The effect of the special cost of some waiting queue models in a government bank

تأثير الكلفة الخاصة لبعض نماذج صفوف الانتظار في احدى المصارف الحكومية

أ.د. عبد الحسين حسن الطائي   إنصاف جاسم مهدي المسعودي
كلية الإدارة والاقتصاد– قسم الإحصاء

المستخلص

نستعرض في هذا البحث صفوف الانتظار وعناصره الاساسية وما توفره من مقاييس خاصة بالأنموذج (M/M/C)، وقد تناول الجانب العملي عملية جمع البيانات وتحليلها وإجراء اختبار حسن المطابقة للتأكد من التوزيع الإحصائي التي تتبعه بيانات الوصول والخدمة وبالتالي ايجاد مقاييس الاداء لنظام صف الانتظار الملائم وكذلك كلفته ، وقد تم التوصل الى إن نموذج صف الانتظار الملائم هو(M/M/3) بدلا من (M/M/2) والذي يكون فيه توزيع الواصلين هو توزيع بواسون اما توزيع زمن الخدمة هو توزيعا اسياً ذو ثلاث قنوات للخدمة .

Abstract

In this paper, we examine the queues, the basic elements and the M / M / C standards. The practical side dealt with the data collection and analysis process and conducting the conformity test to ascertain the statistical distribution of the arrival and service data, The appropriate queueing model is (M / M / 3) instead of (M / M / 2), where the distribution of the arrivals is Poisson distribution. The distribution of the service time is an Exponential distribution with three service channels.

المقدمة :

يعود تاريخ نظرية صفوف الانتظار تقريبا إلى مائة عام ، فهنالك العديد من الدراسات والبحوث التي كتبت عن نظرية صفوف الانتظار أن نظرية صفوف الانتظار (Queueing theory) تطبق في مختلف المجالات التي يتحتم على الوحدات الطالبة للخدمة (الزبائن Customer) الانتظار للحصول على خدمة معينه ، وذلك عن طريق تجهيزات معينة (قنوات الخدمة Services channel) . وان حالات الانتظار للحصول على الخدمة شائعة في حياتنا اليومية إذ تنتظر الوحدات في صفوف أو طوابير معينة للحصول على خدمة معينة مثل المصارف والقطارات ومحطات الوقود وغيرها.

لأجل بلوغ الهدف تضمن البحث قسمين ، تضمن الأول الجانب النظري الذي يتضمن العناصر الأساسية لنماذج صفوف الانتظار وقانون لتل (Little's Law) وعملية الولادة والموت والنماذج الرياضية الخاصة بصفوف الانتظار وكذلك الكلفة في صفوف الانتظار. أما الثاني الذي يمثل الجانب العملي وهو الجانب التطبيقي (البيانات الحقيقية) إذ يبين كيفية جمع البيانات وتحليلها وأجراء الاختبار للتأكد من التوزيع ومن ثم أيجاد مقاييس الأداء لأنظمة صفوف الانتظار (M/M/C) . فضلاً عن الاستنتاجات والتوصيات والمصادر التي توصلت إليها الباحثة في هذا البحث.

مشكلة البحث :

بعد إجراء عدد من المقابلات مع الزبائن والموظفين الموجودين في المصرف وعن طريق الزيارات الميدانية ، شوهد أن هناك عدم ارتياح من طول صفوف الانتظار الموجودة في المصارف نتيجة مراجعة عدد كبير من الزبائن وان وجود قناتين للخدمة نعتقد أنها غير كافية لها. فظهرت مشكلة لابد من البحث عن حل لها ولذلك اختير هذا الموضوع للدراسة .

هدف البحث :

يسعى البحث إلى تحقيق الأهداف الآتية :-

1. اختيار أفضل عدد ملائم لقنوات الخدمة الذي يقترن مع اقل تكاليف متغيرة ويؤدي خدمة جيدة للزبائن .
2. اختيار أفضل تكلفة ممكنَه لتحسين الخدمة المصرفية .

الجانب النظري

التمهيد :

من المعلوم إن الانتظار في صفوف (queues) للحصول على خدمة (Service) أو سلعه معينة أصبحت مشكلة في حياتنا اليومية، إذ نجد الصفوف في جميع قنوات الخدمة ففي المصارف التي تتميز بتدفق الوحدات الطالبة للخدمة (الزبائن) إلى قنوات الخدمة للحصول على خدمه ما ، غالبا ما يشاهد زخم كبير من الوحدات الطالبة للخدمة مكونا بذلك صفوف انتظار، وإن مشكله الزخم قد تعود إلى صعوبة التنبؤ بعدد الوحدات الطالبة للخدمة التي تصل إلى قنوات الخدمة وكذلك الوقت الذي تستغرقه هذه الوحدة داخل قناة الخدمة لحين تلقيها الخدمة ، وان صفوف الانتظار تظهر عندما يكون الطلب على الخدمة أعلى من طاقة نظام الخدمة.

