Estimating of the Reliability function for the Poisson distribution using Simulation

تقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون بإستخدام المحاكاة

أ.د عبد الحسين حسن حبيب الطائي   زينب محمد باقر صادق الباقر
كلية الإدارة والاقتصاد – قسم الإحصاء
بحث مستل من رسالة ماجستير   zainabalbaqer@yahoo.com

المستخلص

تم في هذا البحث مقارنة بين أربع طرائق تقدير وهي طريقة إنحدار بواسون كطريقة إنحدار، وطريقة الإمكان الأعظم كطريقة تقليدية، وطريقة التقلص كطريقة بيزية، وطريقة كابلن- مير كطريقة لامعلمية، وتم توظيف أسلوب المحاكاة (*Simulation*) بطريقة مونت كارلو (*Mont-Carlo*) للمقارنة بين طرائق التقدير، وقد توصلت الباحثة إلى أفضلية طريقة التقلص في تقدير دالة المُعَوَّلية مقارنة مع باقي طرائق التقدير وذلك بالإعتماد على المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (*Mean square error*).

Abstract

In this study, four estimation methods were compared: the Poisson regression method as the regression method, and the Maximum Likelihood method as a Classic method, and the Shrinkage method as a Bayesian, and Kaplan-Meir method as a method of nonparametric. And the simulation style was used in the Mont-Carlo method to compare the estimation methods. The researcher found that the Shrinkage method in estimating the reliability function was better compared with other estimation methods was based on the mean square error.

المقدمة *Introduction*

لقد فرض التطور التكنولوجي إهتماماً متزايداً في دراسة أسباب العطلات والتوقفات المفاجئة التي تتعرض لها الأجهزة أو المكائن على إختلاف أنواعها إذ أن الفشل الذي قد يحدث في عمل الأجهزة أو المكائن يؤدي إلى خسائر مادية مما يؤدي إلى تزايد النفقات وإنخفاض الإنتاج.

ولا يخفى على أي باحث ما يعانيه بلدنا العزيز من مشكلات ومعوقات كثيرة ومتعددة بسبب الظروف التي يمر بها ولمدة ليست بالقصيرة مما أدى إلى إنحدار الصناعة الوطنية وتراجعها خطوات كثيرة، ومن أجل النهوض بواقع هذا القطاع الحيوي لابد من الإلتفات إلى مشاكله ومن ثم إيجاد الحلول المثلى وبالتالي محاولة الأخذ بيده ومساعدته في النهوض والوصول إلى مصاف الدول الصناعية.

فلقد تناول الكثير من الباحثين تقدير دالة المُعَوَّلية للأنظمة المختلفة وبإستخدام توزيعات مستمرة. بينما كانت التوزيعات المتقطعة أقل حظاً من التوزيعات المستمرة في التطبيقات. لذا سيتم التركيز في هذا البحث على توزيع بواسون.

الإستعراض المرجعي *Literature Review*

لقد تناول الكثير من الباحثين تقدير دالة المُعَوَّلية للأنظمة المختلفة وبإستخدام توزيعات مستمرة منها توزيع گاما (Gamma Distribution) وتوزيع ويبل (Weibull Distribution) والتوزيع الأُسي (Exponential Distribution) وتوزيع رَيلي (Rayleigh Distribution) والتوزيع الطبيعي(Normal Distribution) والتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي-Log) Normal Distribution) وغيرها من توزيعات الفشل لكونها تتصف بخاصية مشتركة وهي خاصية فقدان الذاكرة، بينما كانت التوزيعات المتقطعة أقل حظاً من التوزيعات المستمرة في التطبيقات.

ففي عام 1971 قام الباحث (Bernard) [1] بإحتساب حدود الثقة لحاصل ضرب وقسمة معلمات توزيع بواسون وكذلك إختبار الفرضيات الخاصة بها، وأجرى تطبيقات على المُعَوَّلية، فلقد افترض أن K_2, K_1 أعداد صحيحة موجبة حيث أن $K_1 + K_2 \geq 2$ وأن $X_1, X_2 \ldots X_{k1}$; $Y_1, Y_2 \ldots Y_{k2}$ متغيرات عشوائية مستقلة تتبع توزيع بواسون مع معلمات $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{k1}$; $M_1, M_2 \ldots M_{k2}$ على التوالي، فأستخرج فترات ثقة للمعلمة θ إذ أن:

$$\theta = \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{k1} \,/\, M_1, M_2 \ldots M_{k2}$$

وأختبر الفرضيات الملائمة لها.

وفي عام 1994 قام الباحث (Miller) [2] ببيان دالة الخطورة في مراحلها الثلاث من الثبات والتزايد والتناقص وذكر أن أي دالة خطورة يجب ان تحتوي شرطين وهما:

$$(i)\ h(t) \geq 0 \qquad (ii)\ \lim_{t\to\infty} \int_0^t h(x)\,dx = \infty$$

وأستمد صيغة للمُعَوَّلية من متوسط معدل الفشل.

في عام 1998 قام الباحثان (Paul & Carson) [3] بتبيان أن توزيع ويبل له دالة خطورة متزايدة مع العمر أو مع بيانات الحياة حيث ذكرا بأن تحليل بيانات الحياة (Life data) في بعض الأحيان يسمى تحليل ويبل (Waybill analysis).

في عام 2005 قام الباحث (شاهر)[4] بدراسة عمليات بواسون المتجانسة وغير المتجانسة ، واقترح دالة لمعلمة توزيع بواسون الذي يتبع عمليات بواسون غير المتجانسة وتقدير معلمات هذه الدالة بالطريقة البيانية وطريقة المربعات الصغرى ، وأجرى الباحث إختبار حسن المطابقة بين نماذج المربعات الصغرى بأنواعها الخطية والتربيعية والأسية بإستخدام متوسط الخطأ النسبي المطلق (MAPE) وبالإعتماد على أسلوب المحاكاة ، وتوصل إلى أن الأنظمة القابلة للإصلاح غالباً ما تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة لأنها تعتمد على معلمة توزيع متغيرة عبر الزمن وأن في عمليات بواسون المتجانسة يكون التزايد في عدد مرات الفشل تزايداً غير منتظماً.

وفي العام نفسه 2005 قام الباحثان (Mettas & Zhao) [5] بدراسة عن عمليات بواسون المتجانسة وغير المتجانسة وإستخدام طريقة الإمكان الأعظم في تقدير المعلمة لمجموعة من البيانات تتبع توزيعاً متقطعاً وعندما يكون عدد العطلات معلوماً وفي فترة زمنية محددة ووقت الفشل (عطل الماكنة) الفعلي غير معلوم.

وفي عام 2014 قام الباحثان (Adil H. Khan & T R. Jan) [6] بتقدير دالة المُعَوَّلية لإثنين من التوزيعات المتقطعة وهما توزيع بواسون العام (Generalized Poisson distribution) والتوزيع الهندسي العام (Generalized Geometric distribution) ، إذ افترض أن المتغير العشوائي يتبع توزيع بواسون العام إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له بالشكل الآتي وبمعلمتين هما β, λ :

$$P(X=x) = \frac{\lambda^x (1+x\beta)^{x-1} e^{-\lambda(\beta x+1)}}{x!} \quad , x = 0,1,2 \dots, \lambda > 0\ , 0 < \beta < \frac{1}{\lambda}$$

وفي نفس العام 2014 قام الباحثان (Al-Zahrani & Sagor) [7] بتقدير معلمة القياس والشكل ودالة المُعَوَّلية لخليط من توزيع بواسون (Poisson distribution)مع توزيع لوماكس (Lomax distribution) الذي هو حالة خاصة من توزيع باريتو العام (Generalized Pareto distribution) بإستخدام طريقة العزوم (Moment method) والإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Estimation) والتوزيع المقارب (Asymptotic Distribution).

