعرض في العمود وبعمق معين بواسطة استعمال منشار يدوي صغير الحجم وذو سمك صغير جداً (٠.٢٥) ملم وأعيدت عملية قياس التردد الطبيعي للعمود مع وجود الشق وبنفس السرعة الأولى قبل إحداث الشق واستمرت عملية زيادة عمق الشق بقيمة (0.5) ملم لكل نسبة عمق الشق الى قطر العمود (a/D).

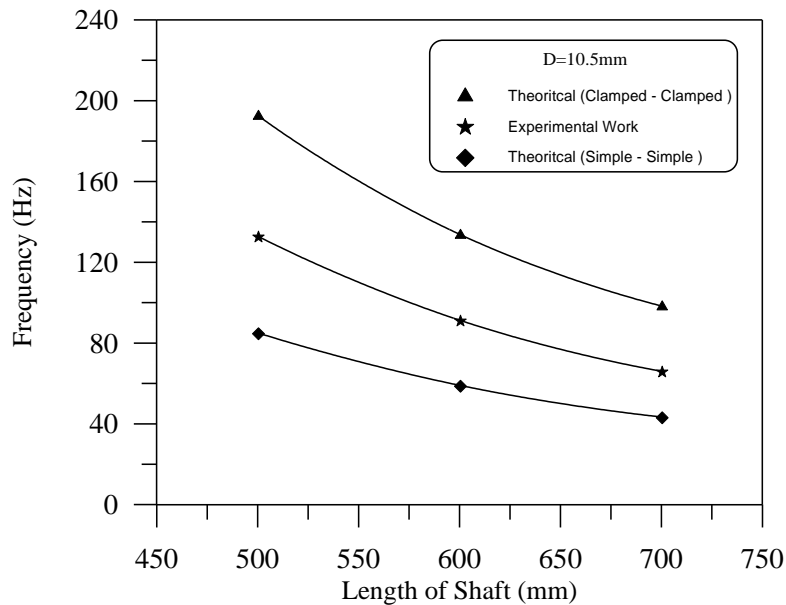
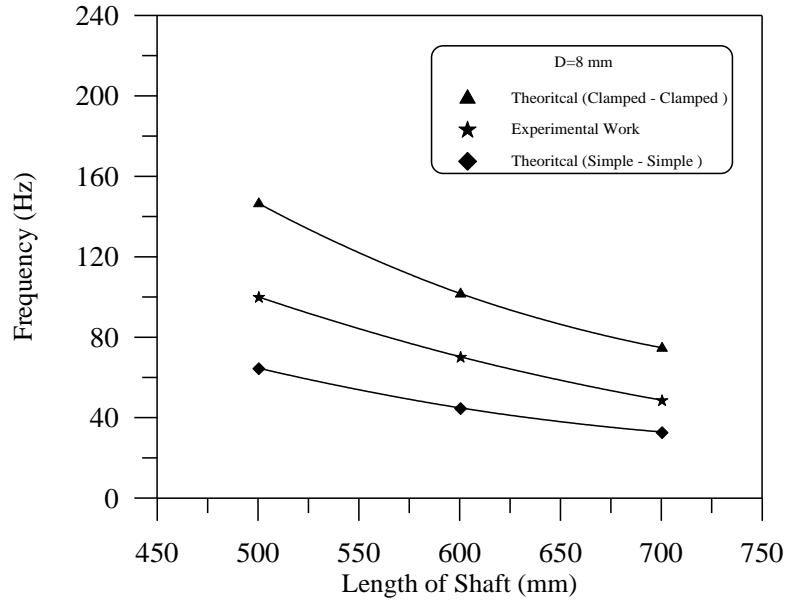
٤. النتائج والمناقشة

