العاملين المرافقين لنموذج القياسات المتكررة

ISSN –1817 –2695

عبد الحسين صبر المويل[1] هدى زكي ناجي[2]

[1]قسم الرياضيات– كلية التربية

[2]قسم الرياضيات – كلية العلوم

((الاستلام 2009/9/29، القبول 2009/12/17))

المستخلص

تناول هذا البحث دراسة نموذج من نماذج القياسات المتكررة متعددة المتغيرات للبيانات الكاملة ذات الاتجاه الواحد (One-way MRM) لتحليل التباين المشترك، كون هذا النموذج يحتوي على عاملين مرافقين (مستقلين) ، لذا يطلق على النموذج العام اسم (ANCOVA) ، ويشترط في هذا النموذج أن يكون كلا العاملين المرافقين مستقلين زمنياً أي يقاس مرة واحدة في كل مستوى من مستويات التجربة (لا يوجد ارتباط بين المشاهدات في أي مستوى من مستويات التجربة).

الكلمات المفتاحية

(One-way MRM): نموذج قياسات متكررة متعددة المتغيرات للبيانات الكاملة ذات الاتجاه الواحد , (Λ_r): توزيع وولكس , (U^*): مصفوفة عمودية من الدرجة p×p , (Wishart) : توزيع وشرت المتعدد المتغيرات,(covariates): العوامل المرافقة , (Anocova): تحليل التباين والتباين المشترك لنموذج يحوي على عوامل مرافقة .

(1-1) مقدمة:

عّرف العديد من العلماء والباحثين القياسات المتكررة وعلى مراحل مختلفة من الزمن فقد عّرفها [24] (**Vonesh&Chinchilli**) أنها مصطلح مستعمل لوصف البيانات التي تكون فيها مشاهدات متغير الاستجابة متكررة لكل وحدة تجريبية وتحت ظروف تجريبية مختلفة. أما [18] (**Keselman**) فقد بين أن القياسات المتكررة تتطلب أثنتين أو أكثر من المجموعات المستقلة بين اغلب التصاميم التجريبية المعروفة في مجموعة من البحوث المتنوعة. لكن مفهوم نماذج القياسات المتكررة يمكن تعريفه عندما تستلم وحدة تجريبية خاصة كأن تكون (شخصا أو حقلا أو حيوانا أو ما شابه ذلك) معالجات عديدة من مستويات مختلفة ويراد من الإحصائي تحليل تأثيرات هذه المعالجات في مثل هذه الحالة لا يفترض أن تكون المشاهدات مستقلة عن بعضها وبالتالي فان القياسات على هذه الوحدات ستكون مرتبطة عامة على الرغم من بقاء فرض الاستقلالية بين الأخطاء في النموذج ، يدعى مثل هذا النموذج بنموذج القياسات المتكرر ، أي ان التعريف العام لنماذج القياسات المتكررة هي : مقياس لتكرار مشاهدات الوحدات التجريبية في وحدة من الزمن .

(1-2) صياغة نموذج القياسات المتكررة متعددة المتغيرات :

في هذا البند نقوم بصياغة نموذج الدراسة وإيجاد مركبات تحليل التباين اذ يحتوي نموذج الدراسة على عاملين مرافقين (لقياس درجة عدم تجانس الوحدات التجريبية) والنموذج العام يكون بالشكل الاتي :

$$Y_{ijk} = \mu + \tau_j + \gamma_k + (\tau\gamma)_{jk} + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..})\beta_1 + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..})\beta_2 + e_{ijk}$$

$(i=1,...,n_j)$ دليل للوحدة التجريبية i داخل المجموعة j

$(j=1,...,q)$ دليل إلى مستويات العامل بين الوحدات (المجموعة)

$(k=1,...,p)$ دليل إلى مستويات العامل داخل الوحدات (الزمن)

$Y_{ijk}=(Y_{ijk1},...,Y_{ijkr})'$ هي قياس الاستجابة إلى العامل عند الزمن k للوحدة i داخل المجموعة j

$\mu=(\mu_1,...,\mu_r)'$ تمثل المتوسط العام

$\tau_j=(\tau_{j1},...,\tau_{jr})'$ التأثير المضاف للعامل بين الوحدات j

$\gamma_k=(\gamma_{k1},...,\gamma_{kr})'$ التأثير المضاف للعامل داخل الوحدات k

$(\tau\gamma)_{jk}=\left((\tau\gamma)_{jk1},...,(\tau\gamma)_{jkr}\right)'$ التأثير المضاف للتفاعل بين عامل بين الوحدات وعامل داخل الوحدات التي تمثل المجموعات والزمن على التوالي