وفي بداية عام 2016 قام الباحث (Kumar) [8] وآخرون بتقدير دالة المُعَوَّلية ودالة الخطورة لبيانات تتوزع توزيعاً بواسوني – أُسي (PED (Poisson-Exponential Data إذ كانت:

$$R(x) = \left[\frac{1-e^{-\theta e^{-\lambda x}}}{1-e^{-\theta}}\right] \qquad x > 0\ \ , \lambda > 0\ \ , \theta > 0$$

$$h(x) = \frac{\theta e^{-\lambda x - \theta e^{-\lambda x}}}{1-e^{-\theta e^{-\lambda x}}} \qquad x > 0\ \ , \lambda > 0\ \ , \theta > 0$$

إذ أن $R(x)$ تمثل دالة المُعَوَّلية و$h(x)$ تمثل دالة الخطورة.

وكان وسيط الوقت لفشل النظام (MdTSF) (Median time to system failure) كالاتي:

$$MdTSF = \frac{\log(\theta - \log(-\log(0.5+0.5e^{-\theta})))}{\lambda}$$

وكان التقدير بإستخدام مقدّر الإمكان الأعظم وتقدير بيز لدوال خسارة متماثلة وطريقة المربعات الصغرى بإستخدام إسلوب المحاكاة وطريقة مونت كارلو بالتحديد بالإعتماد على المقياس الاحصائي (MSE).

هدف البحث ***Purpose of Search***

يهدف البحث إلى المقارنة بين أربع طرائق لتقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون. وبعد إشتقاق صيغ التقدير تطبق المحاكاة لإجراء المقارنات من خلال توليد بيانات لعينات ذوات أحجام مختلفة وتكرار التجربة (*L=5000*) والمقارنة بين الطرائق بإستخدام معيارمن المعايير الإحصائية المهمة وهو متوسط مربعات الخطأ *(MSE)*.

الجانب النظري

توزيع بواسون *Poisson distribution* [9]

عُرِفَ توزيع بواسون من قبل عالم الرياضيات الفرنسي المشهور سيمون بواسون (1781-1840) (Simeon- *Denis Poisson*) ويسمى أيضاً قانون بواسون للأعداد الصغيرة وهو توزيع إحتمالي منفصل يعبر عن إحتمالية حدوث عدد من الأحداث نادرة الحدوث أو غير متوقعة يكون فيها إحتمال النجاح ضعيفاً، ضمن فترة زمنية محددة ولعدد كبير من المحاولات.

فليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد المرات التي سيحصل فيها الحدث في الفترة الزمنية T فسوف يتبع هذا المتغير التوزيع الآتي والمعروف بتوزيع بواسون:

$$P(n) = P(X = n) = \frac{e^{-\lambda}\, \lambda^{n}}{n!} \qquad n = 0,1,2,.... \qquad ... \qquad (1)$$

علماً أن λ عدد حقيقي

و $P(n)$ احتمال حصول الحدث n في الزمن T

كما أن دالة توزيع الفشل (أو دالة التوزيع التجميعية) لتوزيع بواسون تكون بالصيغة الآتية:

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{n=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!} \qquad , \quad x \ge 0 \qquad ... \qquad (2)$$

ولأن دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون $R(k)$ التي هي إحتمال عدم الفشل ل k من الحوادث المعدودة في الفترة *(0,t)* نعبر عنها بالصيغة الآتية:

$$R(k) = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\lambda t)^{n} e^{-\lambda t}}{n!} \qquad ... \qquad (3)$$

تقدير معلمة ودالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون [10]

إن عملية التقدير(*Estimation*) لعينات أي مجتمع هي تقريب للخصائص الأصلية للمجتمع الذي سُحبَت منه العينات، ويعد التقدير من المسائل المهمة في عملية الإستدلال الإحصائي (*Statistical Inferences*) إذ تكمن أهميته في تقدير معلمات المجتمع الذي يتم عن طريق إحصاءات يتم الحصول عليها من عينة تسحب من المجتمع قيد الدراسة. ولكي نقدّر دالة المُعَوَّلية هناك العديد من الطرائق وفيما يأتي شرح لطرائق تقدير معلمة التوزيع λ وتقدير دالة المُعَوَّلية:

أولاً: طريقة إنحدار بواسون [11] *Poisson regression method*

عند دراسة الأنظمة في أي منشأة صناعية نجد أن عدد مرات الفشل تتبع عمليات بواسون غير المتجانسة (*NHPP*) وفي هذه العمليات يؤخذ الزمن t على إعتبار أنه متغير مرتب (*Order Statistic*) أي أن $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ للفترة $o < t < t_n$ وعدد مرات الفشل تكون أيضاً من نوع المتغير المرتب أي أنها تبدأ من أول فشل ثم الثاني ثم الثالث ... وهكذا. وهذا يؤشر إلى وجود اتجاه عام في البيانات، وعلى إعتبار أن عدد مرات الفشل *N(t)* متغيراً معتمداً (*Dependent variable*) يعتمد في قيمه على الزمن t الذي يمكن إعتباره متغيراً مستقلاً (*Independent variable*) تكون معادلة الإنحدار الخطي بالشكل الآتي:

$$N(t) = \alpha + \beta t_i + \varepsilon_i$$

حيث ان *N(t)* عدد مرات الفشل في الزمن *t*.

ولأن *N(t)* هي عدد مرات الفشل فإن تقدير معدل الفشل لتوزيع بواسون يمكن التعبير عنه بالشكل الآتي:

$$\lambda(t) = \alpha + \beta t_i$$

لكن لهذا النموذج سلبيات وهي أن التنبؤ الخطي على يمين المعادلة ممكن إفتراضه كقيمة حقيقية وهذا يعني أن بالإمكان أن يأخذ قيم سالبة في حين أن الوسط الحسابي لبواسون في الجهة اليسرى يمثل كمية متوقعة غير سالبة، ويكون الحل البسيط لهذه المشكلة هو بأخذ اللوغاريتم للنموذج الخطي.

$$\log \hat{\lambda}\, t = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots \hat{\beta}_n x_n$$

$$\hat{\lambda} = t \exp(\hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots \hat{\beta}_n x)$$
$$= t \exp(\hat{\alpha}) \exp(\hat{\beta} x_i)$$
$$\hat{\lambda}_i = t_i \exp(x_i \acute{\beta})$$

لذلك فإن تقدير معلمة بواسون حسب انحدار بواسون تكون في الشكل الآتي:

$$\hat{\lambda}_{PR} = t\, exp(\hat{\alpha})\, ex\, p(\hat{\beta} x) \qquad ... \qquad (4)$$

كذلك يكون تقدير دالة المُعَوَّلية حسب طريقة إنحدار بواسون بالصيغة الآتية:

$$\hat{R}_{PR} = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\hat{\lambda}_{PR})^n e^{-\hat{\lambda}_{PR}}}{n!} \quad \ldots \quad (5)$$