٤-١ تأثير قطر العمود وطوله على الخصائص الاهتزازية

لغرض معرفة قيم الترددات الطبيعية بعد إحداث الشقوق في الأعمدة الدوارة، يتطلب معرفة قيم الترددات للأعمدة المستخدمة قبل إحداث الشق، فكان لعامل القطر والطول للعمود المستخدم الأثر الواضح في تغير الترددات الطبيعية. إذ أن استخدام ثلاثة أعمدة ذو أقطار مختلفة وكل قطر ذو ثلاثة أطوال مختلفة أعطى التأثير الواضح في تغير قيم الترددات الطبيعية لتلك الأعمدة مع كل قطر وطول مستخدمين. فقد تم رسم الأشكال (٥ و٦) لتوضيح سلوك تغير الترددات الطبيعية من الناحية الرياضية والعملية، فالشكل (٥) يوضح الزيادة الحاصلة في قيم الترددات الطبيعية مع زيادة قطر العمود الدوار أما الشكل (٦) فيوضح النقصان الحاصل في قيم الترددات الطبيعية مع زيادة طول العمود الدوار، النتائج العملية أعمدت عليه لكونه تمثل نتائج وسطية بين حالتَي التثبيت المفروضة في العمل الحالي.



شكل (٥) تغير التردد الطبيعي الأساسي مع قطر العمود



شكل (٦) تغير التردد الطبيعي الأساسي مع طول العمود

٢-٤ تأثير أعماق ومواقع الشقوق على الخصائص الاهتزازية

الجدول من (٢-٣) تبين النتائج العملية لقياس الترددات الطبيعية بعد إحداث الشق المستعرض في ثلاثة مواقع مختلفة وللأعمدة ذات قطرين مختلفين . نلاحظ بأن نسب الترددات تنخفض مع ازدياد نسبة عمق الشق وبالاعتماد على موقع الشق.

ولغرض التنبؤ والكشف عن أعماق ومواقع الشقوق باستخدام أسلوب تحليل مديات الاهتزازات بعد إحداث الشق المستعرض في العمود الدوار رسمت المنحنيات التوضيحية والمبينة في الشكل (٧) الموضح فيه سلوك نسب الترددات الطبيعية وتغيرها مع وجود الشق، إذ نلاحظ انخفاضاً في نسبة (ω/ω_0) مع ازدياد في نسبة عمق الشق $(2a/D)$ اعتماداً على موقع الشق. فعند إحداث شق في موقع قريب من موقع تثبيت العمود على المحامل أي عندما $(x/L=0.1)$ نلاحظ أن نسبة الانخفاض في الترددات الطبيعية قليلة جداً ولكلا الشكلين، ومع الابتعاد عن موقع التثبيت والاقتراب نحو موقع في منتصف مسافة العمود تبين أن هناك انخفاض عالي في نسب الترددات الطبيعية مع زيادة نسبة عمق الشق، وهذا ما تم ملاحظته في موقع الشق عندما $(x/L=0.5)$.

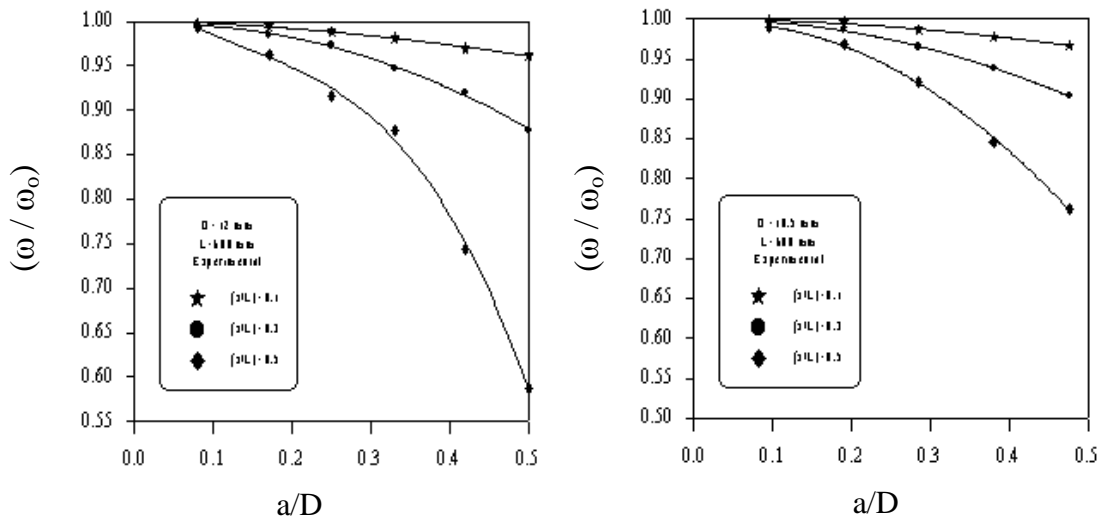
جدول (٢) النتائج العملية لنسب الترددات الطبيعية الأساسية للعمود الدوار بطول (600) ملم وقطر (10.5) ملم