$Z_{1ij}=(Z_{1ij1},...,Z_{1ijr})'$ قيمة للعامل Z_1 في الوحدة i داخل المجموعة j

$\bar{Z}_{1..}=(\bar{Z}_{1..1},...,\bar{Z}_{1..r})'$ المتوسط للعامل Z_1 في كل الوحدات التجريبية

$\beta_1=(\beta_{11},...,\beta_{1r})'$ الميل للعامل Z_1

$Z_{2ij}=(Z_{2ij1},...,Z_{2ijr})'$ قيمة للعامل Z_2 في الوحدة i داخل المجموعة j

$\bar{Z}_{2..}=(\bar{Z}_{2..1},...,\bar{Z}_{2..r})'$ المتوسط للعامل Z_2 في كل الوحدات التجريبية

$\beta_2=(\beta_{21},...,\beta_{2r})'$ الميل للعامل Z_2

$e_{ijk}=(e_{ijk1},...,e_{ijkr})'$ الخطأ العشوائي عند الزمن k للوحدة i داخل المجموعة j

وللصياغة المعلمية يكون النموذج ذا رتب تامة ، لذا نفرض مجموعة الشروط الاتية :

$$\sum_{j=1}^{q}\tau_j=0$$

$$\sum_{k=1}^{p}\gamma_k=0$$

$$\sum_{j=1}^{q}(\tau\gamma)_{jk}=0 \quad for\ each \quad k=1,...,p \qquad \dots (1\text{-}1)$$

$$\sum_{k=1}^{p}(\tau\gamma)_{jk}=0 \quad for\ each \quad j=1,...,q$$

$$\sum_{i=1}^{n_j}Z_{1ij}=\sum_{i=1}^{n_j}Z_{2ij}=0 \quad , \quad \sum_{j=1}^{q}Z_{1ij}=\sum_{j=1}^{q}Z_{2ij}=0$$

ونفترض أن $e_{ijk}{}^{,s}$ مستقلة وتتوزع توزيعاً طبيعياً متعدد المتغيرات ، أي أن :

$$e_{ijk}=(e_{ijk1},...,e_{ijkr})' \overset{i.i.d}{\sim} N_r(0,\Sigma_e) \qquad \dots(1\text{-}2)$$

حيث أن Σ_e هي مصفوفة موجبة تماماً من الرتبة r×r

لتكن $Y_{ij}=(Y_{ij1},...,Y_{ijp})'$

أي أن

$$Y_{ij}=\begin{bmatrix} Y_{ij11} & Y_{ij21} & \dots & Y_{ijp1} \\ Y_{ij12} & Y_{ij22} & \dots & Y_{ijp2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{ij1r} & Y_{ij2r} & \dots & Y_{ijpr} \end{bmatrix} \qquad \dots(1\text{-}3)$$

أن مصفوفة التباين والتباين المشترك Σ للنموذج العام تحقق افتراضات التماثل المركب (Compouned symmetry) .

$$\Sigma = I_p \otimes \Sigma_e$$
$$= \begin{bmatrix} \Sigma_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Sigma_e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Sigma_e \end{bmatrix} \qquad \ldots(1\text{-}4)$$

حيث I_p : مصفوفة أحادية من الدرجة p×p

J_p : مصفوفة جميع عناصرها الواحد الصحيح ومن الدرجة p×p

j_p : ترمز إلى متجه عناصره الواحد الصحيح

وعليه فان :

$$e_{ijk} = (e_{ijk1}, \ldots, e_{ijkr})' \overset{i.i.d}{\sim} N_r(0, I_p \otimes \Sigma_e) \qquad \ldots(1\text{-}5)$$

(3 – 1) تحويل مشاهدات نموذج تحليل التباين للقياسات المتكررة متعدد المتغيرات ذات الاتجاه الواحد:

في هذا البند يتم تحول مشاهدات النموذج وإيجاد المعايير الإحصائية لاختبار الفرضيات المتعلقة به حيث يتم تحويل مشاهدات الـــ Y_{ijk} لكل من $i = 1, \ldots . n_j$ و $j = 1, \ldots, q$ و $k = 1, \ldots, p$ إلى مشاهدات مستقلة باستعمال مصفوفة متعامدة وذلك لكي نحصل على بيانات تتمتع بالصفات التي تتمتع بها متغيرات نموذج القياسات المتكررة

