Stability Analysis of the Flow of Blood in the Branching and Stenoted Arteries

Rotaiyna J. Essa
RotinaJasim@yahoo.com

Shaimaa M. Younis
Shes7369@gmail.com

College of Computer Science and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 19/03/2012 **Accepted on: 28/06/2012**

ABSTRACT

This research is devoted to the stability analysis of the system of equations that describes the flow of blood in the branching and stenoted arteries. This branch takes the form of the character Y, By using the Navier -Stoke of equations in Polar coordinates,when the amplitude is constant and we found that the system is stable under the condition $\frac{1}{\text{Re}} < \frac{\frac{1}{r}(k_1^2 u_1 + k_1 k_2 w_1)}{\frac{1}{r^2}\left(k_1^2 - r^2 k_1^2 k_2^2 - k_2^2 - r^2\ k_2^4\right)}$

Keywords:,stenoted arteries ,flow of blood, stability analysis , Dimensional analysis

تحليل استقرارية جريان الدم في الشرايين المتضيقة والمتفرعة

رتينة جاسم عيسى **شيماء محمد يونس**

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

جامعة الموصل، الموصل، العراق

تاريخ استلام البحث: 2012/03/19 **تاريخ قبول البحث: 2012/06/28**

الملخص

هذا البحث مكرس لتحليل الاستقرارية لمنظومة من المعادلات التي تصف تدفق الدم في الشرايين المتفرعة والمتضيقة وهذا التفرع يأخذ شكل الحرف Y وذلك من خلال استخدام معادلات نافير-ستوك في النظام القطبي وذلك عندما تكون السعة ثابتة, وقد وجدنا أن النظام يكون مستقراً تحت الشرط $\frac{1}{\text{Re}} < \frac{\frac{1}{r}(k_1^2 u_1 + k_1 k_2 w_1)}{\frac{1}{r^2}\left(k_1^2 - r^2 k_1^2 k_2^2 - k_2^2 - r^2\ k_2^4\right)}$.

الكلمات المفتاحية: الشرايين المتضيقة، تدفق الدم ، تحليل الاستقرارية ،المعاملات اللابعدية

1- مقدمة:

تلعب ظاهرة نقل الدم وحركته في الشرايين دوراً أساسيا في فهم العديد من أمراض الشرايين وهذه الحركة يمكن التعبير عنها بأنظمة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية، والتي هي شكل من أشكال معادلات الحركة للمائع مشتقة من قانون حفظ الكتلة وقانون الزخم ومن خلال حلها يمكن ملاحظة اضطرابات التدفق حول

الانحناءات والتقوسات في الشرايين والتي من خلالها يمكن فهم الأضرار الناتجة وكيفية معالجتها,وهذا يقودنا إلى دراسة الاستقرارية والتي تعد من المفاهيم الأساسية في كثير من العلوم وتطبيقاتها.

يمكن تعريف الاستقرارية ببساطة على انها اذا حدث اي تغير او ازعاج صغير في النظام الفيزيائي لا يؤدي في النهاية الى تغير كبير في سلوك النظام ,ورياضيا معنى الاستقرارية هو تغير بسيط في القيم الابتدائية في زمن معين يبقى صغيراً بعد فترة من الزمن.ان تغيراً بسيطاً في القيم الابتدائية يؤدي الى تغير كبير في النتائج النهائية,وفي هذه الحالة يكون النظام غير مستقر [1 ، 4].

فقد تعلقت دراسة (Cha'o-Kuang Chen and Ming-Chetin) باستقرارية طبقة رقيقة من المائع يجري في اسطوانة[3].

كما أجرى كل من (Bimal Kumar mishra and 2Nidhi Verma) دراسة على تأثير التضيق على جريان الدم غير النيوتيني في قناة الدم وذلك من خلال ايجاد قوة قص الجدار وايجاد معامل المقاومة[2]

وفي عام (2009) عمل كل من (Nidhi Verma and R.S.Parihar) على دراسة تأثير القوة المغناطيسية على تدفق الدم وذلك من خلال ايجاد المقاومة قوة قص الجدار[11]

كما قام كل من (S. Sen. and S. Chakravarty) عام 2006 بدراسة تدفق الدم تحت تأثير عملية الانتشار من خلال أنموذج لشريان متضيق ومتفرع، حيث تم استخدام آلية الفروقات المنتهية للحصول على النتائج ولقد لاحظوا ان تأثير التضيق ضئيل على قيم الضغط للجدار الخارجي (Daughter wall)في حين أن تأثير قابلية التمدد للجدار كبيرة[12].