نسبة موقع الشق (x/L)			نسبة عمق الشق (2a/D)
(x/L)=0.5	(x/L)=0.3	(x/L)=0.1	
نسبة التردد الطبيعي الأساسي العملي (ω/ω_0)			
0.9890	0.9956	0.9978	0.095
0.9692	0.9868	0.9956	0.190
0.9078	0.9649	0.9868	0.285
0.8464	0.9385	0.9780	0.380
0.7631	0.9035	0.9671	0.476

جدول (٣) النتائج العملية لنسب الترددات الطبيعية الأساسية للعمود الدوار بطول (600) ملم وقطر (12) ملم

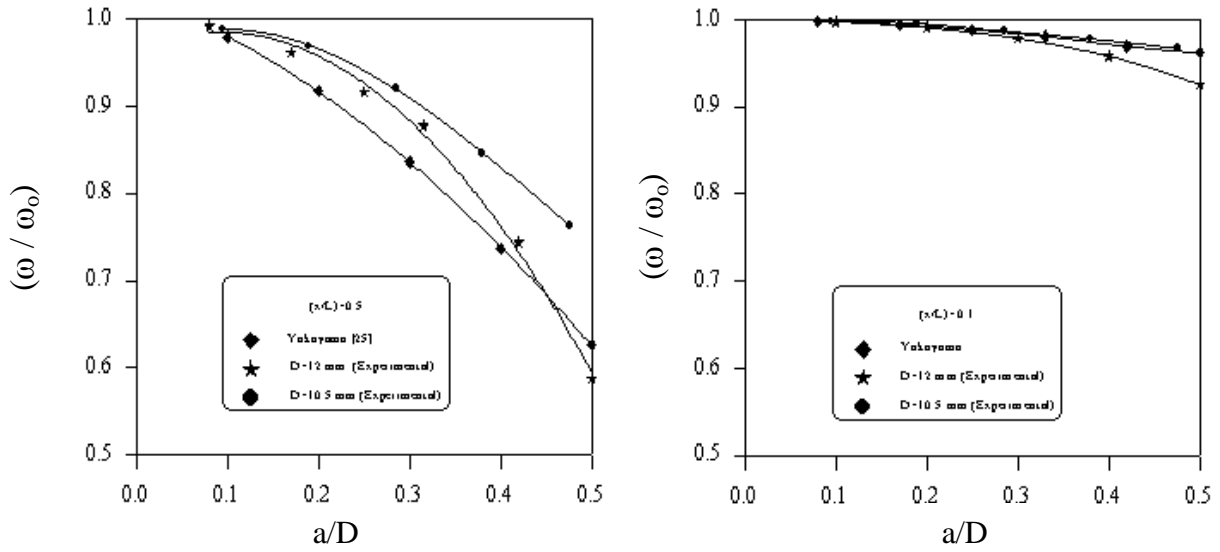
نسبة موقع الشق (x/L)			نسبة عمق الشق (2a/D)
(x/L)=0.5	(x/L)=0.3	(x/L)=0.1	
نسبة التردد الطبيعي الأساسي العملي (ω/ω_0)			
0.9923	0.9962	0.9980	0.08
0.9618	0.9847	0.9943	0.17
0.9160	0.9732	0.9885	0.25
0.8778	0.9465	0.9809	0.33
0.7442	0.9198	0.9694	0.42
0.5877	0.8778	0.9618	0.50