لتكن U^* مصفوفة عمودية من الدرجة p×p

$$U^* = (p^{-\frac{1}{2}} j_p \quad U) \qquad \ldots(1\text{-}6)$$

$j_p' = (1 \cdots 1)$ متجه جميع عناصره الواحد الصحيح

U' مصفوفة من الدرجة $(p-1) \times p$

$$Y_{ij}^* = Y_{ij} U^*$$

$$[Y_{ij1}^* \cdots Y_{ijp}^*]' = [Y_{ij1} \cdots Y_{ijp}]' U^*$$

$$\begin{bmatrix} Y_{ij11}^* & \cdots & Y_{ijp1}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{ij1r}^* & \cdots & Y_{ijpr}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{ij11} & \cdots & Y_{ijp1} \\ \vdots & & \\ Y_{ij1r} & \cdots & Y_{ijpr} \end{bmatrix} (p^{-\frac{1}{2}} j_p \quad U) \qquad \ldots(1\text{-}7)$$

من (4-1) نحصل على:

$$Cov(\vec{Y}_{ij}^*) = (U^{*'} \otimes I_r)(I_p \otimes \Sigma_e)(U^* \otimes I_r)$$
$$= I_p \otimes \Sigma_e$$

$$=\begin{bmatrix} \sum_e & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_e & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_e \end{bmatrix} \qquad \ldots(1\text{-}8)\ldots$$

وبعد تحويل مشاهدات النموذج الى مشاهدات مستقلة يمكننا الان دراسة تحليل التباين

بما أن المصفوفة U من الدرجة $P\times(P-1)$ ولأن U^* اختيرت لتكون متعامدة ، لذلك نجد أن $U'j_p = 0$ و $U'U = I_{p-1}$ هذا يعني أن $Y^*_{ij1},\ldots,Y^*_{ijp}$ مستقلة عن بعضها الاخر ومصفوفة التباين والتباين المشترك لكل متجه هي $\sum_e$

الآن

$$Y^*_{ij1} = (Y_{ij1})(p^{-\frac{1}{2}}_{j_p})$$

إذن

ينتج من النموذج العام:

$$\therefore Y^*_{ij1} = \begin{bmatrix} Y^*_{ij11} \\ Y^*_{ij12} \\ \vdots \\ Y^*_{ij1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{k=1}^{p} Y_{ijk1} \\ \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{k=1}^{p} Y_{ijk2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{k=1}^{p} Y_{ijkr} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Y^*_{ij1} &= p^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{p} Y_{ijk} \\ &= p^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{p} (\mu + \tau_j + \gamma_k + (\tau\gamma)_{jk} + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..})\beta_1 + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..})\beta_2 + e_{ijk}) \\ &= p^{\frac{1}{2}}\mu + p^{\frac{1}{2}}\tau_j + p^{\frac{1}{2}}(Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..})\beta_1 + p^{\frac{1}{2}}(Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..})\beta_2 + p^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{p} e_{ijk} \end{aligned}$$

$$\therefore Y^*_{ij1} = \mu^* + \tau^*_j + (Z^*_{1ij} - \overline{Z}^*_{1..})\beta^*_1 + (Z^*_{2ij} - \overline{Z}^*_{2..})\beta^*_2 + e^*_{ij1}$$

حيث e^*_{ij1} متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة تتوزع توزيعاً طبيعياً.

عليه فإن مجموعة المتجهات

$$(Y^*_{111},\cdots,Y^*_{n_1 11})',(Y^*_{121},\cdots,Y^*_{n_2 21})',\cdots,(Y^*_{1q1},\cdots,Y^*_{n_q q1})'$$

تمتلك متجهات متوسط

$$X_1=\sqrt{P}\mu+\sqrt{P}\tau_1+\sqrt{P}(Z_{1i1}-\overline{Z}_{1..})\beta_1+\sqrt{P}(Z_{2i1}-\overline{Z}_{2..})\beta_2$$
$$X_2=\sqrt{P}\mu+\sqrt{P}\tau_2+\sqrt{P}(Z_{1i2}-\overline{Z}_{1..})\beta_1+\sqrt{P}(Z_{2i2}-\overline{Z}_{2..})\beta_2$$
$$\vdots$$
$$X_q=\sqrt{P}\mu+\sqrt{P}\tau_q+\sqrt{P}(Z_{1iq}-\overline{Z}_{1..})\beta_1+\sqrt{P}(Z_{2iq}-\overline{Z}_{2..})\beta_2$$

