n-Hosoya polynomials for Pentagonal Chains

Ali Aziz Ali
aliazizali1933@yahoo.com
Academic
University of Mosul

Hadeel Abdullah Meshw
Directorate of General Education
Nineveh

Received on: 02/05/2011 **Accepted on: 21/06/2011**

ABSTRACT

The diameter, with respect to the n-distance of the graph PC_m which represents a straight chain consisting of m pentagonal rings, is obtained in this paper. The n-Hosoya polynomial of PC_m, for all m and n, where $3 \le n \le 3m+2$, is also obtained.

Keywords: n-distance , n-Hosoya polynomials, Pentagonal Chains

متعددات حدود هوسويا−n لسلسلة حلقات خماسية

علي عزيز علي
أكاديمي
جامعة الموصل

هديل عبد الله مشو
إعدادية كانيلان للبنين
مديرية تربية نينوى

تاريخ استلام البحث: 2011/05/02 **تاريخ قبول البحث: 2011/06/21**

الملخص

في هذا البحث تم إيجاد القطر نسبة إلى المسافة −n لبيان PC_m الذي يمثل سلسلة خطية مكونة من m من الحلقات الخماسية . وكذلك تم الحصول على متعددة حدود هوسويا −n للبيان PC_m لكل m و n ، إذ أن $3 \le n \le 3m+2$.

الكلمات المفتاحية: المسافة−n ، متعددة حدود هوسويا−n ، سلاسل خماسية.

1. المقدمة:

نتبع المفاهيم والمصطلحات في بحثنا هذا كما وردت وعرفت في المصادر [5,6,7]. ليكن v رأسا في بيان متصل G ولتكن S مجموعة مكونة من $(n-1)$ من رؤوس G ، إذ أن $2 \le n$ ،عندئذ نعرف **المسافة − n** في G، والتي يرمز لها $d_n(v,S|G)$ أو اختصارا $d_n(v,S)$ ، بالصيغة [1]:

$$d_n(v,S) = \min\{d(v,u) : u \in S\} \qquad \dots(1.1)$$

يعرف **القطر − n** والذي يرمز له $diam_n G$ كالآتي:

$$diam_n G = \max\{d_n(v,S) : v \in V, S \subseteq V(G), |S| = n-1\} \qquad \dots(1.2)$$

واضح أن لكل $2 \le m \le n \le p$ ، إذ أن p هي رتبة البيان G ، يكون [4]:

$$diam_n G \le diam_m G \le diam\, G \qquad \dots(1.3)$$

دليل وينر− n للبيان G ، والذي يرمز له بـ $W_n(G)$ يعرف كالآتي [1]:

$$W_n(G) = \sum_{\substack{(v,S)\\ v\in V, S\subseteq V}} d_n(v,S) \qquad \ldots (1.4)$$

حيث يؤخذ المجموع على جميع الأزواج المرتبة (v,S)، لكل $v \in V(G)$ ، ولكل $S \subseteq V(G)$ ، إذ أن $|S| = n-1$.

تعرف **متعددة حدود هوسويا−n** للبيان المتصل G ، والتي يرمز لها $H_n(G;x)$ بالصيغة الآتية:

$$H_n(G;x) = \sum_{(v,S)} x^{d_n(v,S)} , \qquad \ldots(1.5)$$

إذ أن $3 \le n \le p$ وأن المجموع يؤخذ لجميع الأزواج المرتبة (v,S) ، $v \in V(G)$ ، $S \subseteq V(G)$ و $|S| = n-1$.
ويمكن التعبير عن $H_n(G;x)$ بالشكل الآتي:

$$H_n(G;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(G,k)\, x^k , \qquad \ldots (1.6)$$

إذ أن δ_n هو قطر−n للبيان G وأن $C_n(G,k)$ عدد الأزواج (v,S) بحيث أن $d_n(v,S) = k$.
مما تقدم نستنتج أن:

$$W_n(G) = \sum_{k=1}^{\delta_n} k\, C_n(G,k) = \frac{d}{dx} H_n(G;x)\Big|_{x=1} . \qquad \ldots(1.7)$$

ليكن $C_n(v,G,k)$ عدد المجموعات الجزئية S بـ $(n-1)$ من رؤوس G بحيث أن
$d_n(v,S) = k$, $n \ge 3$, $0 \le k \le \delta_n$,
عندئذ نعرف **متعددة حدود هوسويا−n** للرأس v في G والتي يرمز لها $H_n(v,G;x)$ بالصيغة الآتية [1]:

$$H_n(v,G;x) = \sum_{k\ge 0} C_n(v,G,k) x^k . \qquad \ldots(1.8)$$

واضح أن

$$H_n(G;x) = \sum_{v\in V} H_n(v,G;x) \qquad \ldots (1.9)$$

ملاحظة : إذا كانت A مجموعة جزئية غير خالية من $V(G)$ فأننا نعرف [4]:

$$H_n(A,G;x) = \sum_{a\in A} H_n(a,G;x) . \qquad \ldots(1.10)$$

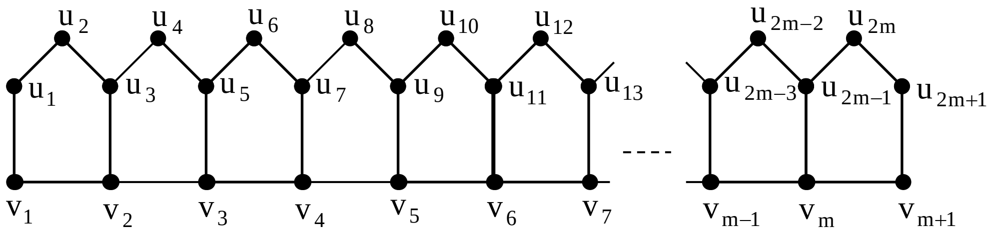
وإذا كانت $A_1, A_2, \ldots, A_r$ تجزئة لـ $V(G)$ ، فأن:

$$H_n(G;x) = \sum_{i=1}^{r} H_n(A_i,G;x) . \qquad \ldots(1.11)$$

في هذا البحث نجد صيغة لحساب قطر − n للبيان PC_m الموضح في الشكل 2.1، ومن ثم نجد متعددة حدود هوسويا − n للبيان PC_m ولكل قيم n و m حيث أن $3 \le n \le p(=3m+2)$.

2. القطر -n للبيان PC_m :

يُعرف البيان PC_m على أنه مكون من m من الحلقات الخماسية المتتابعة إذ أن كل حلقتين متتابعتين تشتركان بحافة واحدة فقط مكونةً سلسلة خطية كما هو في الشكل 2.1 .



الشكل 2.1 – البيان PC_m

واضح أن رتبة PC_m هي $3m+2$ ، وأن حجمه $4m+1$ ، وقطره $m+2$ لكل $2 \le m$. البيان PC_m يَرِد استعماله في بعض مجالات الكيمياء مُمثلاً لتركيب جزيء كيميائي معين ولقيمة معينة لـ m . لاحظ أن أعلى درجة لرؤوس PC_m هي 3 . في هذا البند نجد القطر-n للبيان PC_m .

المبرهنة 2.1 : ليكن PC_m بيان سلسلة خماسية الحلقات خطية من الرتبة $p = 3m+2$ وأن $2 \le m$ فإن:

$$\operatorname{diam}_n PC_m = \begin{cases} m+2-\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor, & 2 \le n \le p-6 \text{ عندما يكون } \\ \lfloor \frac{p-n}{2} \rfloor + 1, & p-5 \le n \le p \text{ عندما يكون } \end{cases}$$

البرهان: من الشكل 2.1 ، نلاحظ أن:

$\operatorname{diam}_n PC_m = e_n(u_1)$.