شكل (٧) نسبة تغير التردد الطبيعي مع عمق الشق

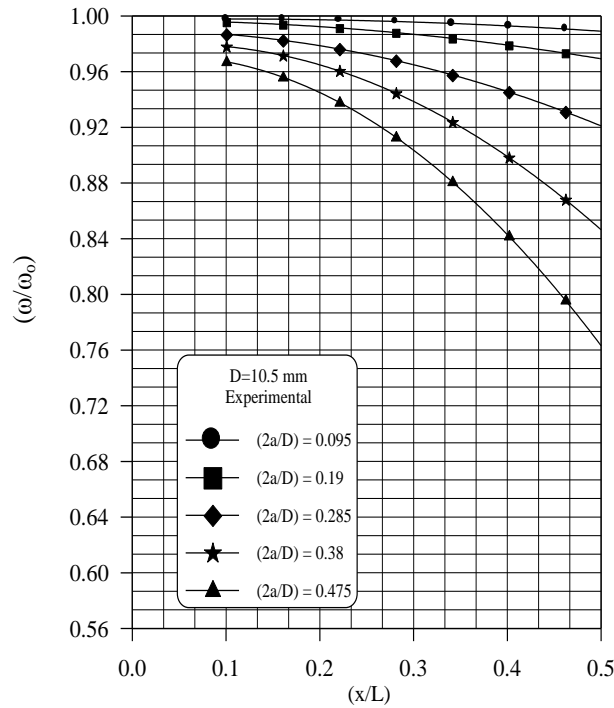


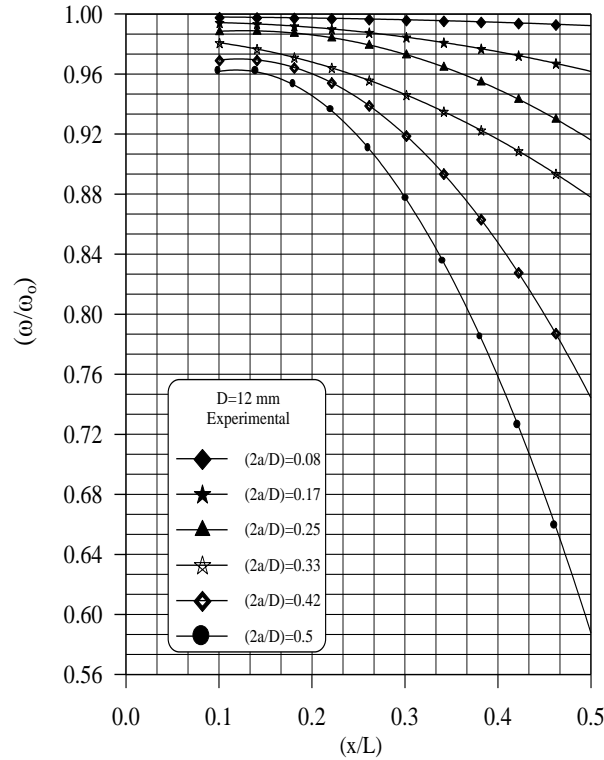
ولأجل التأكد من سلوك هذه المنحنيات ولنسب مواقع مختلفة للشق مع نسبة الترددات، فقد لوحظ أن سلوك المنحنيات للنتائج العملية كانت مماثلة لما توصل إليها الباحث^[12] والمبينة في الشكل (٨)، فيما يخص الشكل (٩) فقد تم رسم هذه المنحنيات لغرض التنبؤ بموقع الشقوق وبالاعتماد على نسبة الترددات والتي توضح علاقة نسبة الترددات مع

نسبة موقع الشق (x/L)، إذ نلاحظ أن نسبة الترددات تنخفض قيمتها مع ازدياد نسبة موقع الشق في العمود ولأعماق مختلفة.



شكل (٨) مقارنة النتائج العملية لتغير نسبة التردد الطبيعي مع عمق الشق مع نتائج الباحث [12]