من الضروري معالجه مشكله صفوف الانتظار للتقليل أو للتخلص من الوقت الإضافي للبقاء في صفوف الانتظار، إذ تسمح نظرية صفوف الانتظار بحساب التكاليف الخاصة بالخدمة ووقت الانتظار ، وذلك عن طريق إيجاد الحل الأمثل والمناسب لنظريه صفوف الانتظار التي تسمح باشتقاق وحساب عدد من مقاييس الأداء لصفوف الانتظار ، وسيتم الاطلاع في هذا القسم على أهم العناصر الأساسية والرموز والأنموذج الخاص بصفوف الانتظار واهم التوزيعات الخاصة بعدد الوحدات الطالبة للخدمة ووقت أداء الخدمة.

العناصر الأساسية لنماذج صفوف الانتظار ELEMENTS OF A QUEUING MODEL [1][2][3] :

تعتمد صفوف الانتظار بصورة عامة على عدد من العناصر الأساسية التي يمكن وصفها المفتاح الرئيس لتحليل ودراسة صفوف الانتظار وهذه العناصر على الترتيب :-

1. **وقت الوصول(Arrival Time)أو توزيع الوصول:**

يعرف بأنة' عدد الوحدات (أشخاص، سيارات، مكائن،...) الواصلة في وحدة الزمن(ساعة، يوم، أسبوع،...) ، وكذلك يمكن أن يعرف وقت الوصول بأنه المدة بين وصول وحدتين متتاليتين (Interarrival Time) إلى قناة الخدمة ، وان عملية وصول الوحدات قد تكون ذات شكل ثابت (constant) أو عشوائي (Randomly) مستقل بعضهم عن البعض الأخر، ويعد هذا العنصر من احد العناصر التي تساعد على تحديد نوع النموذج.

2. **وقت الخدمة (Service Time)أو توزيع المغادرة :**

يعرف وقت الخدمة بأنه' معدّل عدد الوحدات (الزبائن) الحاصلة على الخدمة في مدة زمنية معينة ، ويعرف أيضا بأنه معدّل الوقت المستغرق لأداء الخدمة لوحدة واحدة ، وان وقت الخدمة قد يكون ثابتا (Constant) أو عشوائيا (Randomly) ذا توزيع احتمالي معين.

3. **قنوات الخدمة (Service Channels) :**

وهي محطات الخدمة أو ممراتها التي ستدخلها الوحدات الطالبة للخدمة لتلقي الخدمة منها ، وتقدم الخدمة بواسطة قناة واحدة أو بواسطة عدة قنوات ، وفي حالة القنوات المتعددة فأنها أما أن تكون متوازية بحيث يمكن أن تـخدم عـدة وحـدات بوقت واحـد ؛ أو أن تـكون متتالية وفي هذه الحالة فان الوحدة الطالبة للخدمة تمر بعدة مراحل متتابعة كل مرحلة منها تمثل قناة خدمية واحدة.

4. **أنظمة الخدمة (Service Discipline) :**

توجد عدة أنظمة قد تختلف فيما بينها إذ يتم بموجبها التحكم بتقديم الخدمة وهي:

- "من يأتِ أولاً يخُدم أولاً" (FCFS) (First Come First Served) وحسب هذا النظام تقدم الخدمة للوحدات (الزبائن) حسب ترتيب وقت وصولهم إلى النظام (الذي يتكون من صف الانتظار وقناة الخدمة) كما في محطات الوقود أو ورش تصليح السيارات.
- " من يأتِ أخراً يخُدم أولاً" (LCFS) (Last Come First Served)هذا النظام هو عكس النظام السابق إذ تقدم الخدمة لمن جاء أخيراً قبل الذي جاء أولاً أي تقدم الخدمة للوحدات (الزبائن) عكس ترتيب وقت وصولهم كما في المستودعات أو المخازن التي تتكدس فيها البضائع أو المواد غير القابلة للتلف.
- نظام الخدمة بترتيب عشوائي (SIRO) (Service In Random Order) في هذا النظام تتم خدمة الوحدات (الزبائن) بصورة عشوائية ومستقلة (Independed & Randomly) عن زمن الوصول كما في حاله وصول الوحدات (الزبائن) إلى احد القنوات الخدمية الخاصة بالمصرف بشكل عشوائي للحصول على الخدمة.
- نظام الأسبقية (Priority System) في هذا النظام تقدم الخدمة إلى وحدات معينة من المجتمع وذلك لأهميتها أو لدورها المميز كما في حالات الإصابات الخطرة التي تصل إلى المستشفيات إذ مثل هذه الحالات لا تتحمل الانتظار لذلك تكون لهم الأولوية أو الأسبقية في تقديم الخدمة لهم.

5. **حجم النظام (Queue Size) أو الطاقة الاستيعابية لمركز الخدمة:**

يقصد بحجم النظام بأنه عدد الوحدات التي يستوعبها النظام ، أو هو العدد المسموح به من الوحدات التي يمكن أن يستوعبها ذلك النظام ، وأن عدد هذه الوحدات قد يكون محدوداً أو غير محدود .

6. **مصدر الوحدات (الزبائن) (Customers Source)أو مصدر المجتمع :**
إن مصدر الوحدات الطالبة للخدمة يقسم إلى قسمين هما :-
أ . **المصدر النهائي (محدود):** ويتضمن هذا المصدر عدد محدود من الوحدات التي تتقدم للخدمة.
ب. **المصدر اللانهائي (غير محدود)**: يتضمن هذا المصدر عدد غير محدود من الوحدات التي تتقدم للخدمة.