وأضح أن الاختلاف المركزي -n للرأس u_1 [1] هو المسافة -n من u_1 إلى مجموعة جزئية S مكونة من أول (n-1) من رؤوس المتتابعة:

u_{2m}, u_{2m+1} ; $u_{2m-2}, u_{2m-1}, v_{m+1}$; u_{2m-4}, u_{2m-3}, v_m ; ... ; $u_{2m-2j}, u_{2m-2j+1}, v_{m-j+2}$; ... ; u_6, u_7, v_5 ; u_5, v_4 ; u_4, v_3 ; u_3, v_2 ; u_2, v_1 .

ونجد فيها أن لكل j ، $1 \le j \le m-3$ ، كل رأس من مجموعة $\{u_{2m-2j}, u_{2m-2j+1}, v_{m-j+2}\}$ له المسافة الاعتيادية نفسها عن الرأس u_1 وهذه المسافة هي $m-j+2$ ، حيث أن $4 \le m$.

بما أن $d(u_1, u_{2m}) = m+2 = d(u_1, u_{2m+1})$ ، فإن:

$$e_n(u_1) = m+2-\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor, \ \forall\, 2 \le n \le p-6$$

فضلاً عن ذلك نجد أن:

– عندما تكون $n=p-4$ أو $n=p-5$ فإن $e_n(u_1)=3$ ، عندئذ يكون:

$$e_n(u_1) = d_n(u_1,S),\ S \subseteq V(PC_m) - \{u_1, u_2, u_3, v_1, v_2\},\ |S| = p-5 \ \textbf{or}\ p-6$$

– وعندما يكون $n=p-2$ أو $n=p-3$ فإن $e_n(u_1)=2$ ، عندئذ يكون:

$$e_n(u_1) = d_n(u_1,S),\ S \subseteq V(PC_m) - \{u_1, u_2, v_1\},\ |S| = p-3 \ \textbf{or}\ p-4$$

– وعندما يكون $n=p$ أو $n=p-1$ فإن $e_n(u_1)=1$ ، عندئذ يكون:

$$e_n(u_1) = d_n(u_1,S),\ S \subseteq V(PC_m) - \{u_1\},\ |S| = p-1 \ \textbf{or}\ p-2$$

وبهذا يتم البرهان. ■

العبارة الآتية مفيدة جداً في إيجاد $C_n(v, G, k)$ لكل بيان G ولكل رأس v في G. وهذه بدورها تساعدنا في إيجاد $H_n(v, G; x)$ ومن ثم الحصول على $H_n(G; x)$.

العبارة 2.2 [4]: ليكن G بياناً متصلاً برتبة p وأن $3 \le n \le p$ وأن $v \in V(G)$.
إذا كان α عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة (قياسية) k عن الرأس v، وإن β عدد الرؤوس التي تبعد بمسافة **تزيد** على k عن الرأس v ، فإن:

$$C_n(v,G,k) = \binom{\alpha+\beta}{n-1} - \binom{\beta}{n-1} .$$

3. متعددات حدود هوسويا -n للبيان PC_m :

واضح أن:
$$H_n(PC_m;x) = \sum_{k=0}^{\delta_n} C_n(PC_m,k)\,x^k$$

إذ أن $3 \le n \le 3m+2$ وأن δ_n هو القطر -n المحدد بالمبرهنة السابقة 2.1 وسوف نرمز $p = 3m + 2$. بالنسبة لهذا البيان فإن متعددة حدود هوسويا -n تعتمد على إيجاد $C_n(PC_m, k)$ وهذا المعامل لـ x^k يتغير كثيراً بالنسبة إلى قيمة k ولذلك نحتاج إلى معالجة حالات متعددة . وسوف نجزء $V(PC_m)$ إلى مجموعتين جزئيتين رئيستين كالآتي (لاحظ الشكل 2.1):

$$V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_{m+1} \} , \quad U = \{ u_1, u_2, \ldots, u_{2m}, u_{2m+1} \}$$

والآن نعرف لكل $2 \le k \le \delta_n$:

$$C_n(V,PC_m,k) = \sum_{i=1}^{m+1} C_n(v_i,PC_m,k)$$
$$C_n(U,PC_m,k) = \sum_{i=1}^{2m+1} C_n(u_i,PC_m,k)$$

واضح أن: $C_n(PC_m, k) = C_n(V, PC_m, k) + C_n(U, PC_m, k)$

ولأجل إيجاد كل من $C_n(V, PC_m, k)$ و $C_n(U, PC_m, k)$ لكل قيم k سوف نحتاج إلى العديد من العبارات والتي سوف نبرهنها فيما يأتي.

العبارة 3.1 : إذا كان $3 \le m$ ، $3 \le n \le p$ و $2 \le k \le \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ فإن:

$$C_n(V,PC_m,k) = 2\binom{p-3k+3}{n-1} + (m-2k+3)\binom{p-6k+8}{n-1} - 2\binom{p-6k+3}{n-1} - 2\binom{p-6k+6}{n-1} - (m-2k+1)\binom{p-6k+2}{n-1} \quad \ldots(3.1)$$

البرهان: نلاحظ وجود ثلاثة حالات لـ $C_n(v_i, PC_m, k)$ ، $v_i \in V$ نسبة لقيم i .

الحالة (1): عندما تكون $i \in \{1, 2, \ldots, k-1; m-k+3, m-k+4, \ldots, m+1\}$

لأجل $1 \le i \le k-1$ هنالك بالضبط ثلاثة رؤوس، وهي: $u_{2(k+i)-4}$ و $u_{2(k+i)-3}$ و v_{k+i} ، كل منها يبعد بمسافة k عن v_i ؛ وأن هنالك $(p-3(k+i-1))$ من الرؤوس والتي كل منها يبعد عن v_i مسافة **تزيد** على k. لذلك باستعمال العبارة 2.2 نحصل على:

$$C_n(v_i, PC_m, k) = \binom{p-3(k+i-2)}{n-1} - \binom{p-3(k+i-1)}{n-1}. \qquad \ldots(3.2)$$

بالنسبة لدالة المسافة فإن البيان PC_m يمتلك نوعاً من التماثل عندما نبدأ من v_1 ونفسها إذا بدأنا برأس الانتهاء v_{m+1} ، وبذلك فإن عدد المجموعات الجزئية S بـ $(n-1)$ من الرؤوس بحيث أن:

$d_n(v_i, S) = k \ , m-k+3 \le i \le m+1$

هو المعطى نفسه في (3.2) وعليه فإن العدد الكلي للأزواج (v_i, S) في هذه الحالة هو:

$$2\sum_{i=1}^{k-1}\left[\binom{p-3(k+i-2)}{n-1} - \binom{p-3(k+i-1)}{n-1}\right] = 2\left[\binom{p-3k+3}{n-1} - \binom{p-6k+6}{n-1}\right] \qquad \ldots(3.3)$$

الحالة (2): عندما يكون $i=k$ أو $i=m-k+2$ ، عندئذ يوجد بالضبط خمسة رؤوس، وهي $u_1, u_2, u_{4k-4}, u_{4k-3}, v_{2k}$ كل منها يبعد مسافة k عن الرأس v_k ، ويوجد $(p-6k+3)$ من الرؤوس التي تبعد مسافة تزيدُ على k من الرأس v_k . وعليه، فإن:

$$C_n(v_k, PC_m, k) = \binom{p-6k+8}{n-1} - \binom{p-6k+3}{n-1}. \qquad \ldots(3.4)$$

وبسبب التماثل الذي ذكرناه للبيان PC_m ، فإن $C_n(v_{m-k+2}, PC_m, k)$ هو نفسه الذي ذكرناه في (3.4). فإن العدد الكلي للأزواج (v_i, S) لهذه الحالة هو:

$$2\binom{p-6k+8}{n-1} - 2\binom{p-6k+3}{n-1}. \qquad \ldots(3.5)$$

الحالة (3): عندما يكون $i = k+1, k+2, \ldots, m-k+1$ ، وأن $k \ne (m+1)/2$

عندما يكون m عدداً فردياً، فإنه بالضبط يوجد ستة رؤوس، وهي الآتية:

$u_{2(i+k)-3}, u_{2(i+k)-4}, u_{2(i-k)+2}, u_{2(i-k)+1}, v_{i-k}, v_{i+k}$ كل منهم يبعد مسافة k عن الرأس v_i ، وكذلك يوجد $(p-6k+2)$ من الرؤوس كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على k عن الرأس v_i . وعليه، فإن:

$$C_n(v_i, PC_m; k) = \binom{p-6k+8}{n-1} - \binom{p-6k+2}{n-1} \qquad \ldots(3.6)$$

لقيم i المذكورة في هذه الحالة، وعدد الأزواج (v_i, S) بحيث $d_n(v_i, S) = k$ لهذه الحالة هو $(m-2k+1)$.