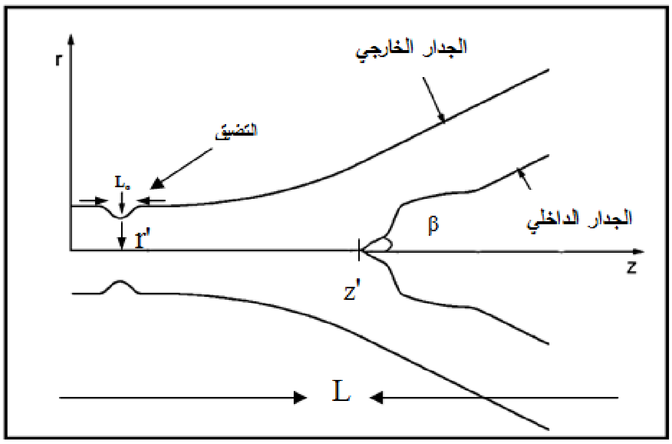
كما عمل كل من (J. C. Misra and G. C. Shit) في عام (2005) على تطوير أنموذج رياضي لتدفق الدم في الشرايين المتضيقة ولاحظوا أن مقاومة التدفق وزيادة اللزوجة يؤدي إلى زيادة التضيق وتم مقارنة النتائج مع البيانات المتوفرة التي قدمها باحثون آخرون [8].

كذلك عمل (Sapna Ratan Shah and S. U. Siddiqui) في 2011 على حل مشكلة تدفق الدم النيوتونية وغير الخطية في شريان متضيق وذلك باستخدام إحدى الطرائق العددية وبين أن سرعة تدفق الدم وإجهاد القص عند الجدار يكون قليلاً في حين تزداد مقاومة التدفق بزيادة حجم التضيق (Stenosis) (ارتفاع وطول التضيق) [14] ، [15].

كما بين كل من (S. C. Pardhan2 and Sachin Shaw1 and P.V.S. Nmurtty1) تأثير القوة المغناطيسية على جريان الدم وبين ان الزيادة في المجال المغناطيسي تؤدي إلى قلة نصف قطر الشريان وسرعة الجريان [13].

2- النموذج والمعادلات الأساسية في الجريان:

ليكن لدينا مقطع لجريان الدم في شريان متضيق ومتفرع وهذا التفرع يأخذ شكل الحرف Y كما في الشكل(1).



الشكل (1)

حيث أن:

r: هو نصف قطر الشريان

r ': هو نصف قطر منطقة التضيق في الشريان

L: هو طول الشريان

L_o: هو طول منطقة التضيق في الشريان

ويمكن تمثيل معادلات جريان الدم هذه بالشكل التالي [12].

$$\rho\left(\frac{\partial u^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial u^*}{\partial r^*}+w^*\frac{\partial u^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial r^*}+\mu\left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{2*}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial u^*}{\partial r^*}-\frac{u^*}{r^{*2}}+\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}}\right) \qquad \ldots(1)$$

$$\rho\left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*}+u^*\frac{\partial w^*}{\partial r^*}+w^*\frac{\partial w^*}{\partial z^*}\right)=-\frac{\partial p^*}{\partial z^*}+\mu\left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^{*2}}+\frac{1}{r^*}\frac{\partial w^*}{\partial r^*}+\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}}\right) \qquad \ldots(2)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*}+\frac{u^*}{r^*}+\frac{\partial w^*}{\partial z^*}=0 \qquad \ldots(3)$$

حيث أن $u^*(r^*,z^*,t^*)$ تمثل مركبة السرعة للمحور r و $w^*(r^*,z^*,t^*)$ تمثل مركبة السرعة للمحور z, p يمثل الضغط , ρ تمثل الكثافة، μ تمثل لزوجة الدم