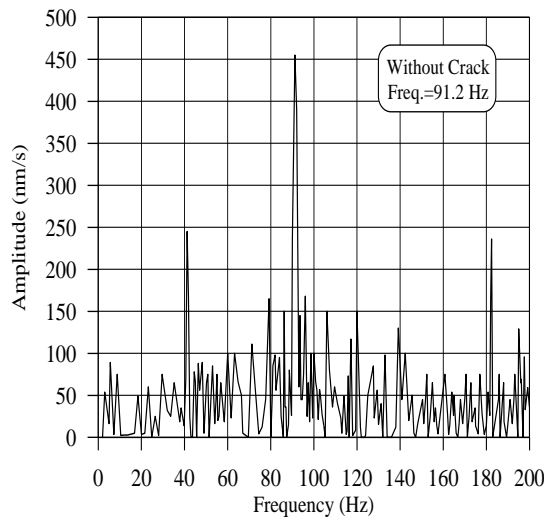


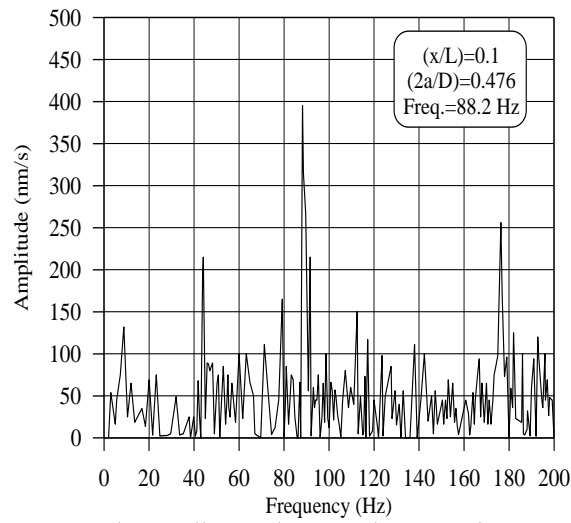
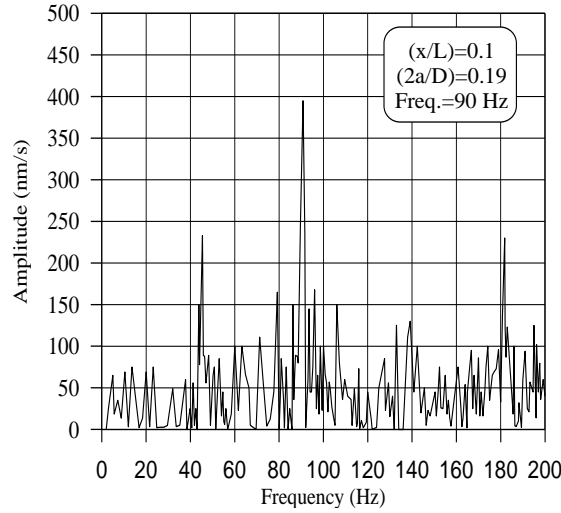
شكل (٩) التنبؤ بموقع الشق بالاعتماد على نسبة التردد الطبيعي ولأعماق مختلفة

٣-٤ تحليل مديات الاهتزازات

إن تحليل مديات الاهتزازات يعتمد على الإشارات الاهتزازية المقاسة بواسطة محلل الاهتزازات ومقياس التعجيل، لذلك فإن دقة الإشارة تعتمد على دقة الأجهزة المستخدمة. الأشكال من (١٠ و١٢) توضح العلاقة بين سعة الاهتزاز (Amplitude) مقاساً بوحدة السرعة ($\mu\text{m}/\text{sec}$) والتردد بالهرتز (Hz) المبينة فيها المخططات الطيفية لاهتزاز العمود الدوار لقياس الترددات الطبيعية قبل وبعد إحداث الشق في ثلاثة مواقع مختلفة مع تغيير عمق الشق، حيث تم اختيار المديات الخطية للسرعة والتردد في شاشة العرض لمحلل الاهتزازات.

الشكل (١٠) يمثل المخطط الطيفي لقياس التردد الطبيعي لعمود دوار ذو قطر (10.5) ملم وطول (600) ملم قبل وبعد إحداث أي تشقق، إذ يلاحظ أن قيمة التردد الطبيعي قبل إحداث تشقق هو (91.2) هرتز والتي تمثل أعلى ذبذبة وهذه القيمة مقاربة للقيمة النظرية (92.175) هرتز التي تم حسابها باستخدام معادلة (١).