وبالتعاقب ولكل منها مصفوفة تباين مشترك $\sum_e$ عليه فإن فرضية العدم لتأثيرات المعالجات ذاتها :

$$H_{01}=\tau_1+(Z_{1i1}-\overline{Z}_{1..})+(Z_{2i1}-\overline{Z}_{2..})=\cdots=\tau_q+(Z_{1iq}-\overline{Z}_{1..})+(Z_{2iq}-\overline{Z}_{2..})=0$$

وتكون مكافئة لفرضية العدم لمتجهات المتوسط ذاته

$$H_{01}=X_1=X_2=\cdots=X_q=0$$

ويعتمد تحليل التباين على مجموعة المشاهدات المحولة أعلاه الــ $Y_{ij1}^{*,s}$ التي تزودنا بتحليل التباين للجزء الأول الذي يمثــل الاختلاف بين الوحدات .

أي أن كل من SS_G ، SS_{Z_1} ، SS_{Z_2} ، $SS_{u(GroupZ_1Z_2)}$ على التوالي تكون كالآتي:

$$SS_G=\sum_{j=1}^{q}n_j(\overline{Y}_{j1}^*-\overline{Y}_1^*)(\overline{Y}_{j1}^*-\overline{Y}_1^*)'$$
$$SS_{Z_1}=\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}\frac{1}{\beta_1}\left[(\overline{Y}_{ij1}^*-\overline{Y}_{j1}^*-\beta_2^*Z_{2ij}^*)(\overline{Y}_{ij1}^*-\overline{Y}_{j1}^*-\beta_2^*Z_{2ij}^*)'\right]$$
$$SS_{u(GroupZ_1Z_2)}=\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}\left(C\ (C)'\right)$$

حيث ان :

$$\mathrm{C}=\left(Y_{ij1}^*-\overline{Y}_{j1}^*-2\overline{Y}_{ij}^*-2\overline{Y}_j^*+\beta_1^*Z_{1ij}^*+\beta_2^*Z_{2ij}^*\right)$$

$$\overline{Y}_{j1}^*=\frac{\sum_{i=1}^{n_j}Y_{ij1}^*}{n_j}\qquad,\overline{Y}_1^*=\frac{\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}Y_{ij1}^*}{n}\qquad,\overline{Y}_{ij1}^*=\frac{\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}Y_{ij1}^*}{n_jq}$$

يتضح من ذلك أن كل من SS_G ، SS_{Z_1} ، SS_{Z_2} ، $SS_{u(GroupZ_1Z_2)}$ تتوزع توزيــع Wishart وشــرت المتعدد المتغيرات ، كما موضح في أدناه

$$SS_G\sim W_r(q-1,\textstyle\sum_e)$$
$$SS_{Z_1}\sim W_r(1,\textstyle\sum_e)$$
$$SS_{Z_2}\sim W_r(1,\textstyle\sum_e)$$
$$SS_{u(GroupZ_1Z_2)}\sim W_r(n-q-2,\textstyle\sum_e)$$

عندما

$$H_{01}:\tau_1+(Z_{1i1}-\overline{Z}_1)+(Z_{2i1}-\overline{Z}_2)=\cdots=\tau_q+(Z_{1iq}-\overline{Z}_1)+(Z_{2iq}-\overline{Z}_2)=0$$

تكون صحيحة فإن إحصاءات الاختبار تكون ملخصة كالآتي :

اختبار وولكس متعدد المتغيرات **The multivariate Wilks test (Wilks 1932)**

$$T_{w_1} = \frac{\left|SS_{u(GroupZ_1Z_2)}\right|}{\left|SS_{u(GroupZ_1Z_2)} + SS_G\right|}$$

عندما H_{01} صحيحة المعيار الإحصائي

$$T_{w_1} \sim \Lambda_r(n-q-2, q-1)$$

$$T_{w_2} = \frac{\left|SS_{u(GroupZ_1Z_2)}\right|}{\left|SS_{u(GroupZ_1Z_2)} + SS_{Z_1}\right|}$$

عندما H_{01} صحيحة المعيار الإحصائي

$$T_{w_2} \sim \Lambda_r(n-q-2,1)$$

$$T_{w_3} = \frac{\left|SS_{u(GroupZ_1Z_2)}\right|}{\left|SS_{u(GroupZ_1Z_2)} + SS_{Z_2}\right|}$$

عندما H_{01} صحيحة المعيار الإحصائي

$$T_{w_3} \sim \Lambda_r(n-q-2,1)$$

فإن Λ_r ترمز إلى توزيع وولكس .