حيث أن :

$$u^*(r^*,z^*,t^*)=0,\quad \frac{\partial w^*(r^*,z^*,t^*)}{\partial r^*}=0 \quad \text{on} \quad r^*=0 \quad \text{for} \quad 0\le z\le z' \qquad \ldots(4)$$

$$u^*=\alpha\frac{\partial R_1}{\partial t^*}\quad , w^*(r^*,z^*,t^*)=0\ , \quad \text{on} \quad r^*=R_1(z^*,t^*) \quad \text{for all } z \qquad \ldots(5)$$

$$u^*=\alpha\frac{\partial R_2}{\partial t^*}\quad , w^*(r^*,z^*,t^*)=0, \quad \text{on} \quad r^*=R_2(z^*,t^*) \quad \text{for} \quad z\ge z' \qquad \ldots(6)$$

حيث أن :

$$\alpha=1 \quad for \quad z\le z' \quad \& \quad \alpha=\sec\beta \quad for \quad z\ge z'$$

3- المعاملات اللابعدية (Dimensional analysis):

لغرض إيجاد المعادلات اللابعدية للمعادلات (1) و (2) و (3) سوف نفرض بعض القيم اللابعدية[13].

$u^* = uw_o$ $\qquad\qquad$ $r^* = rr_o$

$w^* = ww_o$ $\qquad z^* = zz_o$

$p^* = \rho p\, w_o^2$ $\qquad t^* = \dfrac{tr_o}{w_o}$

وبتعويض هذه القيم اللابعدية في المعادلات (1) و (2) و (3) نحصل على معادلات في الحالة اللابعدية.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \quad \ldots(7)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial r}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \quad \ldots(8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \ldots(9)$$

حيث أن Re هو Reynold's number ومعرف كالآتي:

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho r_o w_o}{\mu}$$

كذلك فان الشروط في الحالة اللابعدية هي :

$$u(r,z,t)=0,\ \frac{\partial w(r,z,t)}{\partial r}=0 \quad \text{on} \quad r=0 \quad \text{for} \quad 0\le z\le z' \quad \ldots(10)$$

$$u=\alpha\frac{\partial R_1}{\partial t},\ w(r,z,t)=0, \quad \text{on} \quad r=R_1(z,t) \quad \text{for all z} \quad \ldots(11)$$

$$u=\alpha\frac{\partial R_2}{\partial t},\ w(r,z,t)=0, \quad \text{on} \quad r=R_2(z,t) \quad \text{for} \quad z\ge z' \quad \ldots(12)$$

حيث أن:

$$\alpha=1 \quad for \quad z\le z' \quad \& \quad \alpha=\sec\beta \quad for \quad z\ge z'$$

4- تحليل الاستقرارية:

لغرض تحليل الاستقرارية لأنموذج معادلات جريان الدم المعرف بالمعادلات (7) و(8) و(9) نجزئ كلا من u, w, p باستخدام المعادلات التالية:

$$\left.\begin{aligned} u(r,z,t) &= u_1(r,z)+u_2(r,z,t)\\ w(r,z,t) &= w_1(r,z)+w_2(r,z,t)\\ p(r,z,t) &= p_1(r,z)+p_2(r,z,t)\end{aligned}\right\} \quad \ldots(13)$$

إذ أن $u_1(r,z)$ ، $w_1(r,z)$ ، $p_1(r,z)$ تمثل الاجزاء المستقرة وتكون صغيرة جدا مقارنة بالجزء الآخر غير المستقر وهو الجزء المهم في حساب الاستقرارية $u_2(r,z,t)$ ، $w_2(r,z,t)$ ، $p_2(r,z,t)$ [10] .

الآن وبتعويض المعادلة (13) في المعادلات (7) و (8) و(9) نحصل على:

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial t}+(u_1+u_2)\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial r}+(w_1+w_2)\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial z}$$
$$=-\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial r}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial r}-\frac{(u_1+u_2)}{r^2}+\frac{\partial^2(u_1+u_2)}{\partial z^2}\right) \quad \ldots(14)$$

$$\frac{\partial(w_1+w_2)}{\partial t}+(u_1+u_2)\frac{\partial(w_1+w_2)}{\partial r}+(w_1+w_2)\frac{\partial(w_1+w_2)}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial(p_1+p_2)}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2(w_1+w_2)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(w_1+w_2)}{\partial r} + \frac{\partial^2(w_1+w_2)}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(15)$$

$$\frac{\partial(u_1+u_2)}{\partial r} + \frac{(u_1+u_2)}{r} + \frac{\partial(w_1+w_2)}{\partial z} = 0 \qquad \ldots(16)$$