ثانياً: طريقة الإمكان الأعظم *Maximum Likelihood method* [12] [13]

إن طريقة الإمكان الأعظم تفترض بشكل أساسي إن العينة هي تمثل كل المجتمع ونحن نختار قيمة المُقَدَّر الذي يُعظّم دالة الكثافة الإحتمالية *(Probability density function)* حيث يمكن تعريف دالة الإمكان بما يأتي:

إذا كانت $t_{1,}t_{2\ldots}t_n$ هي مفردات عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع له دالة كثافة احتمالية $f(t,\theta)$ فان دالة الإمكان الأعظم *(Maximum Likelihood function)* والتي يرمز لها بالرمز (L) هي الدالة الإحتمالية المشتركة لها أي أن:

$$L = f(t_1,\theta).f(t_2,\theta)\ldots f(t_n,\theta)$$

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i,\theta)$$

وعليه فإن دالة الإمكان الأعظم لتوزيع بواسون تكون بالشكل الآتي:

$$L(t_1,t_2\ldots t_n,\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i} e^{-\lambda}}{x_i!}$$

$$= e^{-n\lambda}\lambda^{\sum x_i}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}$$

ولغرض تقدير دالة الإمكان يجب تحويلها إلى الشكل الخطي وذلك من خلال أخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة

$$Ln\,L = -n\lambda + \sum x_i Ln\lambda - Ln\prod_{i=1}^{n} x_i$$

ولإيجاد القيمة التقديرية لمعلمة القياس λ *(Scale parameter)* والتي تجعل دالة الإمكان أعظم ما يمكن نجد المشتقة للدالة نسبةً إلى المعلمة

$$\frac{\partial Ln\,L}{\partial\lambda} = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda}$$

وبمساواة المشتقة للصفر يكون لهذه المعادلة حل واحد فقط:

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \bar{X} \quad \ldots \quad (6)$$

وهذه هي النقطة الحرجة الوحيدة، ولأن الإمكان الأعظم يتلاشى أو يقترب إلى الصفر عندما تقترب المعلمة من الصفر $(\lambda \to 0)$ أو عندما تقترب من اللانهاية $(\lambda \to \infty)$ لذلك نستنتج أنه مقدّر الإمكان الأعظم ل λ، وللتأكد من كون $\bar{x}$ هي المقدّر الأعظم نأخذ المشتقة الثانية سنجدها قيمة سالبة عند تعويض قيمة $\bar{X}$ فيها.

$$\frac{\partial_2 Ln\,L}{\partial\lambda^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda^2}$$

$$= \frac{-\sum_{i=1}^{n} x_i}{\bar{x}^2} = \frac{-n\bar{x}}{\bar{x}^2} = \frac{-n}{\bar{x}}$$

فإذا كانت $\hat{\lambda}_{MLE}$ هي مقّدر الإمكان الأعظم لمعلمة بواسون λ فإن تقدير دالة المُعَوَّلية حسب طريقة الإمكان الأعظم وبالإستناد إلى خاصية الثبات *(Invariant property)* التي تميز هذه الطريقة سوف يأخذ الصيغة الآتية:

$$\hat{R}_{MLE} = 1 - \sum_{n=0}^{k} \frac{(\hat{\lambda})^n e^{-\hat{\lambda}}}{n!} \quad \ldots \quad (7)$$

ثالثاً: طريقة التقلص Shrinkage method [14]

تُعد طريقة التقلص إحدى طرائق التقدير المعتمدة على المعلومات الأولية حيث تعتمد مقدرات التقلص على إفتراض أن المعلمات المجهولة والمطلوب تقديرها هي متغيرات عشوائية لأي توزيع معين، كما أنها تعتمد على معلمة التقلص θ وعلى مجال القبول R . ومعلمة التقلص تعني مقدار ثقة الباحث بالمعلومات الأولية، ولعدم وجود صيغة موحدة لإختيار قيمة θ لذلك فان كل باحث استطاع أن يحدد صيغة وفقا لقواعد يعتقد أنها كافية. فلقد ذهب بعض الباحثين إلى إتجاه مفاده أن هذه المعلومات الأولية عن المعلمة يمكن أن تكون القيم الإفتراضية لهذه المعلمات ولكن هذا الإتجاه غير دقيق حسب رأي البعض الآخر ويمكن إعتماد مقّدرات طرائق أخرى لهذه المعلمات تكون بعيدة عن التحيز في تحديد قيمة المعلمة لتصبح معلومات أولية.

إذن عند توفر معلومات أولية عن دالة المُعَوَّلية ($R_0(t)$) مضاف لها قيمة تقديرية ($\hat{R}(t)$) وبالإعتماد على معلمة التقلص (θ) ومن دمج المركبتين يتكون التقدير المقلص لدالة المُعَوَّلية.

إن المُقَدَّر الذي أقترحه *(Thompson)* لمقَّدرات التقلص يكون بالصيغة الأتية:

$$\hat{R}_{sh}(\mathrm{t}) = \theta\hat{R}(t) + (1-\theta)R_0(t) \qquad 0 \le \theta \le 1$$

إذ أن:

θ: معامل التقلص *(Shrinkage Coefficient)*.

$\hat{R}_{sh}(t)$: يمثل مقّدر دالة المُعَوَّلية بطريقة التقلص.

$\hat{R}(t)$: يمثل المُقَدَّر الغير متحيز لدالة المُعَوَّلية.

$\hat{R}_0(t)$: يمثل القيمة الأولية لدالة المُعَوَّلية.

ومن الممكن تحديد قيمة K التي تجعل متوسط مربعات الخطأ *(MSE)* أقل ما يمكن للمقدر $\hat{R}_{sh}$ بالإعتماد على المُقَدَّر غير المتحيز $\hat{R}$ إذ أن متوسط مربعات الخطأ لمقدر دالة المُعَوَّلية هو:

$$\begin{aligned} MSE\big(\hat{R}_{sh}(t)\big) &= E[\hat{R}_{sh}(t) - R(t)]^2 \\ &= E[(\theta\hat{R}(t) + (1-\theta)R_0(t)) - R(t)]^2 \end{aligned}$$

بإضافة وطرح *KR(t)* للصيغة أعلاه وبعد التبسيط نحصل على:

$$MSE\left(\hat{R}_{sh}(t)\right) = \theta^2 E\{\hat{R}(t) - R(t)\}^2 + (1-\theta)^2\{R_0(t) - R(t)\}^2$$

ولإيجاد قيمة θ التي تجعل متوسط مربعات الخطأ للمقدر $\hat{R}_{sh}(t)$ أقل مايمكن نجد المشتقة الجزئية للمعادلة أعلاه بالنسبة إلى θ ، فنحصل على:

$$\frac{\partial MSE(\hat{R}_{sh}(t))}{\partial\theta} = 2\theta E(\hat{R}(t) - R(t))^2 - 2(1-\theta)(R_0(t) - R(t))^2$$

وبمساواة المشتقة بالصفر نحصل على:

$$2\theta\ MSE\big(\hat{R}(t)\big) - 2(1-\theta)(R_0(t) - R(t))^2 = 0$$
$$\theta = (R_0(t) - R(t))^2/[MSE\left(\hat{R}(t)\right) + (R_0(t) - R(t))^2]$$

وعليه يكون تقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع *(Poisson)* بإستعمال طريقة التقلص، بالصيغة الاتية:

$$\hat{R}_{sh} = \theta\hat{R}(t) + (1-\theta)R_0(t) \qquad \dots \qquad (8)$$

رابعاً: طريقة كابلن – مير Kaplan Meir method [15] [16]

وهي من الطرائق اللامعلمية التي اتبعها كابلن ومير (*Kaplan and Meier* (1958)) لتقدير دالة المُعَوَّلية فهناك طريقتان الأولى يتم فيها تقدير دالة الخطورة التجميعية *H(t)* عن طريق تقدير دالة الخطورة *h(t)* ومنها التوصل إلى دالة المُعَوَّلية، أما الطريقة الثانية إستخدام دالة الكثافة التجميعية أو دالة توزيع الفشل لتقدير دالة المُعَوَّلية ودالة الخطورة.