الآن نأتي إلى توضيح تحليل التباين لمجموعة المشاهدات المحولة k^{th} والذي يعتمد على $Y_{ijk}^{*.s}$ لكل $k = 2, \ldots, p$ المعرفة في المعادلة ادناه:

$$Y_{ijk}^* = \begin{bmatrix} Y_{112}^* & Y_{113}^* & \cdots & Y_{11p}^* \\ Y_{212}^* & Y_{213}^* & \cdots & Y_{21p}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{n_112}^* & Y_{n_112}^* & \cdots & Y_{n_11p}^* \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{1q2}^* & Y_{1q3}^* & \cdots & Y_{1qp}^* \\ Y_{2q2}^* & Y_{2q3}^* & \cdots & Y_{2qp}^* \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ Y_{n_qq2}^* & Y_{n_qq3}^* & \cdots & Y_{n_qqp}^* \end{bmatrix} \qquad \ldots(1\text{-}9)$$

تمتلك النموذج الاتي :-

$$\begin{aligned} Y_{ijk}^* &= \sum_{k'=1}^{p} u_{kk'} Y_{ijk'} \qquad k = 2, \cdots, p \\ &= \sum_{k'=1}^{p} u_{kk'} \left(\mu + \tau_j + \gamma_{k'} + (\tau\gamma)_{jk'} + (Z_{1ij} - \bar{Z}_{1..})\beta_1 + (Z_{2ij} - \bar{Z}_{2..})\beta_2 + e_{ijk'}\right) \end{aligned} \qquad \ldots(1\text{-}10)$$

لأن المركبات $(u_{k1}, \ldots, u_{kp})$ مجموعها صفر لكل $k = 2, \ldots, p$ ، عليه فان النموذج k^{th} في (1-10) يكون مكافئ لـــ

$$Y_{ijk}^* = \gamma_k^* + (\tau\gamma)_{jk}^* + (Z_{1ij}^* - \bar{Z}_{1..}^*)\beta_1^* + (Z_{2ij}^* - \bar{Z}_{2..}^*)\beta_2^* + e_{ijk}^*$$

حيث

$$\begin{aligned}&[\gamma_2^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*)\beta_1^* + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*)\beta_2^*, \ldots, \gamma_p^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*)\beta_1^* + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*)\beta_2^*] = \\ &[\gamma_1 + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..})\beta_1 + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..})\beta_2, \ldots, \gamma_p + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..})\beta_1 + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..})\beta_2]U^*\end{aligned}$$

ويتضح من ذلك عندما

$$\gamma_1 + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = \cdots = \gamma_p + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = 0$$

فإن

$$\gamma_2^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = \cdots = \gamma_p^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = 0$$

لذلك فأن الفرضية

$$H_{02}: \gamma_1 + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = \cdots = \gamma_p + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = 0$$

والتي تكون مكافئة للفرضية

$$H_{02}: \gamma_2^* + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = \cdots = \gamma_p^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = 0$$

وبالتشابه لكل j

$$\begin{aligned}&[(\tau\gamma)_{2j}^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*), \ldots, (\tau\gamma)_{jp}^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*)] = \\ &[(\tau\gamma)_{j1} + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}), \ldots, (\tau\gamma)_{jp} + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..})]U^*\end{aligned}$$

والفرضية

$$H_{03}: (\tau\gamma)_{j1} + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = \cdots = (\tau\gamma)_{jp} + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = 0$$

تكون مكافئة للفرضية

$$H_{03}: (\tau\gamma)_{j2}^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = \cdots = (\tau\gamma)_{jp}^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = 0$$

عليه فان مجموع مربعات الزمن أو مجموع مربعات عامل داخل الوحدات :

$$SS_{Time} = n\sum_{k=2}^{p} (\overline{Y}_k^* (\overline{Y}_k^*)')$$

$$SS_{Time} \sim W_r\left((p-1), \Sigma_e\right)$$

عندما تكون الفرضية صحيحة لكل k .