وبتبسيط المعادلات (14) و(15) و(16) نحصل على:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial r} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z} + w_1\frac{\partial u_2}{\partial z} + w_2\frac{\partial u_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$= -\left(\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{\partial p_2}{\partial r}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} - \frac{u_2}{r^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(17)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial w_1}{\partial r} + u_1\frac{\partial w_2}{\partial r} + u_2\frac{\partial w_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial w_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_1\frac{\partial w_2}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_2}{\partial z}$$

$$= -\left(\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{\partial p_2}{\partial z}\right) + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(18)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{u_2}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \qquad \ldots(19)$$

وبتجزئة المعادلات (17) و (18) و (19) إلى حالتي الاستقرارية والاضطرابات نحصل على:

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial r} + w_1\frac{\partial u_1}{\partial z} = -\frac{\partial p_1}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(20)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial u_2}{\partial z} + w_2\frac{\partial u_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(21)$$

$$u_1\frac{\partial w_1}{\partial r} + w_1\frac{\partial w_1}{\partial z} = -\frac{\partial p_1}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(22)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial w_2}{\partial r} + u_2\frac{\partial w_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial w_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial w_2}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_2}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(23)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{u_1}{r} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0 \qquad \ldots(24)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_2}{r} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \qquad \ldots(25)$$

ويمكن فرز المعادلات (21) و (23) و (25) التي تمثل الحالة غير الزمنية (Unsteady State) بكتابتها بالشكل:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial u_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial u_2}{\partial z} + w_2\frac{\partial u_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial u_2}{\partial z}$$

$$= -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(26)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial w_2}{\partial r} + u_2\frac{\partial w_1}{\partial r} + u_2\frac{\partial w_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial w_2}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_1}{\partial z} + w_2\frac{\partial w_2}{\partial z}$$
$$= -\frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(27)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_2}{r} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \qquad \ldots(28)$$

الآن نحذف الحدود غير الخطية من المعادلات (26) و(27) و(28) لتحويلها إلى معادلات خطية بالإضافة إلى ذلك يمكن حذف $\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}$ و $\frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2}$ وذلك حسب نظرية التزييت (Lubrication Theorem) لأنه $\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} >> \frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2}$ و $\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} >> \frac{\partial^2 w_2}{\partial r^2}$ نحصل على:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial u_2}{\partial z} = -\frac{\partial p_2}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(29)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + u_1\frac{\partial w_2}{\partial r} + w_1\frac{\partial w_2}{\partial z} = -\frac{\partial p_2}{\partial z} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2}\right) \qquad \ldots(30)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{u_2}{r} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0 \qquad \ldots(31)$$

5- الاضطراب الحاصل بالاتجاهين r, z :

لإيجاد الحل لهذه المنظومة من المعادلات، نفرض أن الاضطراب حاصل باتجاهين r و z وان السعة ثابتة ويمكن أن نفرض الحل بالصورة الآتية [3]:

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} \\ w_2 &= A_2\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} \\ p_2 &= A_3\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots(32)$$

حيث أن k_1 , k_2 تمثل قيماً حقيقية لابعدية لطول الموجة بالاتجاهين r, z و α تمثل سرعة الموجة وهي قيمة معقدة complex ($\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$) وان القيمة الموجبة أو السالبة لـ α_1 بهذه الحالة هي التي تؤدي إلى نمو الاضطراب أو تلاشيه على التوالي.

فعندما تكون $\alpha 1 > 0$ فالمنظومة تكون غير مستقرة (unstable) وعندما تكون $\alpha_1 < 0$ فمنظومة (جريان المائع) تكون مستقرة (stable) [9].

كما أن A_1 وA_2 وA_3 تمثل سعة الموجة (Amplitude function) الآن سوف نعوض المعادلة (32) في المعادلات (29) و(30) و(31) نحصل على:

$$\alpha A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} + u_1 k_1 i A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} + w_1 k_2 i A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} = -i\, k_1 A_3\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)}$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r} i\, k_1 A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} - \frac{1}{r^2} A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)} + (ik_2)^2 A_1\, e^{\alpha t + i(k_1 r + k_2 z)}\right) \quad \ldots(33)$$

$$\alpha A_2\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}+u_1k_1iA_2\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}+w_1k_2iA_2\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}=-i\,k_2A_3\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}$$
$$+\frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{1}{r}i\,k_1A_2\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}+(ik_2)^2A_2\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}\right) \qquad \ldots(34)$$

$$i\,k_1A_1\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}+\frac{1}{r}A_1\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}+ik_2A_2\, e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}=0 \qquad \ldots(35)$$