7. **سلوك الوحدات(الزبائن) (Customer Behavior) :**
ان طول صف الانتظار او وقت انتظار الوحدة او مدة وقت الخدمة يعتمدان في الغالب على سلوك الوحدة (الزبون) الذي يصنف إلى :-
أ. **العائق Balking :** يبين هذا السلوك أن الوحدة الطالبة للخدمة قد لا يرغب في الانضمام بصف الانتظار إذا لاحظ أن الصف طويل وذلك باعتقاده قد يأخذ منه وقت انتظار أكثر ، على سبيل المثال الوحدة (الزبون) الذي يريد السفر بالقطار عند رؤيته لصف الانتظار الطويل أمام عداد التذاكر قد لا يحب الانضمام إلى صف ويريد نوع أخر من النقل للوصول إلى غايته.
ب. **نكث العهد Reneging:** في هذا السلوك تقف الوحدة الطالبة للخدمة في صف الانتظار وبعد وقت من الانتظار قد تفقد الوحدة (الزبون) صبرها وتترك الصف قبل أن تقدم لها الخدمة.
ج. **التواطؤ Collusion**: في هذا السلوك عدة وحدات قد يتعاونون فيما بينهم إذ واحد منهم فقط قد يقف في صف الانتظار إذ أن الوحدة الواحدة تمثل مجموعة من الوحدات وأن طول صف الانتظار قد يكون صغيرا ولكن وقت الخدمة لأحد الوحدات كبيراً ، وهذا قد يؤدي إلى فقدان الوحدات الأخرى في صف الانتظار صبرهم .
د. **التسابق Jockeying:** في هذا السلوك الوحدة (الزبون) الموجودة في أحد صفوف الانتظار بعد رؤية طول الصف الأخر الذي هو اقصر مع أمل الحصول على الخدمة قد يترك الصف الحالي وينضم إلى الصف الأقصر إذا كان هناك أكثر من صف انتظار، أي الوحدات الطالبة للخدمة قد لا تلتزم في صف واحد وإنما تتنقل من صف إلى أخر لغرض التقليل من زمن الانتظار.
ولتسهيل دراسة العناصر الأساسية المذكورة آنفاً سيتم وصفها برموز خاصة تعبر عن تلك العناصر تسمى برموز كندال (Kendall's Notation) والتي تتكون من ستة رموز وهي كما يأتي [4][5]:-

(T/X/C)(K/Y/Z)

T: رمز يمثل عدد الوحدات الواصلة. ويمكن أن يأخذ إحدى المؤشرات الآتيـة:
[M]: ومعناها " Markovian " وهو مؤشر يمثل توزيع بواسون " Poisson Distribution " لعدد الوحدات الواصلة.
[D]: ومعناها " Deterministic " وهو مؤشر يمثل التوزيع الذي تكون متغيراته محدده.
[E_k]: مؤشر يمثل توزيع إيرلانك " Erlang Distribution " مع شكل المقياس k.
[G]: والتي تمثل التوزيع العام " General Distribution "بمتوسط وانحراف معياري معروفين.
X: رمز يمثل وقت الخدمة . ويمكن أن يأخذ إحدى الؤشرات الآتية:
[M]: ومعناها " Markovian " وهو مؤشر يمثل التوزيع الأسُي " Exponential Distribution " لتوزيع المغادرة.
[D]: ومعناها " Deterministic " وهو مؤشر يمثل التوزيع الذي تكون متغيراته محدده.
[E_k]: تمثل توزيع إيرلانك " Erlang Distribution " مع شكل المقياس k.
[G] : والتي تمثل التوزيع العام " General Distribution "بمتوسط وانحراف معياري معروفين.
C: تمثل عـدد محطات الخدمـة أو عدد قنوات الخدمة (Number of service).
K: تمثل نظام الخدمة (Service Disiciplin) . ويمكن أن يأخذ إحدى المؤشرات الآتيـة:
- من يأتِ أولاً يخُدم أولاً " First In First Out (FIFO) أو " FCFS" (First Come First Service).
- من يأتِ أخراً يخُدم أولاً " LIFO " (Last In First Out) أو " LCFS " (Last Come First Service) .
- قد تكون تقديم الخدمة ليس له علاقة بالحالتين المذكورة آنفاً أي تتم الخدمة بشكل عشوائي "RANDOM" (Service in random order).
- الإمساك بالخط ،أي عند وصول وحدات مهمين فأنهم سيأخذون بداية خط الانتظار"HL" (Hold On Line).
- حق الشفعة (سماحية) ، أي عند وصول وحدات مهمين، فسوف تقدم الخدمة لهم مباشرة والوحدة التي كانت تحت الخدمة تعود إلى خط الانتظار"PR" (Preemption) .
- النظام العام"GD" (General Discipline) .

Y:تمثل حجم النظام ، ويقصد به أعلى عدد من الوحدات (الزبائن) المسموح لها بالدخول إلى النظام وعند وصول النظام إلى طاقته القصوى فسيتم استبعاد أي وحدة (زبون) من الإفادة من أداء الخدمة أو إن تلك الوحدة ستترك الصف.
Z: تمثل حجم المجتمع الذي تأتي منه الوحدات (الزبائن) ، إذ إما أن يكون حجم المجتمع محدوداً (Finite) ويرمز له ب(N) أو يكون غير محدود (Infinite) ويرمز له ب (∞).