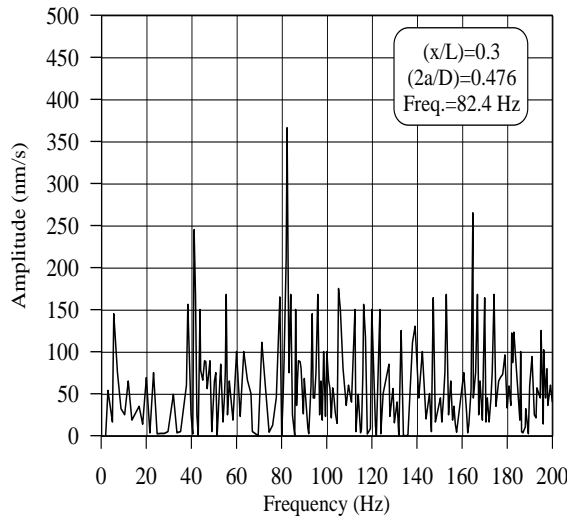
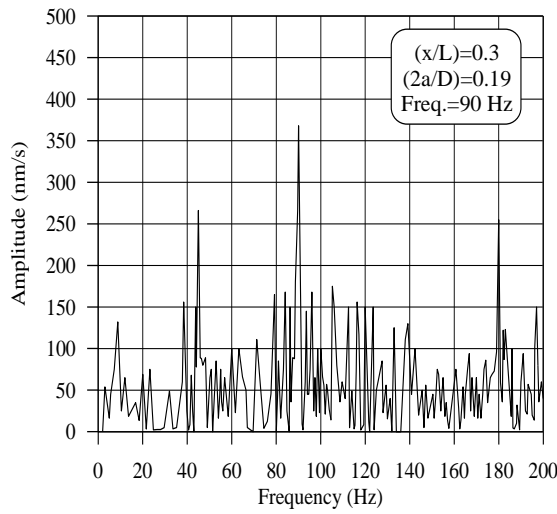
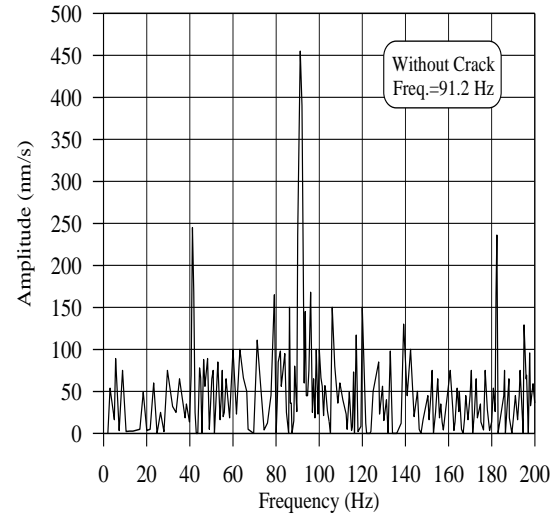