وبجمع الحدود المتشابهة وترتيب المعادلات (33) و(34) و(35) نحصل على ما يأتي:

$$\left[\left(\alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r^2}+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}}\right)A_1+ik_1A_3\right]e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}=0 \qquad \ldots(36)$$

$$\left[\left(\alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}}\right)A_2+ik_2A_3\right]e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}=0 \qquad \ldots(37)$$

$$\left[\left(ik_1+\frac{1}{r}\right)A_1+ik_2A_2\right]e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}=0 \qquad \ldots(38)$$

بما أن $e^{\alpha t+i(k_1r+k_2z)}\neq 0$ فإن:

$$\left(\alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r^2}+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}}\right)A_1+ik_1A_3=0 \qquad \ldots(39)$$

$$\left(\alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}}\right)A_2+ik_2A_3=0 \qquad \ldots(40)$$

$$\left(ik_1+\frac{1}{r}\right)A_1+ik_2A_2=0 \qquad \ldots(41)$$

المعادلات (39) و (40) و (41) تمثل نظاماً متجانساً من معادلات جبرية بالنسبة إلى A_1 وA_2 وA_3 وهذا النظام الجبري يملك حلولاً غير صفرية فقط عندما يكون المحدد للمعاملات يساوي صفراً أي أن [10]:

$$\begin{vmatrix} \alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r^2}+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}} & 0 & ik_1 \\ 0 & \alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}} & ik_2 \\ ik_1+\frac{1}{r} & ik_2 & 0 \end{vmatrix}=0$$

وهذا يؤدي إلى:

$$-\left[(ik_1)(ik_1+\frac{1}{r})(\alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}})+(ik_2)^2(\alpha+ik_1u_1+ik_2w_1-\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r}ik_1+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{r^2}+\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}})\right]=0 \qquad \ldots(42)$$

نقوم بتبسيط المعادلة (42) نحصل على :

$$-\alpha k_1^2+i\frac{\alpha k_1}{r}-ik_1^3u_1-\frac{k_1^2u_1}{r}-ik_1^2k_2w_1-\frac{k_1k_2w_1}{r}+\frac{ik_1^3}{\mathrm{Re}\,r}+\frac{k_1^2}{\mathrm{Re}\,r^2}-\frac{k_1^2k_2^2}{\mathrm{Re}}+i\frac{k_1k_2^2}{\mathrm{Re}\,r}$$
$$-\alpha k_2^2-ik_1k_2^2u_1-ik_2^3w_1-\frac{ik_1k_2^2}{\mathrm{Re}\,r}-\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}\,r^2}-\frac{k_2^4}{\mathrm{Re}}=0 \qquad \ldots(43)$$

وبتجميع وترتيب وتبسيط الحدود للمعادلة (43) نحصل على

$$\alpha=\frac{1}{(k_1^2+k_2^2)}\left(-\frac{k_1^2u_1}{r}-\frac{k_1k_2w_1}{r}+\frac{k_1^2}{\mathrm{Re}\,r^2}-\frac{k_1^2k_2^2}{\mathrm{Re}}-\frac{k_2^2}{\mathrm{Re}\,r^2}-\frac{k_2^4}{\mathrm{Re}}\right)$$

$$+\frac{i}{(k_1^2+k_2^2)}(\frac{\alpha k_1}{r}-k_1^3u-k_1^2k_2w_1\frac{k_1^3}{\operatorname{Re}r}+\frac{k_1k_2^2}{\operatorname{Re}r}-k_1k_2^2u_1-k_2^3w_1-\frac{k_1k_2^2}{\operatorname{Re}r}) \qquad \ldots(44)$$

بما أن:

$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2$

وبما أن الجزء الحقيقي هو الذي يحدد حالة الاستقرار إذا :

$$\alpha_1=\frac{1}{(k_1^2+k_2^2)}(-\frac{k_1^2u_1}{r}-\frac{k_1k_2w_1}{r}+\frac{k_1^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_1^2k_2^2}{\operatorname{Re}}-\frac{k_2^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_2^4}{\operatorname{Re}}) \qquad \ldots(45)$$