$$H_{02}: \gamma_1 + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = \cdots = \gamma_p + (Z_{1ij} - \overline{Z}_{1..}) + (Z_{2ij} - \overline{Z}_{2..}) = 0$$

كذلك عندما تكون فرضية العدم المكافئة لتأثير الزمن أو عامل داخل الوحدات صحيحة

أي عندما تكون الفرضية الاتية :

$$H_{02}: \gamma_2^* + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = \cdots = \gamma_p^* + (Z_{1ij}^* - \overline{Z}_{1..}^*) + (Z_{2ij}^* - \overline{Z}_{2..}^*) = 0$$

صحيحة لكل k.

فأن احصاءة الاختبار تكون كالأتي :-

$$T_{w_4} = \frac{\left|SS_{Time\times Unit(Group)}\right|}{\left|SS_{Time\times Unit(Group)} + SS_{Time}\right|}$$

$$T_{w_4} \sim \Lambda_r\left((p-1)(n-q), (p-1)\right)$$

ومجموع مربعات التفاعل بين الزمن والمجموعات أي التفاعل بين العامل داخل الوحدات والعامل بين الوحدات

$$SS_{Time\times Group}=\sum_{k=2}^{p}\sum_{j=1}^{q}n_j\left((\bar{Y}_{jk}^{*}-\bar{Y}_{k}^{*})(\bar{Y}_{jk}^{*}-\bar{Y}_{k}^{*})'\right)$$

$$\bar{Y}_{jk}^{*}=\frac{\sum_{i=1}^{n_j}Y_{ijk}^{*}}{n_j}\qquad ,k=2,\dots,p$$

$$\bar{Y}_{k}^{*}=\frac{\sum_{j=1}^{q}n_jY_{jk}^{*}}{n}$$

$$SS_{Time\times Group}\sim W_r\left((p-1)(q-1),\textstyle\sum_e\right)$$

فإن احصاءة الاختبار تكون :

$$T_{w_5}=\frac{\left|SS_{Time\times Unit(Group)}\right|}{\left|SS_{Time\times Unit(Group)}+SS_{Time\times Group}\right|}$$

$$T_{w_5}\sim\Lambda_r\left((p-1)(n-q),(p-1)(q-1)\right)$$

كذلك $e_{ijk}^{*}{}^{,s}$ متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة تتوزع توزيعاً طبيعياً .

بما أن $Cov(Y_{ij(2)}^{*})=I_{p-1}\otimes\sum_e$

فان مجموع مربعات الخطأ تكون كالأتي :

$$SS_{Time\times Umit(Group)}=\sum_{k=2}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{n_j}\left(G(G)'\right)$$

إذ إن : $G=(Y_{ijk}^{*}-\bar{Y}_{jk}^{*}-2\bar{Y}_{ij}^{*}-2\bar{Y}_{j}^{*}+\beta_1^{*}Z_{1ij}^{*}+\beta_2^{*}Z_{2ij}^{*})$

$$SS_{Time\times Unit(Group)}\sim W_r\left((p-1)(n-q),\textstyle\sum_e\right)$$

والجدول الاتي يلخص نتائج تحليل التباين التي حصلنا عليها .

The one-way MRM ANCOVA with one between-unit factor (Group) and two covariates (Z_1, Z_2) that are time-independent.

	Source	D.F	SS	Wilks Criterion
$Between$	$Group$	$q-1$	SS_G	$T_{W_1} = \dfrac{\lvert SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)}\rvert}{\lvert SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)} + SS_G\rvert}$
	Z_1	1	SS_{Z_1}	$T_{W_2} = \dfrac{\lvert SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)}\rvert}{\lvert SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)} + SS_{Z_1}\rvert}$
	Z_2	1	SS_{Z_2}	$T_{W_3} = \dfrac{\lvert SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)}\rvert}{\lvert SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)} + SS_{Z_2}\rvert}$
	$Unit(GroupZ_1Z_2)$	$n-q-2$	$SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)}$	
$Within$	$Time$	$p-1$	SS_{Time}	$T_{W_4} = \dfrac{\lvert SS_{Time\times Unit(Group)}\rvert}{\lvert SS_{Time\times Unit(Group)} + SS_{Time}\rvert}$
	$Time\times Group$	$(p-1)\times(q-1)$	$SS_{Time\times Group}$	$T_{W_5} = \dfrac{\lvert SS_{Time\times Unit(Group)}\rvert}{\lvert SS_{Time\times Unit(Group)} + SS_{Time\times Group}\rvert}$
	$Time\times Unit(Group)$	$(p-1)\times(n-q)$	$SS_{Time\times Unit(Group)}$	