1- أسلوب كابلن – مير الأول

- ترتيب أوقات الفشل (عدد العطلات) تصاعدياً وإعطاء كل فشل رتبة *(Rank)*.
- حساب دالة الخطورة (*(h(t)*)، حيث أن دالة الخطورة هي عبارة عن عدد العطلات مقسوم على مقدار الفترة الزمنية للإختبار $h(t) = \frac{k}{n-i+1}$.

k تمثل عدد العطلات

i الرتبة

n حجم العينة

- حساب *H(t)* حيث أن: $H(t) = [h(t_1) + h(t_2) + \cdots h(t_n)]$

- حساب دالة المُعَوَّلية $R_i(t)$ ، حيث أن: $R_i(t) = \exp(-H_i(t))$

2- أسلوب كابلن - مير الثاني

- تقدير *F(t)* التي يعتمد تقديرها على البيانات حيث أن:

$F(t) = \frac{i}{n}$ أو $F(t) = \frac{(i-0.5)}{n}$ وهي ماتسمى بدالة الكثافة التراكمية *(Symmetrical CDF)*

أو $F(t) = \frac{i}{n+1}$ وهي ماتسمى برتبة الوسط الحسابي *(Mean Rank)* أو $F(t) = \frac{(i-0.3)}{n+0.4}$ وهي ماتسمى برتبة الوسيط *(Median Rank)*.

- يمكن حساب دالة الخطورة من دالة الفشل التجميعية حيث أن:

$$h_i(t) = \frac{F_{(t+1)} - F_t}{1 - F_t}$$

- ويمكن أيضاً منها حساب دالة المُعَوَّلية التي تساوي:

$$R_i(t) = 1 - F_i(t)$$

- ومنها نحصل على $\hat{R}(t)$ بطريقة كابلن - مير:

$$\hat{R}_{(i+1)} = \prod_{i=1}^{n} R_{(i+1)}(t)\ .\hat{R}_i \quad \ldots \quad (9)$$

حيث أن $\hat{R}_i$ قيمة دالة المُعَوَّلية المقدّرة الأولى لكابلن

$\hat{R}_{(i+1)}$ قيمة دالة المُعَوَّلية المقدّرة التالية لكابلن

ولغرض معرفة اي الطرائق هي الأفضل سوف يتم إعتماد مؤشر إحصائي للمقارنة بين هذه الطرائق وهو مقياس نسبي مهم يدعى متوسط مربع الخطأ *(Mean squared error)* والذي يمكن إيجاده وفق الصيغة الآتية:

$$MSE\left(\hat{R}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{I=1}^{L}(\hat{R}_i(t) - R(t))^2 \quad \ldots \quad (10)$$

حيث ان L عدد التكرارات *(Replications)* لكل تجربة *i=1,2,…L*

$\hat{R}(t)$ مقدر $R(t)$ حسب الاسلوب المستخدم في التقدير.

الجانب التجريبي

المحاكاة *Simulation*

لغرض المقارنة بين الطرائق سنقوم بإستخدام أسلوب المحاكاة لتوليد بيانات تتوزع توزيع بواسون، وقد تم توظيف متوسط مربعات الخطأ *(MSE)* كمقياس إحصائي من أجل المقارنة بين أفضلية المقدرات. إذ تم توليد البيانات من التوزيع المنتظم وتحويلها إلى بيانات تتبع توزيع بواسون. وتتضمن صياغة إنموذج المحاكاة أربعة مراحل أساسية ومهمة لتقدير معلمة القياس ودالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون وهي على التوالي:

المرحلة الأولى:(مرحلة تعيين القيم الافتراضية للمعلمة(λ))

تُعد هذه المرحلة من المراحل المهمة والأساسية التي تعتمد عليها المراحل اللآحقة، إذ يتم تعيين قيم المعلمة الإفتراضية (الحقيقية) وكما يأتي:

أولاً: تحديد القيم الإفتراضية لمعلمة القياس

تم إختيار قيم إفتراضية لمعلمة القياس لتوزيع بواسون وبإفتراض قيمة المعلمة λ قيمة غير معلومة، وقد تم تشكيل ستة نماذج وكما مبين في الجدول (1):

الجدول (1) القيم الافتراضية للمعلمة (λ)

Model	1	2	3	4	5	6
λ	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15

ثانياً: إختيار حجم العينة n

تم إختيار حجوم مختلفة للعينة بشكل يتناسب مع معرفة مدى تأثير حجم العينة على دقة وكفاءة النتائج المستحصلة من طرائق التقدير المستخدمة في هذه الدراسة وتم أخذ حجمي عينة صغيرة هما (n=10,20)، وحجم عينة متوسطة واحدة هي (n=30) وكذلك حجمي عينة كبيرة هما(n=40,50).

ثالثاً: إختيار تكرار التجربة

تم إختيار تكرار لهذه التجارب مساوياً إلى (L=5000) لكل تجربة.

رابعاً: تعيين عدد العطلات

تم أخذ خمس قيم للعطلات التي يتم من خلالها تقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون وهي (k=1,2,3,4,5) عطل.

المرحلة الثانية :(مرحلة توليد البيانات)

وهي مرحلة إختيار القيم الإفتراضية، إذ تُعَّد من المراحل المهمة التي تعتمد المراحل الأخرى عليها، وفي هذه المرحلة يتم توليد المتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون ذو المعلمة الواحدة وفق طريقة مونت كارلو كما يأتي:

1- ليكن X متغير عشوائي يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ بدالة كتلة إحتمالية:

$$P_j = P(X = x_j) = \frac{\lambda^x}{x_j!} e^{-\lambda} \qquad j = 0,1,2,\ldots \qquad \ldots \qquad (11)$$

2- يتم توليد الأعداد العشوائية التي تتبع التوزيع المنتظم (*Uniform Distribution*) المستمر المعرف على الفترة (0,1).

3- فإن قيمة المتغير العشوائي تكون $(X = x_j)$ إذا كان:

$$\sum_{j=0}^{i-1} P_j \le U < \sum_{j=0}^{i} P_j \qquad , i = 0,1,2,\ldots n \qquad \ldots \qquad (12)$$

المرحلة الثالثة: (مرحلة إيجاد المُقَدَّرات)

في هذه المرحلة يتم تقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون $R(k)$ وكالآتي:

$$\hat{R}(k) = \frac{\sum_{i=1}^{L} \hat{R}_j(k)}{L} \qquad \ldots \qquad (13)$$

حيث أن $\hat{R}_j(k)$ مقدّر دالة المُعَوَّلية *R(k)* بحسب الأسلوب المستخدم في التقدير، أما بالنسبة لطريقة التقلص فلقد تم إعتماد القيمة الحقيقية المفترضة لدالة المُعَوَّلية كقيمة أولية ($R_\circ$) .