شكل (١٠) المخطط الطيفي للعمود للدوار

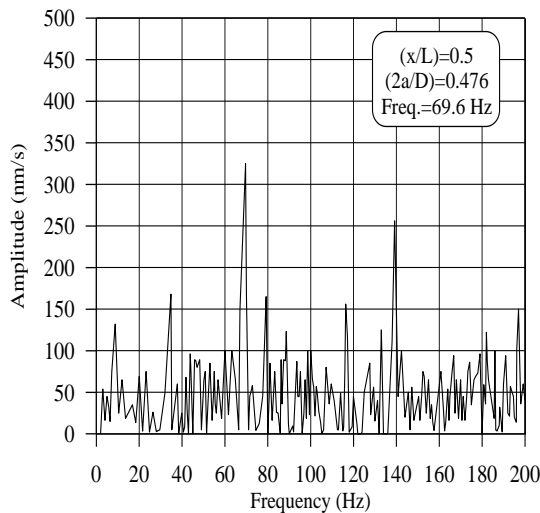
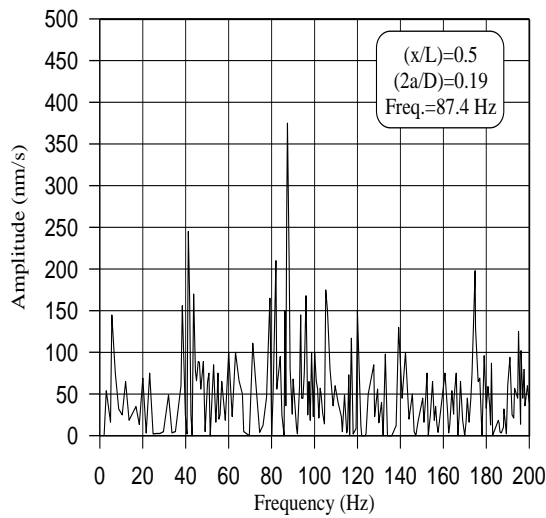
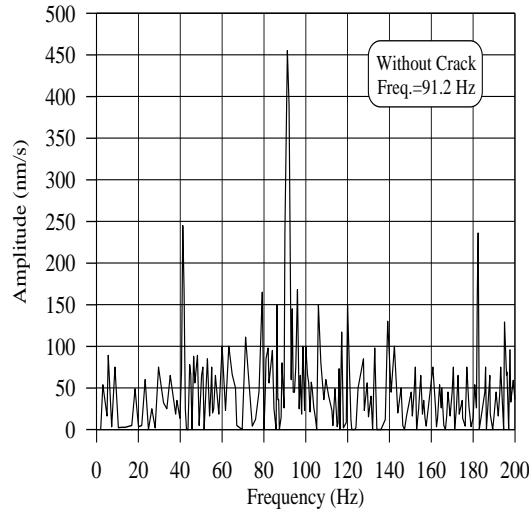
أما بالنسبة لبقية الذبذبات فهناك ذبذبات قيمة إحداهما تقارب نصف قيمة التردد الأساسي والتي تسمى (Sub-harmonic) التوافقية الثانوية. أما الذبذبة الثانية والتي قيمتها تقارب ضعف قيمة التردد الأساسي والتي تسمى (Harmonic) فتمثل التوافقية الأولى، فضلاً عن وجود ذبذبات أخرى ذات ارتفاعات مختلفة والتي هي عبارة عن ضوضاء (Noise)، إذ أن أعلى سعة للذبذبات تحدد مقدار التردد لاهتزاز العمود، كما أن الشكل يوضح المخططات الطيفية لقياس التردد الطبيعي للعمود الدوار بعد إحداث الشق في موقع ($x/L=0.1$) من طول العمود ولعمقين مختلفين من أعماق الشق.

أما الشكل (١١) فيوضح المخططات الطيفية للعمود الدوار بعد إحداث شق في موقع ($x/L=0.3$) من طول العمود وعند مقارنة هذا الشكل مع الشكل (١٠) نلاحظ انخفاضاً واضحاً في قيم الترددات الطبيعية نتيجة التأثير الكبير لزيادة عمق الشق ولنفس العمقين.



شكل (١١) المخطط الطيفي للعمود الدوار

وعند إمعان النظر في الشكل (١٢) نلاحظ أن قيمة التردد الطبيعي قد انخفضت (زحفت نحو اليسار) وبشكل كبير نتيجة لتأثر هذا الموقع للشق بالزيادة الحاصلة في عمق الشق، وعليه تبين أن المواقع البعيدة للتشققات من مواقع تثبيت العمود يكون فيها الانخفاض عالي في الترددات وبالتالي فإن هذا الأسلوب مؤشر للتنبؤ بموقع الشق.



شكل (١٢) المخطط الطيفي للعمود الدوار

٥. الاستنتاجات

أولاً: حدوث الشق في العمود الدوار يسبب انخفاض في قيم الترددات وهذا ما تم التحقق منه في الدراسة المقدمة حيث أجريت الحسابات للأعمدة الثلاثة بشكل نظري ومن ثم تمت مقارنتها مع نتائج الجانب العملي، وعليه فقد بينت المقارنة حصول تطابق قريب جداً بين هذه القيم. لذا فبالإمكان التنبؤ والكشف عن موقع وعمق الشق في الأعمدة الدوارة وذلك بتغيير قيمة الترددات لها.