وهذه الأنظمة أحيانا تخضع للقوانين كقانون لتل (Little's Laws) ولرموز معينه والتي يمكن توضيحها كالآتي:
L_S : متوسط عدد الوحدات طالبة الخدمة في النظام.
L_q : متوسط عدد الوحدات طالبة الخدمة في صف الانتظار.
W_S : متوسط الوقت الذي تستغرقه كل وحدة في النظام.
W_q : متوسط الوقت الذي تستغرقه كل وحدة في صف الانتظار.

λ : معدل الوصول في وحدة الزمن.
μ : معدل تقديم الخدمة في وحدة الزمن.
ρ : يسمى بنسبة الاستخدام أو نسبه انشغال مقدم الخدمة ، والذي يساوي معدل الوصول للوحدات الطالبة للخدمة في وحدة الزمن مقسوما على معدل وقت الخدمة في وحدة الزمن ($\rho = \frac{\lambda}{\mu}$).
n: عدد الوحدات في النظام في المدة الزمنية (t) (وتكون مقاسه بوحدات الزمن مثل: ساعات – أيام – أشهر ....الخ)
$P_n(t)$: احتمال وجود n من الوحدات في النظام خلال الزمن t .

P_n : احتمال وجود n من الوحدات في النظام.
P_0 : احتمال عدم وجود أي وحده في النظام.

في عام (1961) تم تطبيق القانون لإيجاد متوسط عدد الوحدات الواصلة والذي سمي بقانون لتل(Little's Law).

قانون لتل (Little's Law) [6] [7] :

وضع هذا القانون من لدن العالم John-Little والذي ينص على أن متوسط عدد الوحدات في النظام يساوي حاصل ضرب معدل وصول الوحدات بمتوسط الوقت الذي تستغرقه كل وحدة في النظام.، ويستعمل هذا القانون على نحو واسع في نظرية صفوف الانتظار ، فلو فرضنا أن

L_s: يمثل متوسط عدد الوحدات في النظام.
λ : يمثل معدل وصول الوحدات.
W_S :يمثل متوسط الوقت الذي تستغرقه كل وحده في النظام.
فان قانون لتل يمكن كتابته بالشكل الآتي:

$$L_s = \lambda W_s \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$

ولقانون لتل عدة تطبيقات إذ يمكن أن يطبق للنظام الذي يشمل صف الانتظار مضافا له الخادم(مقدم الخدمة) ، ويطبق أيضا لصف الانتظار (ماعدا الخادم) لينتج علاقة بين متوسط عدد الوحدات في الصف ومتوسط الوقت الذي تستغرقه كل وحدة في الصف مفترضا ذلك كالآتي :

$$L_q = \lambda W_q \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

إذ ان
L_q : يمثل متوسط عدد الوحدات في صف الانتظار.
W_q: يمثل متوسط الوقت الذي تستغرقه كل وحدة في صف الانتظار.
ويمكن إن يطبق قانون لتل للخادم (مقدم الخدمة) فقط وذلك لمعرفة نسبة انشغال مقدم الخدمة كالآتي:

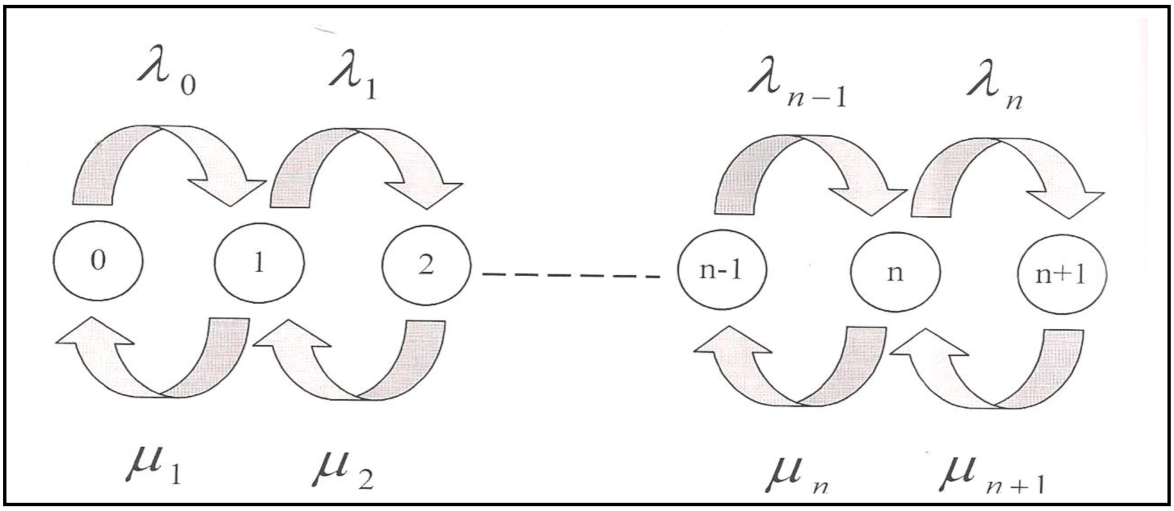
$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \qquad \ldots\ldots\ldots (3)$$

إذ إن
ρ : تمثل نسبة انشغال مقدم الخدمة .