المرحلة الرابعة:(مرحلة المقارنة)

هي مرحلة المقارنة بين المقدّرات التي تم ايجادها في المرحلة الثالثة، بإستخدام المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ (*MSE*) للمقدّر $\hat{R}(k)$ وهو عبارة عن التباين مضافاً إليه مربع التحيز وهو مؤشر عام للمقارنة بين كفاءة المقدّرات وحسب المعادلة

$$MSE\left(\hat{R}(t)\right) = \frac{1}{L}\sum_{I=1}^{L}(\hat{R}_i(t) - R(t))^2 \qquad \ldots \qquad (14)$$

نتائج المحاكاة

يتم عرض وتحليل نتائـج محـاكاة طرائق التقدير (إنحدار بواسون (Pr) والإمكان الأعظم (ML) والتقلص(Sh) وكابلن (KM)) والجداول 2 و3 و4 و5 و6 و7 تبين تقديرات دالة المُعَوَّلية لجميع أحجام العينات (50,40,30,20,10) ولجميع التجارب (λ=0.1,0.11,0.12,0.13,0.14,0.15):

الجدول (2) التجربة الأولى تقدير دالة المُعَوَّلية عندما λ=0.1

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
10	1	0.95956	0.99526	0.93686	0.940492	0.96676
	2	0.87531	0.91771	0.84591	0.850614	0.88486
	3	0.73489	0.79199	0.69079	0.697846	0.74749
	4	0.55973	0.62163	0.50083	0.510254	0.57938
	5	0.38385	0.45315	0.31755	0.328158	0.407082
20	1	0.95956	0.98296	0.93746	0.95418	0.96886
	2	0.87531	0.91171	0.84021	0.84723	0.88651
	3	0.73489	0.77709	0.69399	0.70217	0.74869
	4	0.55973	0.61103	0.50973	0.51973	0.59043
	5	0.38385	0.44355	0.32545	0.33713	0.43055
30	1	0.95956	0.97846	0.97066	0.961884	0.97524
	2	0.87531	0.90051	0.89941	0.880234	0.89951
	3	0.73489	0.77939	0.76839	0.741694	0.78609
	4	0.55973	0.61733	0.60633	0.569154	0.61953
	5	0.38385	0.44735	0.43635	0.394454	0.44535
40	1	0.95956	0.9196	0.95056	0.957848	0.98034
	2	0.87531	0.77454	0.86481	0.873298	0.90751
	3	0.73489	0.58093	0.72159	0.732318	0.78954
	4	0.55973	0.40261	0.53033	0.553938	0.63073
	5	0.38385	0.2936	0.33925	0.375018	0.46375
50	1	0.95956	0.96656	0.96776	0.961208	0.98576
	2	0.87531	0.88456	0.88421	0.87717	0.91379
	3	0.73489	0.74589	0.74502	0.736996	0.8007
	4	0.55973	0.5781	0.5752	0.562904	0.6381
	5	0.38385	0.40611	0.403439	0.387848	0.46611

الجدول (3) التجربة الثانية تقدير دالة المُعَوَّلية عندما λ=0.11

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
10	1	0.97342	0.99652	0.95332	0.956536	0.9792
	2	0.91155	0.93985	0.88625	0.890298	0.918291
	3	0.79814	0.83594	0.76334	0.768908	0.80814
	4	0.6422	0.6878	0.5996	0.606416	0.65541
	5	0.47066	0.52696	0.41736	0.425888	0.49286
20	1	0.97342	0.99122	0.95692	0.96022	0.98312
	2	0.91155	0.93685	0.88755	0.89235	0.92275
	3	0.79814	0.82854	0.76904	0.77486	0.81194
	4	0.6422	0.6765	0.6092	0.6158	0.6602
	5	0.47066	0.51466	0.42796	0.4365	0.49456
30	1	0.97342	0.99522	0.98422	0.975684	0.99552
	2	0.91155	0.94455	0.93355	0.916054	0.94485
	3	0.79814	0.83474	0.82374	0.803364	0.83864
	4	0.6422	0.6831	0.6721	0.648284	0.67666
	5	0.47066	0.51796	0.50696	0.478024	0.52066
40	1	0.97342	0.94429	0.96502	0.971828	0.99782
	2	0.91155	0.82628	0.90165	0.909658	0.94928
	3	0.79814	0.65517	0.78564	0.795728	0.84364
	4	0.6422	0.4676	0.6255	0.638948	0.69786
	5	0.47066	0.30473	0.44806	0.466228	0.53186
50	1	0.97342	0.97852	0.98063	0.974942	0.99901
	2	0.91155	0.91819	0.91989	0.913298	0.915524
	3	0.79814	0.80731	0.80721	0.800034	0.84831
	4	0.6422	0.6552	0.65442	0.644724	0.70223
	5	0.47066	0.48917	0.488208	0.47425	0.541511

الجدول (4) التجربة الثالثة تقدير دالة المُعَوَّلية عندما λ=0.12

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
10	1	0.98264	0.99988	0.96374	0.966764	0.98766
	2	0.938	0.9613	0.9177	0.920948	0.945032
	3	0.84872	0.87732	0.82312	0.827216	0.85671
	4	0.71595	0.75065	0.68425	0.689322	0.724473
	5	0.5541	0.6012	0.51	0.517056	0.56952
20	1	0.98264	0.99344	0.97314	0.97504	0.99164
	2	0.938	0.9565	0.9208	0.92424	0.9485
	3	0.84872	0.87032	0.82842	0.83248	0.86002
	4	0.71595	0.74365	0.68955	0.69483	0.73165
	5	0.5541	0.5909	0.5186	0.5257	0.5711
30	1	0.98264	0.9982	0.99144	0.984504	0.99587
	2	0.938	0.961	0.95	0.9405	0.9601
	3	0.84872	0.87742	0.86642	0.85236	0.87529
	4	0.71595	0.74935	0.73835	0.720534	0.74699
	5	0.5541	0.5968	0.5858	0.56054	0.5958

تكملة الجدول (4)

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
40	1	0.98264	0.96217	0.97494	0.981188	0.99594
	2	0.938	0.86886	0.9288	0.936248	0.9687
	3	0.84872	0.73796	0.83872	0.846808	0.89082
	4	0.71595	0.54033	0.70155	0.713158	0.76765
	5	0.5541	0.36687	0.5384	0.551048	0.6063
50	1	0.98264	0.98794	0.98925	0.984042	0.993545
	2	0.938	0.94544	0.94504	0.939488	0.97544
	3	0.84872	0.85765	0.85665	0.850386	0.889613
	4	0.71595	0.72515	0.724202	0.71768	0.76687
	5	0.5541	0.5652	0.652841	0.573928	0.61521