للمعادلة (45) الحالات الثلاثة الآتية :

1- عندما تكون $\alpha_1>0$:

فان :

$$\frac{1}{(k_1^2+k_2^2)}(-\frac{k_1^2u_1}{r}-\frac{k_1k_2w_1}{r}+\frac{k_1^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_1^2k_2^2}{\operatorname{Re}}-\frac{k_2^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_2^4}{\operatorname{Re}})>0 \qquad \ldots(46)$$

وبتبسيط المعادلة (46) نحصل على:

$$\frac{1}{\operatorname{Re}}>\frac{\frac{1}{r}(k_1^2u_1+k_1k_2w_1)}{\frac{1}{r^2}\left(k_1^2-r^2k_1^2k_2^2-k_2^2-r^2\ k_2^4\right)} \qquad \ldots(47)$$

في هذه الحالة يكون النظام غير مستقر

2− عندما تكون $\alpha_1<0$:

فان :

$$\frac{1}{(k_1^2+k_2^2)}(-\frac{k_1^2u_1}{r}-\frac{k_1k_2w_1}{r}+\frac{k_1^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_1^2k_2^2}{\operatorname{Re}}-\frac{k_2^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_2^4}{\operatorname{Re}})<0 \qquad \ldots(48)$$

وبتبسيط المعادلة (48) نحصل على:

$$\frac{1}{\operatorname{Re}}<\frac{k_1^2u_1+k_1k_2w_1}{\frac{1}{r}\left(k_1^2-r^2k_1^2k_2^2-k_2^2-r^2\ k_2^4\right)} \qquad \ldots(49)$$

في هذه الحالة يكون النظام مستقراً :

3- عندما تكون : $\alpha_1=0$

فان :

$$\frac{1}{(k_1^2+k_2^2)}(-\frac{k_1^2u_1}{r}-\frac{k_1k_2w_1}{r}+\frac{k_1^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_1^2k_2^2}{\operatorname{Re}}-\frac{k_2^2}{\operatorname{Re}r^2}-\frac{k_2^4}{\operatorname{Re}})=0 \qquad \ldots(50)$$

بتبسيط المعادلة (50) نحصل على :

$$\frac{1}{\operatorname{Re}}=\frac{\frac{1}{r}(k_1^2u_1+k_1k_2w_1)}{\frac{1}{r^2}\left(k_1^2-r^2k_1^2k_2^2-k_2^2-r^2\ k_2^4\right)} \qquad \ldots(51)$$

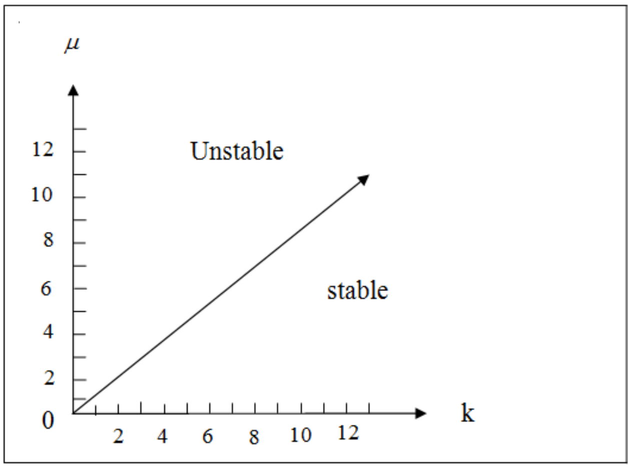
بما أن :

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho r_o w_o}{\mu}$$

إذا :

$$\mu = \rho r_0 w_0 \left(\frac{\frac{1}{r}(k_1^2 u_1 + k_1 k_2 w_1)}{\frac{1}{r^2}\left(k_1^2 - r^2 k_1^2 k_2^2 - k_2^2 - r^2\ k_2^4\right)} \right) \qquad \ldots(52)$$

وهذه الحالة تمثل الحد الفاصل بين الحالة المستقرة وغير المستقرة كما موضح في الشكل (2) :



الشكل (2)

حيث أن :

$$k = \rho r_0 w_0 \left(\frac{\frac{1}{r}(k_1^2 u_1 + k_1 k_2 w_1)}{\frac{1}{r^2}\left(k_1^2 - r^2 k_1^2 k_2^2 - k_2^2 - r^2\ k_2^4\right)} \right)$$