وأخيراً، من (3.3) ، (3.4) ، (3.5) و(3.6) ، نحصل، لكل $2 \le k \le \lfloor (m+1)/2 \rfloor$ ، على $C_n(V, PC_m, k)$ كما هي معطاة في (3.1) . ■

العبارة 3.2: إذا كان m عدداً فردياً و $3 \le m$ وأن $3 \le n \le p$ فإن لكل k، إذ أن $(m+3)/2 \le k \le m$ فإن:

$$C_n(V, PC_m, k) = 2\binom{p-3k+3}{n-1} \qquad \ldots(3.7)$$

البرهان: لأجل $i=1, 2 , \dots , m - k + 1$ يوجد ثلاثة رؤوس، وهي $v_{k+i} , u_{2(k+i)-4} , u_{2(k+i)-3}$ والتي كل منها يبعد مسافة k عن الرأس v_i، وأن هنالك $(p-3(k+i-1))$ من الرؤوس والتي يبعد كل منها مسافة **تزيد** على k عن الرأس v_i. وعليه، لأجل $i=1, 2 , \dots , m - k + 1$ ، فإن:

$$C_n(v_i, PC_m; k) = \binom{p-3(k+i-2)}{n-1} - \binom{p-3(k+i-1)}{n-1} \quad \dots (3.8)$$

فضلاً عن ذلك فإن هنالك رأسان هما u_{2m} , u_{2m+1} كل منهما يبعد مسافة k عن الرأس v_{m-k+2} ولا يوجد أي رأس يبعد مسافة **تزيد** على k عن هذا الرأس. لذلك فأن:

$$C_n(v_{m-k+2}, PC_m, k) = \binom{2}{n-1} \quad \dots (3.9)$$

واضح أنه بسبب تماثل PC_m، فإن: $C_n(v_i, PC_m; k) = C_n(v_{m-i+2}, PC_m, k)$

لكل $i=1 , 2 , \dots , m - k + 1 , m - k + 2$ وهكذا من (3.8) و(3.9)، نحصل على:

$$C_n(V, PC_m, k) = 2\sum_{i=1}^{m-k+1}\left[\binom{p-3(k+i-2)}{n-1} - \binom{p-3(k+i-1)}{n-1}\right] + 2\binom{2}{n-1}$$

$$= 2\left[\binom{p-3k+3}{n-1} - \binom{2}{n-1}\right] + 2\binom{2}{n-1} = 2\binom{p-3k+3}{n-1},$$

لأجل $(m+3)/2 \le k \le m$ وأن m عدد فردي. ■

العبارة 3.3: إذا كان m عدداً زوجياً و $2 \le m$ وأن $3 \le n \le p$ ، فإن:

$$C_n(V, PC_m, k) = 2\binom{p-3k+3}{n-1} + \begin{cases} \binom{4}{n-1} - 2\binom{2}{n-1} & , \; k = m/2+1 \\ \text{zero} & , \; m/2+2 \le k \le m \end{cases} \quad \dots (3.10)$$

البرهان : إذا كان $m/2+1 \le k \le m$ فإن هنالك ثلاثة رؤوس وهي $v_{k+i} , u_{2(k+i)-4} , u_{2(k+i)-3}$ والتي كل منها تبعد مسافة k عن الرأس v_i لأجل $i=1 , 2 , \dots , m - k + 1$، وأن هنالك $p - 3(k + i - 1)$ من الرؤوس التي تبعد مسافة **تزيد** على k من v_i . وعليه فإن عدد الأزواج (v_i , S) بحيث أن $d_n (v_i , S)=k$ هو ذلك المبين في العلاقة (3.8) . فضلاً عن ذلك، فإن هنالك بالضبط رأسان هما u_{2m+1} , u_{2m} كل منهما تبعد مسافة k ، إذ أن $m/2+2 \le k \le m$ ، عن الرأس v_{m-k+2} **ولا يوجد** أي رأس يبعد مسافة **تزيد** على k عن هذا الرأس. لذلك فإن عدد الأزواج (v_{m-k+2} , S) بحيث $d_n (v_{m-k+2} , S)=k$ هو $\binom{2}{n-1}$. والآن، لأجل $k= m/2+1$ توجد أربعة رؤوس وهي $u_1 , u_2 , u_{2m} , u_{2m+1}$ كل منها يبعد مسافة $m/2+1$ عن الرأس $v_{m/2+1}$ ولا يوجد أي رأس يبعد بمسافة **تزيد** على $m/2+1$ عن هذا الرأس. لذلك فإن:

$$C_n(v_{m/2+1}, PC_m, m/2+1) = \binom{4}{n-1}$$

وبسبب تماثل البيان PC_m و لأجل $i=1 , 2 , \dots , m - k + 1 , m - k + 2$، فأن:

$$C_n(v_i, PC_m, k) = C_n(v_{m-i+2}, PC_m, k) \; .$$

وبهذا يتم البرهان . ■

يمكن أن نستنتج من ملاحظة الشكل 2.1 أن:

$$C_n(V,PC_m,m+1)=2\binom{2}{n-1}$$

سواءً كان m فردياً أو زوجياً . لذلك من العبارات 3.1 و 3.2 و 3.3 نحصل على النتيجة الآتية:

نتيجة 3.4: إذا كان $3\le m$ وأن $3\le n\le 3m+2$ فإن لكل $2\le k\le m+1$ يكون:

$$C_n(V,PC_m,k)=2\binom{p-3k+3}{n-1}+R \qquad \dots(3.11)$$

حيث أن:

$$R=\begin{cases}(m-2k+3)\binom{p-6k+8}{n-1}-(m-2k+1)\binom{p-6k+2}{n-1}-2\binom{p-6k+3}{n-1}-2\binom{p-6k+6}{n-1}, & 2\le k\le\lfloor (m+1)/2\rfloor\\[2ex] \binom{4}{n-1}-2\binom{2}{n-1}, & k=\frac{m}{2}+1 \text{ وأن } m \text{ عدد زوجي}\\[1ex] \text{zero} & \text{لأجل جميع قيم } k \text{ الأخرى بين 2 و } m+1\end{cases}$$

ملاحظة (1): عندما يكون m=2 فإن لكل $3\le n\le p(=8)$ فإن لدينا:

$$C_n(V,PC_2,2)=2\binom{5}{n-1}+\binom{4}{n-1}\ ,\ C_n(V,PC_2,3)=2\binom{2}{n-1}\ .$$

لأجل إيجاد $C_n(PC_m\ ,k)$ نحتاج إلى إيجاد $C_n(U\ ,PC_m\ ,k)$ وهذه تتطلب معالجة حالات كثيرة معتمدة على قيمة k ، لذلك سوف نجد صيغاً لقيمها بالنسبة إلى قيم k في العبارات الآتية، إذ أن $2\le k\le\delta_n$.