الجدول (5) التجربة الرابعة تقدير دالة المُعَوَّلية عندما λ=0.13

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
10	1	0.98875	0.99556	0.97325	0.97573	0.993261
	2	0.95706	0.97926	0.93786	0.940932	0.96259
	3	0.88841	0.91281	0.86701	0.870434	0.894413
	4	0.77684	0.80914	0.74754	0.752228	0.78611
	5	0.6318	0.6691	0.5975	0.602988	0.64503
20	1	0.98875	0.99835	0.98045	0.98211	0.99555
	2	0.95706	0.96746	0.94796	0.94978	0.96512
	3	0.88841	0.90541	0.87271	0.87585	0.89781
	4	0.77684	0.79824	0.75674	0.76076	0.78825
	5	0.6318	0.6665	0.5984	0.60508	0.6458
30	1	0.98875	0.99977	0.99575	0.990254	0.99632
	2	0.95706	0.97626	0.96526	0.958804	0.97629
	3	0.88841	0.91151	0.90051	0.890934	0.91174
	4	0.77684	0.80614	0.79514	0.780604	0.80622
	5	0.6318	0.6674	0.6564	0.636824	0.6674
40	1	0.98875	0.97348	0.98325	0.987738	0.99794
	2	0.95706	0.90011	0.9503	0.955796	0.97649
	3	0.88841	0.77209	0.88031	0.886878	0.92294
	4	0.77684	0.60593	0.76673	0.774906	0.81914
	5	0.6318	0.43362	0.6191	0.629348	0.6783
50	1	0.98875	0.99361	0.99358	0.989796	0.99557
	2	0.95706	0.9625	0.9631	0.958348	0.986114
	3	0.88841	0.89477	0.895521	0.889912	0.922474
	4	0.77684	0.78654	0.784865	0.778525	0.825937
	5	0.6318	0.6421	0.64087	0.633694	0.686903

الجدول (6) التجربة الخامسة تقدير دالة المُعَوَّلية عندما λ=0.14

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
10	1	0.9928	0.99745	0.9831	0.984652	0.99606
	2	0.97075	0.98915	0.95535	0.957814	0.97549
	3	0.9193	0.9395	0.9021	0.904852	0.92485
	4	0.82926	0.85606	0.80546	0.809268	0.83607
	5	0.70321	0.73531	0.67411	0.678766	0.71098
20	1	0.9928	0.99875	0.9851	0.98664	0.9971
	2	0.97075	0.98045	0.96235	0.96403	0.97701
	3	0.9193	0.9297	0.9102	0.91202	0.9282
	4	0.82926	0.84066	0.81916	0.82118	0.83946
	5	0.70321	0.72181	0.68591	0.68937	0.71382
30	1	0.9928	0.99991	0.9978	0.993904	0.99792
	2	0.97075	0.98915	0.97815	0.972334	0.9892
	3	0.9193	0.9383	0.9273	0.921004	0.93885
	4	0.82926	0.84956	0.83856	0.831224	0.85028
	5	0.70321	0.72971	0.71871	0.706414	0.73285
40	1	0.9928	0.98078	0.9898	0.992288	0.99821
	2	0.97075	0.92472	0.96579	0.969846	0.98117
	3	0.9193	0.81907	0.9117	0.917868	0.94105
	4	0.82926	0.66875	0.82036	0.827568	0.84448
	5	0.70321	0.46935	0.6939	0.701436	0.735274
50	1	0.9928	0.99509	0.9962	0.99356	0.99784
	2	0.97075	0.97521	0.97481	0.971642	0.991196
	3	0.9193	0.92596	0.92496	0.920512	0.949966
	4	0.82926	0.83726	0.83646	0.83078	0.87006
	5	0.70321	0.71181	0.71122	0.704892	0.75407

الجدول (7) التجربة السادسة تقدير دالة المُعَوَّلية عندما λ=0.15

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
10	1	0.9955	0.99821	0.9878	0.989032	0.998399
	2	0.9805	0.9917	0.9723	0.973612	0.98414
	3	0.94332	0.95542	0.93422	0.935676	0.94792
	4	0.87345	0.89265	0.85725	0.859842	0.87918
	5	0.76864	0.79094	0.74934	0.752428	0.77554
20	1	0.9955	0.99903	0.9904	0.99142	0.9978
	2	0.9805	0.9891	0.9732	0.97466	0.98514
	3	0.94332	0.95262	0.93532	0.93692	0.95017
	4	0.87345	0.88485	0.86335	0.86537	0.88351
	5	0.76864	0.78514	0.75344	0.75648	0.77895
30	1	0.9955	0.99994	0.9988	0.996264	0.99872
	2	0.9805	0.9956	0.9846	0.981424	0.9956
	3	0.94332	0.96052	0.94952	0.944664	0.96052
	4	0.87345	0.89435	0.88335	0.875534	0.89435
	5	0.76864	0.78964	0.77864	0.770744	0.78964

تكملة الجدول (7)

n	K	R_{Real}	$\hat{R}_{Pr}$	$\hat{R}_{ML}$	$\hat{R}_{Sh}$	$\hat{R}_{KM}$
40	1	0.9955	0.98584	0.9945	0.995388	0.99883
	2	0.9805	0.94354	0.97716	0.97992	0.9868
	3	0.94332	0.85647	0.93777	0.942298	0.95172
	4	0.87345	0.72691	0.86469	0.871786	0.88555
	5	0.76864	0.56531	0.75963	0.766926	0.78084
50	1	0.9955	0.99749	0.99649	0.995778	0.9988
	2	0.9805	0.98304	0.98204	0.980888	0.991354
	3	0.94332	0.94794	0.94694	0.944124	0.961882
	4	0.87345	0.88118	0.87918	0.874676	0.90118
	5	0.76864	0.77854	0.77754	0.7705	0.80854

والجداول (8) و(9) و(10) و(11) و(12) و(13) تبين متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير (إنحدار بواسون (Pr) والإمكان الأعظم (ML) والتقلص(Sh) وكابلن (KM)) لجميع أحجام العينات (50,40,30,20,10) ولجميع التجارب:

الجدول (8) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير للتجربة الأولى λ=0.1

n	K	Pr	ML	Sh	KM
10	1	0.00327449	0.00151529	0.001363589	0.00306929
	2	0.00379776	0.00186436	0.001609892	0.00355236
	3	0.00526041	0.00294481	0.002372258	0.00492681
	4	0.00583161	0.00446921	0.003447875	0.00546921
	5	0.00680249	0.00539569	0.004101599	0.00639569
20	1	0.00248841	0.00148841	0.001028944	0.00208649
	2	0.00323201	0.00223201	0.001788486	0.00212544
	3	0.00367281	0.00267281	0.002070598	0.00219044
	4	0.0045	0.0035	0.0026	0.00294249
	5	0.00541056	0.00441056	0.003182758	0.00521489
30	1	0.00235721	0.00112321	0.001005401	0.002245862
	2	0.00263504	0.00158081	0.001024246	0.00258564
	3	0.00398025	0.00212225	0.001046294	0.00462144
	4	0.00531776	0.00317156	0.001088812	0.00557604
	5	0.00603225	0.00375625	0.001112445	0.00578225
40	1	0.00212544	0.001081	0.001002931	0.002431808
	2	0.00216129	0.00111025	0.001004048	0.00303684
	3	0.00224025	0.00117689	0.001006615	0.004986623
	4	0.00299856	0.00186436	0.001033547	0.007041
	5	0.00419024	0.00298916	0.001078004	0.00838401
50	1	0.00206889	0.00106724	0.001002716	0.00275625
	2	0.002111303	0.00107921	0.00100346	0.003582448
	3	0.00215129	0.001102617	0.001004435	0.006503752
	4	0.002386909	0.001239321	0.001010074	0.008347309
	5	0.002555074	0.001383729	0.001015982	0.008982274