عملية الولادة والموت (The Birth-and- Death process)[8] [9] [10]

تعرف كلمة (الولادة Birth) بأنها عملية وصول وحدات جديدة طالبه للخدمة الى النظام ، وتعرف كلمة (الموت Death) بأنها عملية مغادره الوحدات الطالبة للخدمة النظام بعد الانتهاء من الخدمة.
وتعد من أحدى العمليات العشوائية المهمة التي لها تطبيقات مختلفة في مجالات حياتنا اليومية والاجتماعية ، وتستعمل كثيراً في نماذج السكان لتمثيل الزيادة والنقصان في حجم السكان.
إن حالة الولادة توصف بعدد السكان أو الوحدات الموجودة في النظام وذلك عندما تنتقل حالة النظام من n إلى n+1 وباحتمال λ_n والتي تمثل معدل الوصول .
اما حالة الموت فتوصف بمغادرة الوحدات من النظام وذلك عندما تنتقل حالة النظام من n الى n-1 وباحتمال μ_n التي تمثل معدل الخدمة.

ويمكن توضيح حاله الولادة والموت بالرسم البياني الآتي:



الشكل (1) المخطط البياني لحالة الولادة والموت

وان النظام يكون في حالته الثابتة عندما يتساوى مبدأ معدل دخول الوحدات إلى النظام مع معدل خروج الوحدات من النظام، على افتراض أن عدد الوحدات في النظام يساوي n .

من الشكل (1) يلاحظ بأن تحول حالة النظام من الحالة 0 إلى الحالة 1 تكون بمعدل λ_0 (ولادة) ، وأن تحول حالة النظام من الحالة 1 إلى الحالة 0 تكون بمعدل μ_1 (موت).

وان تحول حالة النظام من الحالة 1 إلى الحالة 2 تكون بمعدل λ_1 ، وأن معدل تحول حالة النظام من الحالة 2 الحالة 1 تكون بمعدل μ_2 .

ومن ثمَّ فأن معدل الدخول للحالة 0 هي $\mu_1 P_1$ ، إذ أن (P_1) تمثل احتمال وصول وحده واحده

وان معدل الخروج من الحالة 0 هي $\lambda_0 P_0$ ، إذ أن (P_0) يمثل احتمال عدم وصول وحده واحدة .

وأن معدل الدخول للحالة 1 هي $\lambda_0 P_0$ مضافا له $\mu_2 P_2$، إذ أن (P_2) يمثل احتمال وصول وحدتين متتاليتين إلى النظام .

وان معدل الخروج من الحالة 1 هي $\lambda_1 P_1$ مضافا له $\mu_1 P_1$.

ويمكن الربط بين الحالتين المذكورتين آنفاً بالمعادلة التي تمثل هذا المبدأ والتي تدعى بمعادلة التوازن (balance equation) والتي يعبر عنها ب (معدل الدخول Mean entering rate = معدل الخروج Mean leaving rate)

لذلك فان معادلة التوازن للحالة 0 هي:-

$$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0 \qquad \ldots\ldots\ldots (4)$$

ومعادلة التوازن للحالة 1 هي:-

$$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1 \qquad \ldots\ldots\ldots (5)$$

وهكذا لبقية الحالات والجدول الآتي يوضح ذلك :-

جدول (1) معادلة التوازن لعمليات الولادة والموت

State الحالة	*Rate in=Rate out* معدل الخروج = معدل الدخول
0	$\mu_1 P_1 = \lambda_0 P_0$
1	$\lambda_0 P_0 + \mu_2 P_2 = \lambda_1 P_1 + \mu_1 P_1$
2	$\lambda_1 P_1 + \mu_3 P_3 = \lambda_2 P_2 + \mu_2 P_2$
0	0
0	0
n-1	$\lambda_{n-2} P_{n-2} + \mu_n P_n = \lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n-1} P_{n-1}$
n	$\lambda_{n-1} P_{n-1} + \mu_{n+1} P_{n+1} = \lambda_n P_n + \mu_n P_n$
0	0
0	0
0	0

إن صفوف الانتظار التي سيتم شرحها تعتمد على توزيع بواسون (Poisson distribution) ، ولمعرفة كيفية الحصول على التوزيع لابد من وضع معادلات رياضية وقوانين خاصة بعملية الولادة والموت عندما يكون النظام في حالته الثابتة لغرض الوصول إلى التوزيع الخاص بالنظام.

إذ أن احتمال وصول أكثر من وحدة خلال الوقت (h) هو (h)0 الذي يعبر عنه رياضيا كالآتي:-

$$\mathrm{P}_{n>1}(\mathrm{h}) = o(h) \qquad \ldots\ldots\ldots (6)$$

إذ أن h هي وقت قصير جدا .

n هي عدد الوحدات.

وأن احتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت (h) يساوي λh مضافا إليه احتمال وصول أكثر من وحدة بالوقت نفسه ويعبر عنه رياضيا كالآتي:-

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{h}) = \lambda h + o(h) \qquad \ldots\ldots\ldots (7)$$

إذ أن

$P_1(\mathrm{h})$ تمثل احتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت (h).

λ تمثل معدل الوصول.

h تمثل وقت قصير جدا.