العبارة 3.5: لأجل $3\le m$ و $3\le n\le p$ فإن:

$$C_n(U,PC_m,2)=(m+2)\binom{p-3}{n-1}+(m-1)\left[\binom{p-4}{n-1}-\binom{p-8}{n-1}\right]-(m-2)\binom{p-7}{n-1}-2\left[\binom{p-5}{n-1}+\binom{p-6}{n-1}\right] \qquad \dots(3.12)$$

البرهان: يوجد رأسان وهما u_3 و v_2 يبعدان مسافة 2 عن الرأس u_1 (وبالمثل فإن كلا الرأسين v_m و u_{2m-1} يبعد مسافة 2 عن الرأس u_{2m+1})، وأن هنالك $(p-5)$ من الرؤوس كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 2 عن الرأس u_1 (وبالمثل u_{2m+1}). وعليه، فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,2)=\binom{p-3}{n-1}-\binom{p-5}{n-1}\ ,\ i=1,2m+1. \qquad \dots(3.13)$$

فضلاً عن ذلك، فإن هنالك ثلاثة رؤوس v_1 , v_2 , u_4 (وبالمثل v_m , v_{m+1} , u_{2m-2}) كل واحد منها يبعد مسافة 2 عن الرأس u_2 (وبالمقابل u_{2m})، وأن هنالك $(p-6)$ من الرؤوس كل واحد منها يبعد مسافة **تزيد** على 2 عن الرأس u_2 (وبالمقابل عن u_{2m})، وعليه فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,2)=\binom{p-3}{n-1}-\binom{p-6}{n-1}\ ,\ i=2,2m\cdot \qquad \dots(3.14)$$

وأخيرا هنالك أربعة رؤوس وهي u_{i+2} , $v_{i/2+1}$, u_{i-2} , $v_{i/2}$ كل منها يبعد مسافة 2 عن الرأس u_i لأجل $i= 4 , 6 , \ldots , 2m - 2$ ، ويوجد $(p - 7)$ من الرؤوس كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 2 عن الرأس u_i وعليه، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, 2) = \binom{p-3}{n-1} - \binom{p-7}{n-1} \quad , \ i = 4, 6, \ldots, 2m-2 \cdot \qquad \ldots(3.15)$$

وكذلك توجد أربعة رؤوس وهي $v_{(i-1)/2}, u_{i-2}, v_{(i+3)/2}, u_{i+2}$ كل منها يبعد مسافة 2 عن الرأس u_i لأجل $i=3,5$ $, \ldots, 2m - 1$، ويوجد $(p - 8)$ من الرؤوس والتي كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 2 عن الرأس u_i، وعليه فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, 2) = \binom{p-4}{n-1} - \binom{p-8}{n-1} \quad , \ i= 3 , 5 , \ldots , 2m - 1. \qquad \ldots(3.16)$$

وفي النهاية من (3.13) ، (3.14) ، (3.15) ، (3.16) وبجمع المقادير نحصل على المقدار (3.12) . وبهذا يتم البرهان. ■

ملاحظة (2): إذا كان $3 \le n \le p$ فإنه عندما $m=2$ يكون لدينا:

$$C_n(U, PC_2, 2) = 4\binom{5}{n-1} + \binom{4}{n-1} - 2\binom{3}{n-1} - 2\binom{2}{n-1}. \ ■$$

العبارة 3.6 : لأجل $4 \le m$ و $3 \le n \le p$ ، فإن:

$$C_n(U, PC_m, 3) = (m-4)\binom{p-7}{n-1} + (m-3)\left[\binom{p-8}{n-1} - \binom{p-12}{n-1}\right]$$
$$+2\binom{p-5}{n-1} + 2\binom{p-6}{n-1} - (m-2)\binom{p-11}{n-1} - 2\binom{p-10}{n-1} . \qquad \ldots(3.17)$$

البرهان : يوجد رأسان وهما u_{i+3} و v_3 كل منهما يبعد مسافة 3 عن الرأس u_i ، لأجل $i=1,2$ ؛ ويوجد $(p-i-6)$ من الرؤوس التي كل منها على بعد يزيد على 3 عن الرأس u_i. وعليه، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, 3) = \binom{p-i-4}{n-1} - \binom{p-i-6}{n-1} , \ i =1 , 2 \qquad \ldots(3.18)$$

وكذلك، يوجد رأسان وهما v_4 و u_6 كل منهما يبعد مسافة 3 عن الرأس u_3 ، ويوجد $p - 10$ من الرؤوس كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 3 عن هذا الرأس u_3 . لذلك فإن:

$$C_n(u_3, PC_m, 3) = \binom{p-8}{n-1} - \binom{p-10}{n-1} \qquad \ldots(3.19)$$

وبسبب التماثل في البيان PC_m ، فإنه لأجل $i= 1,2,3$ نلاحظ أن:

$$C_n(u_i, PC_m, 3) = C_n(u_{2m-i+2}, PC_m, 3)$$

وهكذا، نحصل من (3.18) و (3.19) على:

$$\sum_{i\in\alpha} C_n(u_i, PC_m, 3) == 2\left[\binom{p-5}{n-1} + \binom{p-6}{n-1} - \binom{p-7}{n-1} - \binom{p-10}{n-1}\right]. \qquad \ldots(3.20)$$

إذ أن $\alpha= \{ 1 , 2 , 3, 2m - 1 , 2m , 2m + 1 \}$

والآن إذا كان $i= 4,6,\ldots,2m-2$ ، فإن هنالك أربعة رؤوس وهي $v_{i/2-1}, u_{i-3}, v_{i/2+2}, u_{i+3}$ كل منها يبعد مسافة 3 عن الرأس u_i ؛ ويوجد $(p-11)$ رأساً كل منها يبعد عن الرأس u_i مسافة **تزيد** على 3 وعليه، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, 3) = \binom{p-7}{n-1} - \binom{p-11}{n-1}, \; i= 4,6,\ldots, 2m-2 . \qquad \ldots(3.21)$$

كذلك، توجد أربعة رؤوس هي $v_{(i+1)/2-2}, u_{i-3}, v_{(i+1)/2+2}, u_{i+3}$ ، لأجل $i=5, 7,\ldots , 2m-3$ كل منها يبعد مسافة 3 عن الرأس u_i ، ويوجد $(p-12)$ من الرؤوس والتي كل منها يبعد عن الرأس u_i مسافة **تزيد** على 3 . وعليه، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, 3) = \binom{p-8}{n-1} - \binom{p-12}{n-1}, \; i= 5,7,\ldots, 2m-3 . \qquad \ldots (3.22)$$

وأخيراً، من (3.20) و(3.21) و(3.22) وبالجمع والتبسيط نحصل على (3.17) وبهذا يتم البرهان. ■

ولإكمال حالات كون $k=3$ بالنسبة لقيم $m=2$ و$m=3$ نعطي الملاحظة الآتية:

ملاحظة (3): إذا كان $3 \le n \le p$ فإن:

$$C_n(U, PC_2, 3) = 2\binom{3}{n-1} + 2\binom{2}{n-1},$$

$$C_n(U, PC_3, 3) = 2\binom{6}{n-1} + 2\binom{5}{n-1} - \binom{4}{n-1} . \; ■$$

العبارة 3.7 : لأجل $m \ge 5$ ولكل $3 \le n \le p$ ، فإن:

$$C_n(U, PC_m, 4) = (m-2)\left[\binom{p-11}{n-1} - \binom{p-15}{n-1}\right] + (m-5)\left[\binom{p-12}{n-1} - \binom{p-16}{n-1}\right]$$
$$+2\left[\binom{p-7}{n-1} + \binom{p-8}{n-1}\right] - 2\left[\binom{p-9}{n-1} + \binom{p-13}{n-1}\right] \qquad \ldots(3.23)$$