الجدول (9) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير للتجربة الثانية λ=0.11

n	K	Pr	ML	Sh	KM
10	1	0.00253361	0.00140401	0.001285069	0.00240401
	2	0.00280089	0.00164009	0.001451648	0.00264009
	3	0.00342884	0.00221104	0.00185451	0.00321104
	4	0.00407936	0.00281476	0.002280495	0.00381476
	5	0.00516969	0.00384089	0.003004532	0.00484089
20	1	0.00227225	0.00127225	0.00117424	0.00209409
	2	0.002576	0.001576	0.00136864	0.00212544
	3	0.00284681	0.00184681	0.001541958	0.00219044
	4	0.003089	0.002089	0.00169696	0.002324
	5	0.00382329	0.00282329	0.002166906	0.00257121
30	1	0.00225524	0.00111664	0.001005126	0.00248841
	2	0.002389	0.001484	0.001020286	0.00310889
	3	0.00263956	0.00165536	0.00102729	0.00364025
	4	0.00302281	0.00189401	0.001037015	0.003187492
	5	0.00323729	0.00231769	0.001054228	0.0045
40	1	0.00211236	0.00107056	0.001002534	0.00259536
	2	0.00214641	0.00109801	0.00100358	0.003423553
	3	0.00221609	0.00115625	0.001005818	0.00407025
	4	0.00235721	0.00127889	0.001010576	0.005098036
	5	0.00261504	0.00151076	0.001019643	0.00574544
50	1	0.00204096	0.001051984	0.001002316	0.002697488
	2	0.002063044	0.001069556	0.001003056	0.002027815
	3	0.002109621	0.001082265	0.001003587	0.004649161
	4	0.00220449	0.001149328	0.001006371	0.005761369
	5	0.002392436	0.001307932	0.001012885	0.007205767

الجدول (10) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير للتجربة الثالثة λ=0.12

n	K	Pr	ML	Sh	KM
10	1	0.00247961	0.00135721	0.001252047	0.00235721
	2	0.00254289	0.00141209	0.001290771	0.00241209
	3	0.00281796	0.00165536	0.001462422	0.00265536
	4	0.00320409	0.00200489	0.00170905	0.00300489
	5	0.00421841	0.00294481	0.002372258	0.00394481
20	1	0.00209025	0.00109025	0.00105776	0.002081
	2	0.00229584	0.00129584	0.001189338	0.00211025
	3	0.00241209	0.00141209	0.001263738	0.00212769
	4	0.00269696	0.00169696	0.001446054	0.00224649
	5	0.00326025	0.00226025	0.00180656	0.002289
30	1	0.00209104	0.00107744	0.001003474	0.00243264
	2	0.002229	0.001144	0.00100627	0.00248841
	3	0.00232369	0.00131329	0.001013279	0.002705965
	4	0.00251556	0.00150176	0.001021013	0.002963482
	5	0.00302329	0.00200489	0.001041525	0.00373889

تكملة الجدول (10)

n	K	Pr	ML	Sh	KM
40	1	0.00209001	0.00105929	0.001002108	0.00217689
	2	0.00212996	0.00108464	0.00100307	0.00294249
	3	0.00214884	0.0011	0.001003656	0.00377241
	4	0.00227556	0.00120736	0.001007795	0.00467289
	5	0.00232041	0.00124649	0.001009315	0.00472484
50	1	0.00204356	0.001043692	0.001001966	0.002567869
	2	0.002076388	0.001049562	0.001002214	0.003500788
	3	0.002104653	0.001062885	0.001002776	0.003780249
	4	0.00211025	0.001068096	0.001002994	0.004726928
	5	0.00215376	0.010749785	0.001393158	0.005895008

الجدول (11) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير للتجربة الرابعة λ=0.13

n	K	Pr	ML	Sh	KM
10	1	0.00234225	0.00124025	0.00116952	0.00224025
	2	0.00249284	0.00136864	0.001260112	0.00236864
	3	0.00259536	0.00145796	0.001323137	0.00245796
	4	0.00304329	0.00185849	0.001605751	0.00285849
	5	0.00339129	0.00217649	0.001830131	0.00317649
20	1	0.00227225	0.00127225	0.00117424	0.00209409
	2	0.002576	0.001576	0.00136864	0.00212544
	3	0.00284681	0.00184681	0.001541958	0.00219044
	4	0.003089	0.002089	0.00169696	0.002324
	5	0.00382329	0.00282329	0.002166906	0.00257121
30	1	0.002124	0.001049	0.001002262	0.002333063
	2	0.00236864	0.00106724	0.001003042	0.002369793
	3	0.00253361	0.00114641	0.001006371	0.002544289
	4	0.00285849	0.00133489	0.001014168	0.002863184
	5	0.00326736	0.00160516	0.001025241	0.00326736
40	1	0.00205929	0.00103025	0.001001024	0.00214641
	2	0.002080282	0.001045698	0.001001598	0.002377525
	3	0.00210609	0.00106561	0.001002347	0.003192321
	4	0.002151536	0.001102212	0.00100374	0.00378929
	5	0.00222201	0.00116129	0.001006012	0.00416225
50	1	0.002037946	0.001023329	0.001001094	0.00247463
	2	0.002045428	0.001036482	0.001001659	0.00292139
	3	0.002058676	0.001050566	0.001002257	0.003250584
	4	0.002121	0.001064401	0.001002839	0.004539858
	5	0.00213456	0.001082265	0.001003587	0.005181298

الجدول (12) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير للتجربة الخامسة λ=0.14

n	K	Pr	ML	Sh	KM
10	1	0.00216129	0.00109409	0.00106639	0.00209409
	2	0.00233856	0.00123716	0.00116734	0.00223716
	3	0.00240804	0.00129584	0.001208745	0.00229584
	4	0.00271824	0.00156644	0.00139968	0.00256644
	5	0.00303041	0.00184681	0.001597509	0.00284681
20	1	0.00205929	0.00105929	0.001037946	0.00201849
	2	0.00207056	0.00107056	0.001045158	0.002039188
	3	0.00209281	0.00108281	0.001052998	0.00207921
	4	0.00210201	0.00110201	0.001065286	0.00210404
	5	0.00229929	0.00129929	0.001191546	0.002112572
30	1	0.002056	0.001025	0.001001219	0.002266669
	2	0.00206856	0.00105476	0.001002509	0.002340403
	3	0.002081	0.001064	0.001002904	0.002382203
	4	0.00209209	0.00108649	0.001003857	0.00244184
	5	0.00216225	0.00124025	0.001010266	0.00287853
40	1	0.00202704	0.001009	0.001000262	0.002078022
	2	0.002051266	0.001024602	0.001000817	0.002108576
	3	0.00207604	0.00105776	0.001002051	0.002473063
	4	0.00209021	0.00107921	0.001002863	0.002231648
	5	0.00213248	0.001086676	0.001003147	0.0030281
50	1	0.002012888	0.00101156	0.001000578	0.00242144
	2	0.002033178	0.001016484	0.001000796	0.002472889
	3	0.002063362	0.001032036	0.001001469	0.003021825
	4	0.00208649	0.00105184	0.00100231	0.00377241
	5	0.00209801	0.00106416	0.001002829	0.004720666