أما احتمال عدم وصول وحدة خلال الوقت القصير جدا (h) يساوي واحد مطروحا منه λh ومطروحا منه احتمال وصول أكثر من وحدة بالوقت نفسه ويعبر عنها رياضيا كالآتي:-

$$\mathrm{P}_0(\mathrm{h}) = 1 - \lambda h - o(h) \qquad \ldots\ldots\ldots (8)$$

وأن احتمال عدم وصول وحدة خلال الوقت (t+h) يساوي حاصل ضرب احتمال عدم وصول وحدة خلال الوقت (t) الذي يرمز له ب $P_0(\mathrm{t})$ باحتمال عدم وصول وحدة خلال الوقت القصير جدا (h) ويعبر عنه رياضيا كما يأتي:-

$$P_0(\mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{P}_0(\mathrm{t})\mathrm{P}_0(\mathrm{h}) \qquad \ldots\ldots\ldots (9)$$

إذ أن t تمثل الوقت الأصلي.

كما أن احتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت *(t+h)* يساوي حاصل ضرب احتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت *(t)* باحتمال عدم وصول وحده واحدة خلال الوقت *(h)* مضافا إلية حاصل ضرب احتمال عدم وصول وحدة واحدة خلال الوقت *(t)* باحتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت *(h)* ويعبر عنه رياضيا كالأتي:-

$$P_1(\mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{P}_1(\mathrm{t})\mathrm{P}_0(\mathrm{h}) + \mathrm{P}_0(\mathrm{t})\mathrm{P}_1(\mathrm{h}) \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

كما أن احتمال وصول وحدتين خلال الوقت *(t+h)* يساوي حاصل ضرب احتمال وصول وحدتين خلال الوقت *(t)* باحتمال عدم وصول وحده واحدة خلال الوقت *(h)* مضافا إلية حاصل ضرب احتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت *(t)* باحتمال وصول وحدة واحدة خلال الوقت *(h)* ويعبر عنه رياضيا كالأتي:-

$$P_2(\mathrm{t}+\mathrm{h}) = \mathrm{P}_2(\mathrm{t})\mathrm{P}_0(\mathrm{h}) + \mathrm{P}_1(\mathrm{t})\mathrm{P}_1(\mathrm{h}) \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

أن نظرية صفوف الانتظار تعد من النماذج الرياضية والإحصائية التي تستعمل في التطبيقات العملية ، ، إذ تتنوع هذه النماذج اعتماداً على العناصر الأساسية لصفوف الانتظار، وسيتم التركيز على التوزيعين الرئيسين والأساسين في نظرية صفوف الانتظار وهما توزيع بواسون Poisson distribution والتوزيع الآسي exponential distribution ودالتهما على التوالي هما :

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad ,x = 0,1,2,\ldots$$

وبمتوسط وتباين يساوي(λ)

وأن الوقت الذي تستغرقه كل وحدة طالبة للخدمة (زبون) فأن يتوزع توزيعاَ أسياَ، ودالته هي :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad ,x \geq 0$$

وبمتوسط ($\frac{1}{\lambda}$) وتباين ($\frac{1}{\lambda^2}$).

الأنموذج الرياضي الخاص بصفوف الانتظار

توجد عدة نماذج رياضية وإحصائية يمكن أن تستعمل في نظرية صفوف الانتظار والأنموذج الملائم لهذا البحث هو(M/M/C).

أنموذج (M/M/C) [11] [12] [13] :

هو نظام انتظار مع وجود (*C*) من قنوات الخدمة وان وصول الوحدات (الزبائن) يتبع التوزيع المتقطع وهو توزيع بواسون (Poisson distribution) بمعدل وصول (λ) ، بينما أوقات الخدمة فإنها تتبع التوزيع المستمر وهو التوزيع الآسي (exponential distribution) بمعدل (μ)، فإذا كان المجتمع غير محدود فان أفضل نظام للخدمة هو من يأتي أولا يخدم أولا (FCFS) ، وحسب عملية الولادة والموت سنحصل على احتمال وجود عدد من الوحدات في النظام والذي يرمز له ب (P_n) إذ أن (n) تمثل عدد الوحدات (الزبائن) وان(n=0,1,2,3,...) .

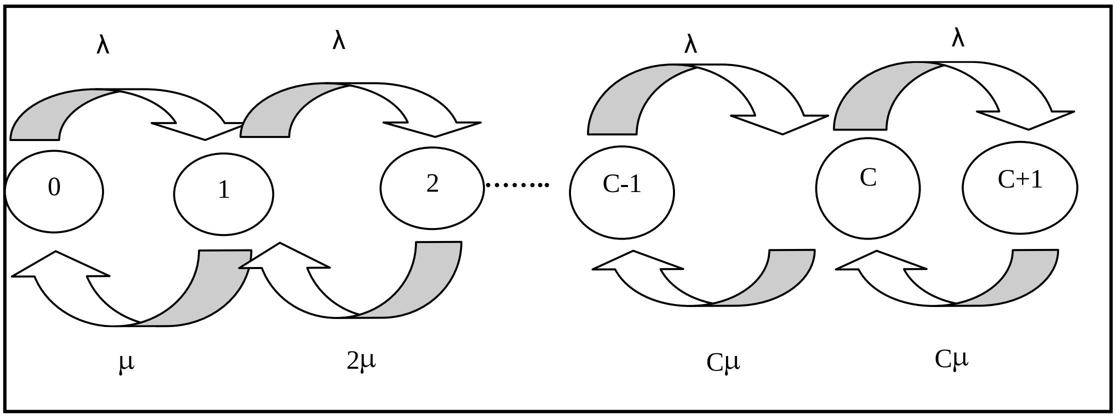
أن معدل الوصول في هذا الأنموذج ل (n) من الوحدات إلى النظام ستكون بمعدل (λ) أي أن :

$$\lambda_n = \lambda \qquad \forall\, n \geq 0,1,2,\ldots$$

أما معدل الخدمة في هذا الأنموذج ل (n) من الوحدات في النظام فتكون كما يأتي :