ثانياً: أن الانخفاض في نسبة الترددات ولأعلى نسبة عمق الشق ($2a/D=0.5$) كانت ($\omega/\omega_0=0.9671$) عند موقع الشق ($x/L=0.1$)، كما أن الانخفاض في نسبة الترددات لأعلى نسبة عمق الشق للعمود ($2a/D=0.5$) وصل الى ($\omega/\omega_0=0.5877$) عند موقع الشق ($x/L=0.5$). وعليه فعند حدوث شقوق في مواقع مختلفة على العمود لوحظ زيادة في انخفاض قيم الترددات الطبيعية كلما ابتعدنا عن موقع تثبيت العمود على المحامل باتجاه منتصف العمود.

٦. المصادر

1. Young, S. L., and Myung-Jee, C., “*A Study on Crack Detection Using Eigen-Frequency Test Data*”, Journal of Computer and Structures, Vol. 77, 2000, pp. 327-342.
2. Kam, T. Y., and Lee, T. Y., “*Crack Size Identification Using an Expand Mode Method*”, Journal of International Journal of Solids & Structures, Vol. 31(7), 1994, pp. 925-940.
3. Bahera, A. K., and Parhi, D. R., “*Vibrational Analysis of Cracked Rotor in Viscous Medium*”, Journal of Vibration & Control, Vol. 6, 2000, pp. 331-348.
4. Davies, W. G. R., and Mayes, I. W., “*The Vibrational Behavior of Multi-Shaft, Multi-Bearing System in the Presence of a Propagating Transverse Crack*”, Journal of Transaction of the ASME, Vol. 106, 1984, pp. 146-153.
5. Adams, R. D., et. al., “*A Vibration Technique for Non-Destructively Assessing the Integrity of Structures*”, Journal of Mech. Eng. Science, Vol. 20, No. 2, 1978, pp. 93-100.
6. Dimarogonas, A., and Massouros, G., “*Torsional Vibration of a Shaft with Crack*”, Journal of Eng. Mech. Fracture, Vol. 15, No. 4, 1981, pp. 439-444.
7. Rajab, M. D., and Al-Sabeeh, A., “*Vibration Characteristics of Cracked Shafts*”, Journal of Sound & Vibration, Vol. 3, No. 147, 1990, pp. 465-473.
8. Papadopoulos, C. A., “*Torsional Vibration of Rotors with Transverse Surface Cracks*”, Journal of Computers and Structures, Vol. 51(6), 1994, pp. 713-718.
9. Thomson, W. T., “*Theory of Vibration with Application*”, 2nd Edition, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs NJ 07632, U.S.A, 1981.
10. Hearn, E. J., “*Mechanics of Materials*”, 2nd Edition, Pergamon International Library, U.K, 1989.
11. Nisitani, H., and Noda, N., “*Stress Concentration of a Cylindrical Bar with a V-Shaped Circumferential Groove under Torsion, Tension, or Bending*”, Journal of Eng. Fractures Mech., Vol. 20, No. 5/6, 1984, pp. 743-766.

12. Yokoyama, T., and Chen, M. C., “*Vibration Analysis of Edge-Cracked Beams Using a Line-Spring Model*”, Journal of Engineering Fracture Mechanics, Vol. 59, No.3, 1998, pp. 403-409.

الرموز المستخدمة

الرمز	التعريف	الوحدة
ω_0	التردد الطبيعي عند عدم وجود الشق	هرتز
ω	التردد الطبيعي عند وجود الشق	هرتز
ρ	الكثافة	كغم/م ^٣
λ_n	معامل التردد	-
ν	نسبة بويسن	-
A	مساحة المقطع العرضي للعمود	م ^٢
A	عمق الشق	ملم
D	قطر العمود	ملم
E	معامل المرونة	نيوتن/م ^٢
I	العزم الثاني للمساحة	م ^٤
L	طول العمود	ملم
M	العزم الانحنائي	نيوتن . م
R_1, R_2	قوى رد الفعل	نيوتن
T	عزم الدوران	نيوتن . م
t	سمك الشق	ملم
X	موقع الشق	ملم
$2a/D$	نسبة عمق الشق الى قطر العمود	-
x/L	نسبة موقع الشق الى طول العمود	-