(1-4) التجربة:

أجريت تجربة حول دراسة تأثير بعض العوامل (الداخلية والخارجية) في أوزان عدد من الأغنام , من خلال قياس أوزانها التي توافرت من ضمن التجربة لفترة خمس سنوات وعلى أربعة فصول لكل سنة فقد أخذت هذه التجربة من قسم الثروة الحيوانية في جامعة البصرة كلية الزراعة . وقد قمنا بتصميم هذه التجربة وفق نموذج القياسات المتكررة المتعدد المتغيرات ذي اتجاه واحد مع الأخذ بالحسبان وجود تأثير العاملين المرافقين (المستقلين). وقد قمنا بإيجاد تحليل التباين لهذه التجربة من خلال تجزئة الاختلافات الكلية إلى صنفين :

الصنف الأول : هو الاختلاف بين العناصر أي الاختلافات الجوهرية بين قياسات العناصر التي ليس بالأمكان التحكم بها أو تغيرها.

أما الصنف الثاني : فهو الاختلاف داخل الوحدات الذي يعود إلى عوامل خارجية فقد قمنا بتقسيم التجربة إلى خمس مجموعات وتم دراسة القياسات على خمس سنوات ولأربعة فصول خلال فترة التجربة.

وبموجب الصيغة الرياضية للنموذج المدروس وبتطبيق النموذج أعلاه على التجربة نحصل على النتائج الاتية:

جدول تحليل التباين للتأثيرات العشوائية لتصميم نموذج القياسات المتكررة المتعدد المتغيرات ذات الاتجاه الواحد في التجربة بعامل واحد بين الوحدات بمعيار وولكس .

	Source	D.F	SS	Wilks criterion
	Group	**4**	SS_G	**0.929**
	Z_1	**1**	SS_{Z_1}	**0.9114**
Between	Z_2	**1**	SS_{Z2}	**0.3524**
	Unit(Group $Z_{1,}Z_2$**)**	**8**	$SS_{Unit(GroupZ_1Z_2)}$	
	Time	**4**	SS_{Time}	**0.3715**
Within	**Group×Time**	**6**	$SS_{T\times G}$	**0.4814**
	Unit(Group)	**14**	$SS_{Unit(Group)}$	

جدول اختبار الفرضيات لتأثير العامل بين الوحدات والعاملين المرافقين والعامل داخل الوحدات (الزمن والمجموعات أو السنوات) والتفاعل بينهما بالمختبر الإحصائي F .

Source	Wilks	F value	Num D.F	Den D.F	Pr>F
Group	**0.929**	**6.7218**	**4**	**8**	**2.39 , 3.51**
Z_1	**0.9114**	**0.0778**	**1**	**8**	**6.26, 15.52**
Z_2	**0.3524**	**1.47**	**1**	**8**	**6.26, 15.52**
Time	**0.3715**	**0.09626**	**4**	**40**	**1.66 , 2.03**
Time×Group	**0.4814**	**0.34961**	**16**	**40**	**1.32 , 1.47**

أوزان الأغنام مقاسة بالكيلو غرام (بيانات التجربة) بيانات أصلية لمدة خمس سنوات وعلى أربعة فصول لكل سنة