الجدول (13) متوسط مربعات الخطأ لطرائق التقدير للتجربة السادسة λ=0.15

n	K	Pr	ML	Sh	KM
10	1	0.00211449	0.00105929	0.001041835	0.00205929
	2	0.00212544	0.00106724	0.001047445	0.00206724
	3	0.00214641	0.00108281	0.001058431	0.00208281
	4	0.00236864	0.00126244	0.001185178	0.00226244
	5	0.00249729	0.00137249	0.001262829	0.00237249
20	1	0.00202601	0.00102601	0.001016646	0.00200529
	2	0.00205329	0.00105329	0.001034106	0.00202153
	3	0.002064	0.001064	0.00104096	0.002046923
	4	0.00210201	0.00110201	0.001065286	0.002101204
	5	0.00223104	0.00123104	0.001147866	0.002106296
30	1	0.00201449	0.00101089	0.001000584	0.00220449
	2	0.00205101	0.00101681	0.001000854	0.00222801
	3	0.00205884	0.00103844	0.001001806	0.00229584
	4	0.00210181	0.00109801	0.001004343	0.00243681
	5	0.002141	0.0011	0.001004427	0.002441

تكملة الجدول (13)

n	K	Pr	ML	Sh	KM
40	1	0.00200024	0.001001	0.001000013	0.00203025
	2	0.002030692	0.001011156	0.001000336	0.00203969
	3	0.002040063	0.001030803	0.001001044	0.00207056
	4	0.002100122	0.001076738	0.001002769	0.00214641
	5	0.002125664	0.00108118	0.001002938	0.00214884
50	1	0.002010824	0.00100098	0.001000077	0.002127464
	2	0.002014746	0.001002372	0.001000151	0.00214772
	3	0.002035046	0.001013104	0.001000646	0.002394499
	4	0.002081541	0.001032833	0.001001503	0.002842741
	5	0.00212544	0.00107921	0.00100346	0.00369744

الإستنتاجات: *Conclusions*

1- أظهرت نتائج المحاكاة بأن طريقة التقلص (*Shrinkage method*) هي أفضل طريقة وكانت أكثر تقارب من القيم الحقيقية لدالة المُعَوَّلية لأنها حققت أقل (*MSE*) لجميع أحجام العينات ولكافة نماذج معدل الفشل.

2- أظهرت نتائج المحاكاة بأن طريقة الإمكان الأعظم (*Maximum Likelihood method*) ثاني أكفء طريقة لجميع أحجام العينات المستخدمة ولكافة النماذج وذلك لأنها حققت أقل (*MSE*) في تقدير دالة المُعَوَّلية بعد طريقة التقلص.

3- أظهرت نتائج المحاكاة بأن طريقة إنحدار بواسون (*Poisson regression*) ثالث أكفء طريقة في تقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون في حين حلَّت طريقة كابلن – مير (Kaplan-Meier) بالمرتبة الأخيرة.

4- أشارت النتائج إلى تناقص ال (MSE) لجميع المقدَّرات عند زيادة حجم العينة.

5- تزداد قيمة متوسط مربعات الخطأ (MSE) كلما زاد عدد الأعطال (k).

6- تتناقص قيم متوسط مربعات الخطأ كلما زاد معدل الفشل (λ) ولنفس حجم العينة.

7-تناقص قيم (MSE) لكل المقدرات بزيادة حجم العينة بإستثناء طريقة (Kaplan- Meier) فهي تسلك سلوك معاكس للطرائق الثلاثة الأخرى إذ تزداد قيم (MSE) بزيادة حجم العينة.

التوصيات *Recommendations*

إعتماداً على الإستنتاجات المذكورة آنفاً يمكن وضع بعض المقترحات أو التوصيات من قبل الباحثة وكما يأتي:

1- ضرورة إستخدام طريقة التقلص في تقدير مُعَوَّلية المكائن عند توفر معلومات أولية عن معلمة التقدير.

2- ضرورة الإستمرار بصيانة المكائن عن طريق وضع جدول زمني للصيانة المبرمجة وذلك لزيادة مُعَوَّلية المكائن.

3- ضرورة أن تكون المنشأة مهيأة لكل صيانة مفاجأة (غير محسوبة) وذلك لتقليل مدة توقف الماكنة (المكائن) عن العمل ومن ثَمَّ إنخفاض مُعَوَّلية هذه المكائن.

4- ينبغي عدم تحميل المكائن أكثر من الطاقة التصميمية أو المتاحة للإنتاج لتبقى مُعَوَّليتها عالية وضرورة أن تكون المواد الداخلة في عملية التصنيع والإنتاج جيدة ومن مناشيء رصينة وذلك حفاظاً على عمر الماكنة الإفتراضي.

5- ضرورة دراسة وتحليل دالة المُعَوَّلية لتوزيعات مختلطة (*Mixture distributions*) كأن تكون خليط من توزيعات مستمرة مع توزيعات متقطعة في آن واحد للحصول على معلومات جديدة تخص المُعَوَّلية.

6- ضرورة إستخدام الطرائق البيزية من خلال تطبيق المعلومات السابقة واللاحقة في تقدير دالة المُعَوَّلية لتوزيع بواسون والعمل عليها.

references المصادر

1. Bernard Harris. "Hypothesis Testing and Confidence Intervals for Products and Quotients of Poisson Parameters with Application to Reliability". Journal of the American Statistical Association(JASA),1971.
2. Miller R.H. "Reliability of system comprised of k elements". Journal of the American Statistical Association(JASA)1994.
3. 25.G. David Garson, "Reliability Analysis". htt: llwww2. chass. Ncsu. Edul garson l pa 765 reliability.htm,1998.
4. شاهر، ثائر فيصل "طرائق تقدير عدد مرات الفشل في الانظمة القابلة للإصلاح "، اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد – جامعة بغداد 2005
5. Adamantios Mettas & Wenbiao Zhao. "Modeling and analysis of Repairable system with General Repair "Alexandria, Virginia, USA,2005.
6. Adil H. Khan & T R. Gaan "Reliability Estimates of Generalized Poisson Distribution and Generalized Geometric Series Distribution". India,2014.
7. Bander Al -Zahrani & Hanaa Sagor. "The Poisson – Lomax Distribution". king Abdulaziz university, Jeddah,2014.
8. Kumar Manoj, "Reliability Estimation for Poisson – Exponential Model Under Progressive Type Censoring Data with Binomial Removal Data ", India,2016
9. Rasheed Dhafir H. & Wakil A. Ali. "Introduction to Mathematical Statistics", College of Management and Economics, Baghdad University.
10. Marvin Rausand. "System Reliability Theory, Models, Statistical Methods, and Applications". Second edition, Walter, Shewuhart & Samuel S. Wilks, Norwegian University of science and Technology, Norwege,2004
11. A. Joseph Guse. "Poisson Regression". Washington, USA,2011.
12. Jayant V. Deshpande, Sudha G. Purohit. "Life Time Data: Statistical Models and Methods". University of Pune, India,2009.
13. Patrick Zheng, "Maximum Likelihood & Method of Moments Estimation". University of California,2014.
14. Tiejun Tong & Yuedong Wang. "Optimal Shrinkage Estimation of Variances with Applications to Microarray Data Analysis"2005.
15. German Rodrıguez," Non-Parametric Estimation in Survival Models",2005.
16. Horst Rinne. "The Hazard Rate, Theory and Inference", With supplementary MATLAB Programs. Justus Liebig University, Germany,2014