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & \ldots\quad 0 \leq n < m \\ C\mu & \ldots\quad n \geq m \end{cases}$$

إذ أن (C) تمثل عدد القنوات التي تقدم الخدمة. والشكل أدناه يوضح عمليه الوصول والمغادرة لهذا الأنموذج، وذلك كما يأتي:



الشكل (2) حالة الانتقال لأنموذج (M/M/C)

إذ أن C-1 في الشكل (2) تعني بأن عدد الوحدات الموجودة في النظام مساوية لعدد القنوات الخدمية الكلية مطروحا منها (واحد) التي تعني قناة خدمية واحدة.

وأن C في الشكل (2) تعني بأن عدد الوحدات الموجودة في النظام مساوية لعدد القنوات الخدمية الكلية.

وأن C+1 في الشكل (2) تعني بأن عدد الوحدات الموجودة في النظام أكثر من عدد القنوات الخدمية الكلية الذي مكونا بذلك صف انتظار.

ولإيجاد احتمال وجود (n) من الوحدات في النظام أي أيجاد P_n حسب هذا الأنموذج لابد من التطرق إلى الحالات الثلاثة الخاصة بهذا الأنموذج وذلك كالآتي:

الحالة الأولى:

عندما تكون عدد الوحدات التي تطلب الخدمة أقل من عدد قنوات الخدمة أي أن ($n < C$) ، وذلك يعني لا يوجد صف أنتظار لأن كل الوحدات الواصلة سوف تقدم لهم الخدمة ومعدل تقديم الخدمة سوف تكون (nμ) فقط لكل n من الوحدات الموجودة على القنوات المشغولة بتقديم الخدمة ولكل معدل تقديم الخدمة μ، ومن ثمَّ فان P_n حسب هذة الحالة يتم إيجاده بعد استخراج احتماليه عدم وجود وحدات خلال الوقت t والوقت h أي عندما (n=0) الذي يرمز له ب ($P_0(t+h)$) وذلك حسب المعادلة الآتية :

$$P_0(t+h) = P_0(t)P_0(h)q_0(h) + P_1(t)q_1(h)P_0(h)$$

حيث أن $q_0(h)=1$

وبالتعويض بما يساويه في المعادلة المذكورة آنفاً نحصل على :

$$\begin{aligned} P_0(t+h) &= P_0(t)[1-\lambda h] + P_1(t)[1-\lambda h][\mu h] \\ &= P_0(t) - P_0(t)\lambda h + P_1(t)\mu h \end{aligned}$$

بعد نقل بعض الحدود وأجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على:

$$P_1 = \frac{\lambda}{\mu}P_0 \qquad \ldots\ldots\ldots (12)$$

الحالة الثانية:

عندما تكون عدد الوحدات الطالبة للخدمة اكبر أو تساوي(1) واقل من (C-1) أي أن ($1 \leq n \leq C-1$)، وذلك يعني بأن كل القنوات سوف تكون مشغولة بتقديم الخدمة للوحدات (الزبائن) حين وقت وصولهم إلى المنظمة أو الدائرة ، ومعدل تقديم الخدمة سوف تكون (nμ) فقط لكل n من الوحدات الموجودة على القنوات المشغولة بتقديم الخدمة ولكل معدل تقديم الخدمة μ ومعدل وصول λ ، ومن ثمَّ فأن P_n تحت شرط ($\lambda \leq C\mu$) وحسب هذه الحالة يتم إيجادها بعد استخراج احتماليه وجود n من الوحدات خلال الوقت t والوقت h وذلك حسب المعادلة الأتية:

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= P_n(t)P_0(h)q_0(h) + P_{n-1}(t)P_1(h)q_0(h) + P_{n+1}(t)q_1(h)P_0(h) + P_n(t)P_1(h)q_1(h) \\ &\quad + o(h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_n(t+h) &= p_n(t)[1-\lambda h][1-n\mu h] + P_{n-1}(t)[\lambda h][1-(n-1)\mu h] \\ &\quad + P_{n+1}(t)[1-\lambda h]\ [(n+1)\mu h] \qquad \ldots\ldots\ldots (13) \end{aligned}$$

وبتبسيط المعادلة (13) نحصل على :

$$P_n(t+h) = p_n(t)[1-(\lambda+n\mu)h] + P_{n-1}(t)[\lambda h] + P_{n+1}(t)[(n+1)\mu h]$$

وبنقل بعض الحدود أجراء بعض العمليات الرياضية نحصل على :

$$P_n = P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!} \quad , 1 \le n \le C-1 \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