البرهان: يوجد رأسان وهما v_4 ، u_{i+4} كل منهما على بعد 4 عن الرأس u_i لأجل $i=1,2$ ؛ ويوجد $(p-i-8)$ من الرؤوس كل منهم يبعد بمسافة **تزيد** على 4 عن الرأس u_i. وبذلك نحصل على:

$$C_n(u_i, PC_m, 4) = \binom{p-i-6}{n-1} - \binom{p-i-8}{n-1}, \; i= 1,2. \qquad \ldots (3.24)$$

كذلك، يوجد رأسان وهما v_5 ، u_{i+4} كل منهما يبعد بمسافة 4 عن الرأس u_i لأجل $i=3,4$ ؛ ويوجد $(p-i-9)$ من الرؤوس كل منهم يبعد بمسافة **تزيد** على 4 عن الرأس u_i. وبذلك فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, 4) = \binom{p-i-7}{n-1} - \binom{p-i-9}{n-1}, \; i= 3, 4. \qquad \ldots(3.25)$$

إضافة إلى ذلك، يوجد ثلاثة رؤوس وهي u_1 , u_9 , v_6 كل منها يبعد مسافة 4 عن الرأس u_5 ؛ ويوجد $(p-15)$ من الرؤوس كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 4 عن الرأس u_5 . وعليه فإن:

$$C_n(u_5,PC_m,4)=\binom{p-12}{n-1}-\binom{p-15}{n-1} \qquad \ldots(3.26)$$

وبسبب تماثل البيان PC_m فإن لدينا:

$$C_n(u_i,PC_m,4)=C_n(u_{2m-i+2},PC_m,4), \quad i=1,2,3,4,5.$$

وبناء على ذلك، من (3.24)، (3,25)، (3,26) نحصل على:

$$\sum_{i\in\beta} C_n(u_i,PC_m,4)=2\left[\binom{p-7}{n-1}+\binom{p-8}{n-1}+\binom{p-11}{n-1}\right]-2\left[\binom{p-9}{n-1}+\binom{p-13}{n-1}+\binom{p-15}{n-1}\right] \qquad \ldots(3.27)$$

إذ أن:

$\beta=\{1,2,3,4,5,2m-3,2m-2,2m-1,2m,2m+1\}$.

والآن، إذا كان $i=6,8,\ldots,2m-4$ ، فإن هنالك بالضبط أربعة رؤوس وهي $v_{i/2-2},u_{i-4},v_{i/2+3},u_{i+4}$ كل منهم يبعد مسافة 4 عن الرأس u_i ، ويوجد ($p-15$) من الرؤوس كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على 4 عن الرأس u_i . لذلك، فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,4)=\binom{p-11}{n-1}-\binom{p-15}{n-1}, \quad i=6,8,\ldots,2m-4\,. \qquad \ldots(3.28)$$

كذلك، إذا كان $i=7,9,\ldots,2m-5$ فإن هنالك أربعة رؤوس وهي $v_{(i+1)/2-3},u_{i-4},v_{(i+1)/2+3},u_{i+4}$ كل منهم يبعد مسافة 4 عن الرأس u_i ويوجد بالضبط ($p-16$) من الرؤوس كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على 4 عن الرأس u_i . لذلك، فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,4)=\binom{p-12}{n-1}-\binom{p-16}{n-1}, \; i=7,9,\ldots,2m-5. \qquad \ldots(3.29)$$

وأخيراً من (3.27) و(3.28) و(3.29) وبإجراء بعض الاختصار نحصل على (3.23)، وبهذا يتم البرهان. ■

ملاحظة (4): إذا كان $3\le n\le p$ فإن لقيم $m=2,3,4$ نحصل مباشرة على:

$$C_n(U,PC_2,4)=0\,,$$
$$C_n(U,PC_3,4)=2\left[\binom{4}{n-1}+\binom{3}{n-1}-\binom{2}{n-1}\right],$$
$$C_n(U,PC_4,4)=2\left[\binom{7}{n-1}+\binom{6}{n-1}+\binom{3}{n-1}-\binom{5}{n-1}\right]-\binom{2}{n-1}.$$

العبارة 3.8 : لأجل $7\le m$ و $3\le n\le p$ ، فإن:

$$C_n(U,PC_m,5)=(m-5)\binom{p-16}{n-1}+(m-6)\left[\binom{p-15}{n-1}-\binom{p-19}{n-1}\right]+2\left[\binom{p-9}{n-1}+\binom{p-10}{n-1}+\binom{p-13}{n-1}\right]$$
$$-(m-7)\binom{p-22}{n-1}-2\left[\binom{p-12}{n-1}+2\binom{p-18}{n-1}+\binom{p-21}{n-1}\right]. \qquad \ldots(3.30)$$

البرهان: توجد ثلاثة رؤوس وهي $v_{\frac{i-1}{2}+5},u_{i+5},u_{i+6}$ كل منها تبعد مسافة 5 عن الرأس u_i لأجل $i=1,3,5$ ،

وتوجد ($p-12-3\lfloor i/2\rfloor$) من الرؤوس والتي كل منها تبعد مسافة **تزيد** على 5 عن الرأس u_i. وعليه فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,5)=\binom{p-9-3\lfloor i/2\rfloor}{n-1}-\binom{p-12-3\lfloor i/2\rfloor}{n-1},\ \ i=1,3,5. \qquad ...(3.31)$$

فضلاً عن ذلك يوجد رأسان وهما $u_{i+5}, v_{\lfloor i/3\rfloor+5}$ كلاهما على بعد 5 من الرأس u_i لأجل $i=2,4$ ، ويوجد $(p-9-3i/2)$ من الرؤوس كل منها على بعد **يزيد** على 5 من الرأس u_i . لذلك فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,5)=\binom{p-7-3i/2}{n-1}-\binom{p-9-3i/2}{n-1},\ i=2,4. \qquad ...(3.32)$$

والآن نجد أن هنالك ثلاثة رؤوس وهي u_1, v_7, u_{11} كل منها على بعد 5 من الرأس u_6 ، ويوجد $(p-18)$ رأساً كلاً منهم على مسافة **تزيد** على 5 عن الرأس u_6. لذلك، فإن:

$$C_n(u_6,PC_m,5)=\binom{p-15}{n-1}-\binom{p-18}{n-1}. \qquad ...(3.33)$$

كذلك، توجد خمسة رؤوس وهي $u_1, u_2, v_8, u_{12}, u_{13}$ كل منها تبعد مسافة 5 عن الرأس u_7 ، ويوجد $(p-21)$ رأساً كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 5 عن الرأس u_7 لذلك، فإن:

$$C_n(u_7,PC_m,5)=\binom{p-16}{n-1}-\binom{p-21}{n-1}. \qquad ...(3.34)$$

وبسبب احتواء PC_m على تماثل معين فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,5)=C_n(u_{2m-i-2},PC_m,5)\ ,\qquad i=1,2,3,\ldots,7$$

وهكذا، من (3.31) و(3.32) و(3.33) و(3.34) نحصل على:

$$\sum_{i\in\gamma}C_n(u_i,PC_m,5)=2\left[\binom{p-9}{n-1}+\binom{p-10}{n-1}+\binom{p-13}{n-1}+\binom{p-16}{n-1}-\binom{p-12}{n-1}-2\binom{p-18}{n-1}-\binom{p-21}{n-1}\right] \qquad ...(3.35)$$

حيث أن:

$$\gamma=\{1,2,3,4,5,6,7,2m-5,2m-4,2m-3,2m-2,2m-1,2m,2m+1\}$$

وأخيراً، إذا كان $i=8,10,\ldots,2m-6$ ، فإن هنالك أربعة رؤوس وهي $v_{\frac{i}{2}-3}, u_{i-5}, v_{\frac{i}{2}+4}, u_{i+5}$ كل منها يبعد مسافة 5 عن الرأس u_i . ويوجد $(p-19)$ رأساً كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 5 عن الرأس u_i لذلك فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,5)=\binom{p-15}{n-1}-\binom{p-19}{n-1}.\ i=8,10,\ldots,2m-6. \qquad ...(3.36)$$