station	units	First year				Second year				Third year				Fourth year				Fifth year			
		Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn	Winter	Spring	Summer	Autumn
1	1	33.21	35.94	37.21	37.68	37.92	38.06	38.65	39.2	39.5	39.78	39.78	40.12	40.51	40.78	41.06	41.11	41.33	41.44	41.61	41.8
	2	3.45	3.63	3.66	3.69	3.72	3.74	3.76	3.78	3.8	3.83	3.83	3.85	3.86	3.87	3.9	3.9	3.91	3.92	3.92	3.94
	3	17.22	17.94	18.06	18.14	18.25	18.27	18.33	18.4	18.44	18.47	18.48	18.53	18.58	18.59	18.62	18.62	18.66	18.69	18.74	18.78
2	1	41.86	41.97	42.19	42.37	42.67	42.71	42.18	42.93	43.12	43.34	43.36	43.63	43.83	44	44.16	44.2	44.32	44.52	44.62	44.7
	2	3.94	3.95	3.96	3.97	3.98	3.99	3.99	4	4.01	4.01	4.01	4.03	4.03	4.03	4.04	4.04	4.05	4.05	4.06	4.07
	3	18.78	18.82	18.85	18.87	18.89	18.89	18.91	18.93	18.96	18.989	18.98	19.03	19.06	19.07	19.09	19.09	19.11	19.12	19.14	19.17
3	1	44.77	44.92	45.06	45.22	45.4	45.43	45.56	45.68	45.86	46.01	46.03	46.13	46.22	46.32	46.47	46.48	46.58	46.69	46.75	46.85
	2	4.07	4.08	4.09	4.1	4.11	4.11	4.12	4.12	4.13	4.14	4.14	4.14	4.15	4.16	4.16	4.16	4.17	4.17	4.18	4.19
	3	19.18	19.2	19.23	19.24	19.26	19.26	19.31	19.33	19.36	19.38	19.38	19.39	19.4	19.42	19.43	19.44	19.47	19.05	19.53	19.55
4	1	46.89	47.32	47.6	47.71	47.8	47.85	48.01	48.1	48.27	48.35	48.4	48.55	48.79	48.95	49.08	49.08	49.39	49.49	49.59	49.7
	2	4.19	4.19	4.21	4.21	4.23	4.23	4.24	4.25	4.25	4.25	4.27	4.27	4.27	4.28	4.28	4.28	4.29	4.31	4.31	4.32
	3	19.55	19.57	19.59	19.61	19.65	19.65	19.66	19.69	19.71	19.73	19.74	19.77	19.79	19.82	19.84	19.84	19.88	19.94	19.97	19.99
5	1	49.73	49.95	50.18	50.37	50.71	50.8	51.13	51.29	51.45	51.74	51.76	52.18	52.5	52.85	53.14	53.15	53.97	54.44	55.6	58.43
	2	4.33	4.34	4.34	4.36	4.38	4.38	4.4	4.42	4.43	4.45	4.45	4.46	4.48	4.49	4.52	4.52	4.56	4.6	4.68	4.8
	3	19.99	20.03	20.05	20.07	20.08	20.09	20.12	20.15	20.19	20.21	20.22	20.29	20.36	20.39	20.45	20.48	20.54	20.7	20.81	21.43

References

[1] A.S.,AL-Mouel ,"Multivariate Repeated measures Models and Comparison of Estimators" Ph.D.Thesis, East China Normal university China **(2004)**.

[2] A.S., AL-Mouel," On nested Repeated Measures Model" .M.Sc.Thesis, The University of Basrah , Iraq **(1990)**.

[3] A.S.,AL-Mouel, " Nested Repeated measures model sufficiency and Estimation". Chinese Journal of Applied probability and statistics,20, 133-146 **(2004)**.

[4] T.W.,Anderson, ,"An introduction to multivariate statistical Analysis ", Wily, New York **(1984)** .

[5] S.F.,Arnold, "Products of problems and patterned Covariance Matrices that arise from Interchangeable Random Variables", Stanford university . Technical Report No. 46 **(1970)**.

[6] S.F.,Arnold,"A coordinate – free Approach to finding Optimal Procedures for Repeated Measures Design " .Ann. .Statist. 7, 812-822 **(1979)**.

[7] V.M,Chinchilli, and W.H.Carter, "A likelihood Ratio Test for a patterned Covariance Matrix in Multivariate Growth Curve Model ",Biometrics, 40,151-156 **,(1984)**.

[8] H.J.,Keselman, and et al,"Statistical practices of Educational Researchers: An analysis of their ANOVA ,MANOVA, and ANCOVA analysis",Rev. Educational Research, 68,350-386 **.(1998)**.

[9] S.S.,Wilks,"Sample Criteria for Testing Equality of Means Equality of Variances and Equality of Covariances in a Normal Multivariate distribution" Ann. Math. Statist.17,257-281 **(1946)**.

Abstract

This research is devoted to study of one-way Multivariate repeated measurements analysis of covariance model (MRM ANCOVA), which contains one between-units factor (Group with q levels) ,one within-units factor (Time with p levels) and two covariates (Z_1, Z_2) .

For this model the two covariates is time-independent, that is measured only once.