6- الاستنتاجات:

في عملنا هذا قمنا بإيجاد سرعة الموجه α وهي التي تحدد مدى استقرارية الجريان وهي تمثل قيمة معقدة $(\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2)$ وان القيمة السالبة لـ α_1 تؤثر في حالة نمو الاضطراب أو تلاشيه. لقد تمت تجزئة نظام المعادلات إلى جزئين جزء مستقر ويكون صغيراً جدا مقارنة بالجزء الآخر و هو الجزء غير المستقر والذي يلعب دوراً اساسياً في تحليل الاستقرارية وبعد ايجاد المحدد للنظام استطعنا ان نوجد المعاملات التي تؤثر على استقرارية جريان الدم في الشريان المذكور حيث ان النظام يكون مستقرا إذا كانت قيمة اللزوجة اقل من قيمة سرعة التدفق والضغط. ان التضيق الحاصل في الشريان يسبب زيادة في جهد القلب لضخ الدم الى انحاء الجسم وعند زيادة اللزوجة(دهون او جزيئات السكر)في الدم يؤدي الى زيادة الجهد المبذول من القلب وتؤدي هذه الحالة الى اضطراب في القلب وهذه هي الحالة غير المستقرة.

المصادر

[1] Al-Obaidi, M.F. and Abraham, B.M., (2001): "Stability analysis and chaos in a BendDuct" Raf J. Sci., Vol.12, No. 1, PP 91-99.

[2] Bimal Kumar mishra and 2Nidhi Verma, "Effects of Stenosis on Non-newtonian Flow of Blood in Blood Vessels" , Australian Journal of Basic and Applied Sciences, 4(4): 588- 601, 2010,ISSN 1991-8178, © 2010, INSInet Publication .

[3] Cha'o-Kuang Ch en and Ming-Chetin: "Weakly non linear hydrodynamic stability of thin Newtonian fluid flowing on a rotating circular disk", Vol.2009, Article ID 948672, 15 pages.

[4] David L. George (2004): "Numerical Approximation of the Non Linear Shallow Water Equations with Topograph and Dry Bed", PP 5-8.

[5] Fortunato M., Kurizki, G. and Schleich W.P., (1988): "Stabilization of Deterministically chaotic systems by Interference and Quantum Measurement The Ikeda Map case Physical Review Letters", Vol. 80, No.26, PP 530-5733.

[6] Gilbert S. (1980): "Linear Algebra and it's Applications", Second Edition, Academic Press, New York.

[7] Henry M.P and Robert J.S. (1978): "Introduction to Dynamics and Control", McGraw-Hill, London.

[8] J. C. Misra and G. C. Shit, (2005): "Blood flow through arteries in a pathological state: A theoretical Study".

[9] Logan, J. D. (1987): "Applied Mathematics Wiley and Sony".

[10] Mosa, M. F. and Manaa, S.A., "Effects of Radiative heat transfer in the MHD Ekman Layer on aporous plate, Mu'than J. Natural Applied Sci. Series, 7, 268, 1992.

[11] Nidhi Verma and R.S. Parihar "Effects of Magneto - Hydrodynamic and Hematocrit on BloodFlow in an Artery with Multiple Mild Stenosis", International Journal of Applied Mathematics and Computation, Volume 1(1), pp 30-46, 2009.

[12] S. Chakravarty and S. Sen, (2006): "Amathematical model of blood flow and convective diffusion processes in constricted bifurcated arteries", Korea-Australia Rheology Journal, Vol. 18, No.2, PP 51-65.

[13] Sachi Saw1, P.V.S. Nmurthy1 and S.C. Pardhar2: "The effect of body acceleration on two dimensional flow of casson fluid through artery with asymmetric stenosis", The Open Transport Phenomena, Journal 2010, 2, 55-68.

[14] Sapna Ratan Shah and S.U. Siddiqui: "A comparative study for the Non-Newtonian behaviour of blood flow through atherosclerotic arterial segment", Vol. 9, Issue 2, (July-August 2011), Article-019.

[15] Shailes Mishra1, S.U. Siddiqui2 and Amit Medhavi3: "Blood flow through a composite stenosis in an artery with permeable wall", Vol. 6, Issue (June 2011), PP 1798-1813.