كذلك، إذا كان $i=9,11,\ldots,2m-7$ فإن هنالك ستة رؤوس وهي $v_{(i+1)/2-4}, u_{i-6}, u_{i-5}, v_{(i+1)/2+4}, u_{i+5}, u_{i+6}$ كل منها يبعد مسافة 5 عن الرأس u_i وإن هنالك $(p-22)$ رأساً كل منها يبعد مسافة **تزيد** على 5 عن الرأس u_i، لذلك فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,5)=\binom{p-16}{n-1}-\binom{p-22}{n-1}.\ i=9,11,\ldots,2m-7. \qquad ...(3.37)$$

وأخيراً، من (3.35) و(3.36) و(3.37) وبالجمع والتبسيط نحصل على (3.30)، وبهذا يتم البرهان. ■

ملاحظة (5): إذا كان $3\le n\le p$ فإن:

$$C_n(U,PC_2,5)=0,\ \ C_n(U,PC_3,5)=2\binom{2}{n-1},$$

$$C_n(U,PC_4,5)=2\left[\binom{5}{n-1}+\binom{4}{n-1}-\binom{2}{n-1}\right],$$

$$C_n(U,PC_5,5)=2\left[\binom{8}{n-1}+\binom{7}{n-1}+\binom{4}{n-1}-\binom{5}{n-1}\right]-\binom{2}{n-1},$$

$$C_n(U,PC_6,5)=2\left[\binom{11}{n-1}+\binom{10}{n-1}+\binom{7}{n-1}-\binom{8}{n-1}\right]+\binom{4}{n-1}-4\binom{2}{n-1}. \quad \blacksquare$$

العبارة 3.9 : لأجل $10\le m$ ولكل $3\le n\le p$ و $6\le k\le \lfloor (m+1)/2\rfloor+1$ فإن:

$$C_n(U,PC_m,k)=4\binom{p-3k+6}{n-1}-4\binom{p-6k+12}{n-1}-2\binom{p-6k+9}{n-1}-2\binom{p-6k+15}{n-1}$$
$$-(m-2k+3)\binom{p-6k+8}{n-1}-(m-2k+4)\binom{p-6k+11}{n-1}$$
$$+(m-2k+5)\binom{p-6k+14}{n-1}+(m-2k+6)\binom{p-6k+17}{n-1}. \qquad \ldots(3.38)$$

البرهان: لأجل $i=1,2,\ldots,2k-5$ نلاحظ أن هنالك ثلاثة رؤوس وهي $v_{\lceil i/2\rceil+k-1}, u_{2(\lceil i/2\rceil+k-3)}, u_{2(\lceil i/2\rceil+k-3)+1}$ على مسافة k من الرأس u_i وإن هنالك $(p-3(\lceil i/2\rceil+k-2))$ من الرؤوس التي تبعد مسافة **تزيد** على k عن الرأس u_i . لذلك فأن:

$$C_n(u_i,PC_m,k)=\binom{p+9-3k-3\lceil i/2\rceil}{n-1}-\binom{p+6-3k-3\lceil i/2\rceil}{n-1}, \qquad \ldots(3.39)$$

لكل $i=1,2,\ldots,2k-5$.

فضلاً عن ذلك، توجد خمسة رؤوس $u_1,u_2,v_{\lceil i/2\rceil+k-1},u_{2(\lceil i/2\rceil+k-3)},u_{2(\lceil i/2\rceil+k-3)+1}$ كل منها يبعد مسافة k عن الرأس u_i لأجل $i=2k-4\ ,2k-3$ ويوجد $(p-3(\lceil i/2\rceil+k-2))$ من الرؤوس والتي كل منها يبعد مسافة **تزيد** على k من الرأس u_i . لذلك، فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,k)=\binom{p+11-3k-3\lceil i/2\rceil}{n-1}-\binom{p+6-3k-3\lceil i/2\rceil}{n-1}, \qquad \ldots(3.40)$$

لأجل $i=2k-4\ ,\ 2k-3$. وبما أن:

$$C_n(u_i,PC_m,k)=C_n(u_{2m+2-i},PC_m,k),\quad i=1,2,\ldots,2k-3$$

فإن عدد الأزواج $(u_i\ ,S)$ بحيث أن $d_n(u_i\ ,S)=k$ ، لأجل

$i\in\{1,2,\ldots,2k-3;\ 2(m-k)+5\ ,\ 2(m-k)+6,\ \ldots,2m+1\}\ ,\ 6\le k\le\lfloor (m+1)/2\rfloor+1$

هو

$$2\sum_{i=1}^{2k-5}\left[\binom{p+9-3k-3\lceil i/2\rceil}{n-1}-\binom{p+6-3k-3\lceil i/2\rceil}{n-1}\right]$$
$$+2\left[\binom{p-6k+17}{n-1}+\binom{p-6k+14}{n-1}-\binom{p-6k+12}{n-1}-\binom{p-6k+9}{n-1}\right]$$

$$=4\binom{p-3k+6}{n-1}-2\binom{p-6k+15}{n-1}-2\binom{p-6k+12}{n-1}$$
$$+2\left[\binom{p-6k+17}{n-1}+\binom{p-6k+14}{n-1}-\binom{p-6k+12}{n-1}-\binom{p-6k+9}{n-1}\right]$$

$$=4\binom{p-3k+6}{n-1}+2\binom{p-6k+14}{n-1}+2\binom{p-6k+17}{n-1}-2\binom{p-6k+9}{n-1}$$
$$-4\binom{p-6k+12}{n-1}-2\binom{p-6k+15}{n-1}. \qquad \ldots(3.41)$$

وأخيراً، فإنَ لكل $i= 2k-2,\ 2k, 2k+2, \ldots, 2m-2k+4$ توجد ستة رؤوس وهي $v_{i/2-k+2}, u_{i-2k+5}, u_{i-2k+6}, v_{i/2+k-1}, u_{i+2k-6}, u_{i+2k-5}$ كل منهم يبعد مسافة k عن الرأس u_i . ويوجد $(p-6k+11)$ رأساً كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على k عن الرأس u_i . لذلك، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, k)=\binom{p-6k+17}{n-1}-\binom{p-6k+11}{n-1}, \qquad \ldots(3.42)$$

لكل $i= 2k-2,\ 2k, 2k+2, \ldots, 2m-2k+4$.

كذلك، توجد ستة رؤوس وهي $v_{(i+1)/2-k+1}, u_{i-2k+4}, u_{i-2k+5}, v_{(i+1)/2+k-1}, u_{i+2k-4}, u_{i+2k-5}$ كل منها يبعد مسافة k عن الرأس u_i لأجل $i=2k-1, 2k+1, \ldots, 2m-2k+3$ ويوجد $(p-6k+8)$ رأساً كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على k عن الرأس u_i. لذلك، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, k)=\binom{p-6k+14}{n-1}-\binom{p-6k+8}{n-1}, \qquad \ldots(3.43)$$

لأجل $i=2k-1, 2k+1, \ldots, 2m-2k+3$

وفي الختام من (3.41) و (3.42) و (3.43) وبإجراء التبسيط المطلوب نحصل على (3.38). وبهذا يتم البرهان. ■

لاحظ أن اعتبار $m \geq 10$ ضروري جداً في احتساب (3.41) و (3.42) ، وإذا كانت $m \leq 8$ فإن $k \leq 5$ والتي تمت معالجتها في العبارات السابقة.

والآن نجد صيغاً لقيم معامل x^k لقيم k الأخرى نسبة لمجموعة الرؤوس U. بقي أن نعالج حالة كون $m=9$ و $k=6$ وهذه نحسبها مباشرة فنحصل على:

ملاحظة (6): إذا كان $m=9$ وكان $k=6$ فإن:

$$C_n(U,PC_9,6)=4\binom{17}{n-1}+3\binom{10}{n-1}+2\binom{7}{n-1}-4\binom{5}{n-1}-\binom{4}{n-1}-2\binom{2}{n-1}-2\binom{8}{n-1}.$$

العبارة 3.10 : إذا كانت $7\le m$ و $3\le n\le p$ فإن:

$$C_n(U,PC_m,\lfloor\frac{m+1}{2}\rfloor+2)=\begin{cases}4\binom{p-3(m+1)/2}{n-1}+\binom{4}{n-1}-2\binom{2}{n-1}, & \text{عندما يكون } m \text{ عدداً فرديا}\\ 4\binom{p-3m/2}{n-1}+2\binom{7}{n-1}+\binom{4}{n-1}-4\binom{2}{n-1}-2\binom{5}{n-1}, & \text{عندما يكون } m \text{ عدداً زوجياً}\end{cases}$$

البرهان: (أولاً). نفرض أن m عدداً **فردياً** وأن $7\le m$ ، عندئذ نجد أن هنالك ثلاثة رؤوس وهي $u_{2\lceil i/2\rceil+m}$ و $u_{2\lceil i/2\rceil+m-1}$ و $v_{\lceil i/2\rceil+(m+3)/2}$ كل منهم يبعد مسافة $(m+5)/2$ عن الرأس u_i لأجل $i=1,2,...,m-1$ ؛ وأن هنالك $(p-3((m+1)/2)-3\lceil i/2\rceil)$ رأساً كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على $(m+5)/2$ عن الرأس u_i . وعليه لأجل $i=1,2,....,m-1$ فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,\frac{m+5}{2})=\binom{p-3(m-1)/2-3\lceil i/2\rceil}{n-1}-\binom{p-3(m+1)/2-3\lceil i/2\rceil}{n-1}, \qquad ...(3.44)$$

وبما أن:

$$C_n(u_i,PC_m,(m+5)/2)=C_n(u_{2m+2-i},PC_m,(m+5)/2),\ \ i=1,2,....,m-1$$

فإن عدد الأزواج المرتبة (u_i,S) بحيث أن $d_n(u_i,S)=(m+5)/2$ ، لكل $i\in\{1,2,...,m-1;m+3,m+4,...,2m+1\}$ هو

$$2\sum_{i=1}^{m-1}\left[\binom{p-3(m-1)/2-3\lceil i/2\rceil}{n-1}-\binom{p-3(m+1)/2-3\lceil i/2\rceil}{n-1}\right]$$
$$=4\binom{p-3(m+1)/2}{n-1}-4\binom{2}{n-1}. \qquad ...(3.45)$$

بالنسبة للرأس u_m يوجد رأسان هما u_{2m+1} , u_{2m} كل منهما يبعد مسافة $(m+5)/2$ عن الرأس u_m ولا يوجد رأس يبعد مسافة **تزيد** على $(m+5)/2$ عن الرأس u_m . وبذلك، فإن:

$$C_n(u_m,PC_m,(m+5)/2)=\binom{2}{n-1}. \qquad ...(3.46)$$

بالنسبة للرأس u_{m+1} توجد أربعة رؤوس وهي u_1 , u_2 , u_{2m} , u_{2m+1} كل منهما يبعد مسافة $(m+5)/2$ عن الرأس u_{m+1} ولا يوجد أي رأس يبعد مسافة **تزيد** على $(m+5)/2$ عن الرأس u_{m+1} . لذلك، فإن:

$$C_n(u_{m+1},PC_m,(m+5)/2)=\binom{4}{n-1}. \qquad ...(3.47)$$

واضح أن:

$$C_n(u_m,PC_m,(m+5)/2)=C_n(u_{m+2},PC_m,(m+5)/2)$$

وعليه، من (3.45) و(3.46) و(3.47) نحصل على $C_n(U,PC_m,\lfloor (m+1)/2 \rfloor+2)$ عندما يكون m عدداً فردياً.

(ثانياً). نفرض أن m عدد زوجي وإن $m \le 8$. كما في حالة كون m فردية، فإن لكل $i=1,2,...,m-1$ توجد ثلاثة رؤوس وهي $u_{2\lceil i/2 \rceil+m-1}, v_{\lceil i/2 \rceil+m/2+1}, u_{2\lceil i/2 \rceil+m-2}$ كل منها يبعد مسافة $(m+4)/2$ عن الرأس u_i، و يوجد $(p-3\lceil i/2 \rceil-3m/2)$ رأساً كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على $(m+4)/2$ عن الرأس u_i. وعليه، فإن:

$$C_n(u_i,PC_m,(m+4)/2)=\binom{p-3\lceil i/2 \rceil-3m/2+3}{n-1}-\binom{p-3\lceil i/2 \rceil-3m/2}{n-1}$$

ولما كان $C_n(u_i,PC_m,(m+4)/2)=C_n(u_{2m+2-i},PC_m,(m+4)/2)$,

لكل $i=1,2,...,m-1$ ، فإن عدد الأزواج المرتبة (u_i , S) ، إذ أن $d_n(u_i,S)=(m+4)/2$ ، ولكل i في $\{1,2,...,m-1;m+3,m+4,...,2m+1\}$ هو

$$2\sum_{i=1}^{m-1}\left[\binom{p+3-3\lceil i/2 \rceil-3m/2}{n-1}-\binom{p-3m/2-3\lceil i/2 \rceil}{n-1}\right]$$

$$=4\binom{p-\frac{3}{2}m}{n-1}-2\binom{5}{n-1}-2\binom{2}{n-1}\ . \qquad ...(3.48)$$

وبالنسبة إلى الرأس u_m فإنه توجد خمسة رؤوس وهي: u_1 , u_2 , v_{m+1} , u_{2m-2}, u_{2m-1} كل منها يبعد مسافة $(m+4)/2$ عن الرأس u_m ويوجد رأسان فقط كل منهما يبعد مسافة **تزيد** على $(m+4)/2$ عن الرأس u_m وعليه ، فأن

$$C_n(u_m,PC_m,(m+4)/2)=\binom{7}{n-1}-\binom{2}{n-1}. \qquad ...(3.49)$$

وهذه تصح أيضاً للرأس المناظر له u_{m+2} . وبالنسبة للرأس u_{m+1} فإنه توجد أربعة رؤوس وهي u_1 , u_2 ,u_{2m} , u_{2m+1} كل منها يبعد مسافة $(m+4)/2$ عن الرأس u_{m+1} ولا يوجد أي رأس يبعد مسافة **تزيد** على $(m+4)/2$ عن الرأس u_{m+1} . لذلك ، فإن:

$$C_n(u_{m+1},PC_m,(m+4)/2)=\binom{4}{n-1}. \qquad ...(3.50)$$

وأخيراً، من (3.48) و(3.49) و(3.50) نحصل على $C_n(U,PC_m,\lfloor (m+1)/2 \rfloor+2)$ في حالة كون m زوجي وكما ذُكرت في نص العبارة. وبهذا يتم البرهان. ■

العبارة 3.11 : إذا كان $7 \le m$ ، $3 \le n \le p$ ، $\lfloor (m+1)/2 \rfloor 3+ \le k \le \delta_n$ ، فإن:

$$C_n(U,PC_m,k)=4\binom{p+6-3k}{n-1}. \qquad ...(3.51)$$

البرهان: من المبرهنة 3.1 يكون $\delta_n=m+2$ فقط عندما يكون n=2 أو n=3 . لذلك سوف نفرض فيما يأتي أن $m+1 \ge \delta_n$ ثم بعدها نعالج كون $\delta_n=m+2$ عندما n=3. لأجل u_i إذ أن $i=1,2,...,2(m-k+2)$ توجد ثلاثة رؤوس وهي $v_{\lceil i/2 \rceil+k-1}, u_{2(\lceil i/2 \rceil+k-3)}, u_{2(\lceil i/2 \rceil+k-3)+1}$ كل منهم يبعد مسافة k عن الرأس u_i، إذ أن $\le k$

$\lfloor (m+1)/2 \rfloor 3+ \leq \delta_n$ ويوجد $p-3(\lceil i/2 \rceil + k - 2)$ رأساً كل منهم يبعد مسافة **تزيد** على k عن الرأس u_i . وعليه، فإن:

$$C_n(u_i, PC_m, k) = \binom{p-3(\lceil i/2 \rceil + k - 3)}{n-1} - \binom{p-3(\lceil i/2 \rceil + k - 2)}{n-1}, \ i=1,2,...,2(m-k+2)$$

فضلاً عن ذلك يوجد رأسان فقط هما u_{2m}, u_{2m+1} كل منهما يبعد مسافة k، إذ أن $\lfloor (m+1)/2 \rfloor + 3 \leq k \leq \delta_n$، عن الرأس $u_{2(m-k+2)+r}$ لأجل r=1,2 ؛ ولا يوجد أي رأس يبعد مسافة **تزيد** على k عن هذا الرأس. لذلك :

$$C_n(u_{2(m-k+2)+r}, PC_m, k) = \binom{2}{n-1}, \quad r=1,2 . \qquad ...(3.52)$$

واضح أن:

$$C_n(u_i, PC_m, k) = C_n(u_{2m-i+2}, PC_m, k), \quad i=1,2,...,2(m-k+3)$$

وعليه، فإن عدد الأزواج المرتبة $d_n(u_i,S)$ بحيث أن $d_n(u_i, S)=k$ لأجل $\lfloor (m+1)/2 \rfloor +3 \leq k \leq \delta_n$ هو:

$$2\sum_{i=1}^{2(m-k+2)} \left[\binom{p-3(\lceil i/2 \rceil + k - 3)}{n-1} - \binom{p-3(\lceil i/2 \rceil + k - 2)}{n-1} \right] + 4\binom{2}{n-1}$$

$$= 4\binom{p-3k+6}{n-1} - 4\binom{2}{n-1} + 4\binom{2}{n-1} = 4\binom{p-3k+6}{n-1}.$$

عندما يكون n=3 و k=m+2 فإن الصيغة أعلاه تساوي 4 وهذه تساوي بالضبط عدد الأزواج المرتبة بمسافة m+2 وهذه الأزواج هي:

$(u_1, \{u_{2m}, u_{2m+1}\})$, $(u_2, \{u_{2m}, u_{2m+1}\})$, $(u_{2m+1}, \{u_1, u_2\})$, $(u_{2m}, \{u_1, u_2\})$

ولا يوجد غيرها على مسافة تساوي m+2 . ولذلك فإن الصيغة (3.51) صحيحة لهذه القيم لـ k وبهذا يتم البرهان.

■

ملاحظة (7): *أ) إذا كان* $4 \leq m$ *و* $3 \leq n \leq p$ *، فإن:* $C_n(U, PC_m, m+2) = 4\binom{2}{n-1}$.

ب) إذا كان $5 \leq m$ *و* $3 \leq n \leq p$ *، فإن:* $C_n(U, PC_m, m+1) = 4\binom{5}{n-1}$.

جـ) إذا كان $6 \leq m$ *و* $3 \leq n \leq p$ *، فإن:* $C_n(U, PC_m, m) = 4\binom{8}{n-1}$.

وأخيراً، نستخلص زبدة هذا البحث وهي المبرهنة الآتية والتي تنتج من كافة العبارات والملاحظات السابقة.

المبرهنة 3.12 : لكل $3 \leq n \leq p$ ولجميع قيم $2 \leq m$ فإن متعددة حدود هوسويا -n للبيان PC_m هي:

$$H_n(PC_m; x) = p\binom{p-1}{n-2} + \left[p\binom{p-1}{n-1} - 2(m-1)\binom{p-4}{n-1} - (m+4)\binom{p-3}{n-1} \right] x + \sum_{k=2}^{\delta_n} C_n(PC_m, k) x^k$$

إذ أن p=3m+2 ، δ_n هو القطر -n المحدد في المبرهنة 2.1 وأن لكل $2 \leq k \leq \delta_n$:

$$C_n(PC_m, k) = C_n(V, PC_m, k) + C_n(U, PC_m, k)$$

والتي تم تحديدها في العبارات من 3.1 إلى 3.11 والملاحظات من (1) إلى (7) .

نتيجة 3.13 : متعددة حدود هوسويا للبيان PC_m ، $2 \le m$ هي :

$$H(PC_m;x) = (3m+2) + (4m+1)x + \sum_{k=2}^{m+2} C(PC_m,k)x^k ,$$

إذ أن $C(PC_m,k) = 3(m-k)+5+R_k$

وأن
$$R_k = \begin{cases} 4m-3k+5 & ,2 \le k \le 4 \\ 5m-12 & ,k=5 \\ 6(m-k)+16 & ,6 \le k \le m+1 \\ 5 & ,k=m+2 \end{cases}$$

البرهان: واضح أنه عندما $n=2$ فإن: $d_2(u,\{v\})=d_2(v,\{u\})=d(u,v)$ لكل رأسين u و v في البيان. لذلك فإن $H(PC_m;x)$ تنتج من المبرهنة 3.12 وذلك بتعويض $n=2$ والقسمة على 2 . ■

نتيجة 3.14 : دليل وينر للبيان PC_m ، إذ أن $2 \le m$ هو:

$$W(PC_m) = \frac{1}{2}(3m^3 + 21m^2 - 6m + 14) . \qquad \ldots(3.53)$$

البرهان: نأخذ مشتقة $H(PC_m,x)$ المذكورة في النتيجة 3.13 بالنسبة إلى x ثم نعوض $x=1$ فنحصل على:

$$\begin{aligned} W(PC_m) &= 4m+1+\sum_{k=2}^{m+2} k[3(m-k)+5+R_k] \\ &= 4m+1+2[3m-6+5+(4m-1)]+3[3m-9+5+(4m-9+5)] \\ &+4[3m-12+5+(4m-12+5)]+5[3m-15+5+(5m-12)] \\ &+\sum_{k=6}^{m+1} k[3m-3k+5+(6m-6k+16)]+(m+2)[3m-3(m+2)+5+(5)] \\ &= 111m-185+\sum_{k=6}^{m+1} k[9m+21-9k] = \frac{1}{2}(3m^3+21m^2-6m+14). \blacksquare \end{aligned}$$

المصادر

[1] الدباغ، أحمد محمد علي (2005)، "**متعددات حدود وينر لتعميم المسافة في البيانات**"،. رسالة ماجستير، غير منشورة، جامعة الموصل، العراق.

[2] علي، علي عزيز (1983)، **مقدمة في نظرية البيان**، ط 1، الموصل: مؤسسة دار الكتب بجامعة الموصل.

[3] علي، علي عزيز، علي ،أحمد محمد (2006)، متعددات حدود وينر لتعميم المسافة لبعض البيانات الخاصة، مجلة الرافدين لعلوم الحاسبات والرياضيات، 3 (2)، 120–103.

[4] Ahmed, H. G.; (2007). On Wiener Polynomials of n-Distance in Graphs, M.Sc. Thesis, unpublished, Dohuk University, Dohuk, Iraq.

[5] Buckley, F. and Harary, F.; (1990). **Distance in Graphs**. New York: Addison-Wesley.

[6] Chartrand, G. and Lesniak, L.; (1986). **Graphs and Digraphs**, 2nd ed., California :Wadsworth Inc.

[7] Dankelman, P., Goddard, W., Henning, M.A. and Swart, H.C.; (1999). "Generalized eccentricity, radius, and diameter in graphs", Foundation for Research Development. c 1999 John Wiely & Sons, Inc. Networks 34, 312-319.