أو يتم الحصول على (P_n) كالآتي:

$$P_n = P_0 \prod_{i=1}^{C-1} \frac{\lambda_i}{(i+1)\mu}$$

$$P_n = P_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{C-1}}{(2\mu)(3\mu)\ldots((C-1)\mu)}$$

$$P_n = P_0 \frac{\lambda^n}{(2\mu)(3\mu)\ldots(n\mu)}$$

$$= P_0 \frac{\lambda^n}{n!\,\mu^n}$$

$$= P_0 (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!} \quad \forall\, 1 \le n \le C-1$$

الحالة الثالثة:

عندما تكون عدد الوحدات الطالبة للخدمة اكبر أو تساوي (C) أي أن $(n \ge C)$، وذلك يعني بأن كل القنوات سوف تكون مشغولة بتقديم الخدمة للوحدات (الزبائن) حين وقت وصولهم إلى المنظمة أو الدائرة وما يزيد عن عدد قنوات الخدمة سوف يبقى في صف الانتظار منتظرا دورهُ لحين حصوله على الخدمة، وهناك سيكون (n-C) من الوحدات في الصف ومعدل تقديم الخدمة سيكون (Cμ) لكل C من القنوات التي تكون مشغولة ، ومن ثمَّ فأن P_n تحت شرط ($\lambda \le C\mu$) وحسب هذه الحالة يتم إيجادها بعد استخراج احتمالية (C-1) من الوحدات وذلك من خلال التعويض عن (n=C-1) في المعادلة الاتية:

$$0 = -(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1}$$
$$0 = -[\lambda + (C-1)\mu]P_{C-1} + \lambda P_{C-2} + C\mu P_C$$

ومنها

$$C\mu P_C = [\lambda + (C-1)\mu]P_{C-1} - \lambda P_{C-2} \quad \ldots\ldots\ldots (15)$$

وبقسمة المعادلة (15) على (Cμ) نحصل على :

$$P_C = \frac{1}{C\mu}[\lambda + (C-1)\mu]P_{C-1} - \frac{\lambda}{C\mu} P_{C-2} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

أن قيمه(P_{C-1} و P_{C-2}) في المعادلة (16) غير معروفه فيتم إيجادها عن طريق التعويض في المعادلة(14) مرة عن (n=C-1) ومره أخرى عن (n=C-2) فنحصل على :

$$P_{C-1} = \frac{1}{(C-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-1} P_0$$

و

$$P_{C-2} = \frac{1}{(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-2} P_0$$

أذن المعادلة (16) ستكون كما يأتي:

$$P_C = \frac{1}{C\mu}[\lambda + (C-1)\mu]\left[\frac{1}{(C-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-1} P_0\right] - \frac{\lambda}{C\mu}\left[\frac{1}{(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-2} P_0\right]$$

$$P_C = \frac{\lambda}{C\mu}\left[\frac{1}{(C-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-1} P_0\right] + \frac{(C-1)\mu}{C\mu(C-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-1} P_0 - \frac{\lambda}{C\mu}\left[\frac{1}{(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-2} P_0\right]$$

$$P_C = \frac{1}{C(C-1)!}(\frac{\lambda}{\mu})^{C-1+1} P_0 + \frac{(C-1)\mu}{C\mu(C-1)(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-1} P_0 - \frac{\lambda}{C\mu}\left[\frac{1}{(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-2} P_0\right]$$

$$P_C = \frac{1}{(C)!}(\frac{\lambda}{\mu})^C P_0 + \frac{\lambda}{C\mu}\left[\frac{1}{(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-2} P_0\right] - \frac{\lambda}{C\mu}\left[\frac{1}{(C-2)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C-2} P_0\right]$$

$$\therefore P_C = \frac{1}{C!}(\frac{\lambda}{\mu})^C P_0$$

أما عندما نعوض(n=C+1) في المعادلة الاتية:

$$0 = -(\lambda + n\mu)P_n + \lambda P_{n-1} + (n+1)\mu P_{n+1}$$

$$0=-(\lambda+(C+1)\mu)P_{C+1}+\lambda P_C+(C+2)\mu P_{C+2}$$

وبتبسيط المعادلة المذكورة آنفاً نحصل على:

$$P_{C+1}=\frac{\lambda}{C\mu}P_C$$

وبالتعويض عن P_C بما يساويه نحصل على:

$$P_{C+1}=\frac{\lambda}{C\mu}[\frac{1}{C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C P_0]$$

$$P_{C+1}=\frac{1}{CC!}[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C+1} P_0]$$

وكذلك عندما نعوض عن (n=C+2) في المعادلة الاتية :

$$0=-(\lambda+n\mu)P_n+\lambda P_{n-1}+(n+1)\mu P_{n+1}$$

$$0=-(\lambda+(C+2)\mu)P_{C+2}+\lambda P_{C+1}+(C+3)\mu P_{C+3}$$

وبتبسيط المعادلة نحصل على:

$$P_{C+2}=\frac{1}{C^2C!}\left[\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{C+2} P_0\right]$$

وباستمرار التعويض نحصل على :

$$P_n=\left(\frac{1}{\mu!}\right)\left(\frac{1}{C^{n-C}}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 \qquad \forall \quad n\geq C \qquad \ldots\ldots\ldots(17)$$

أو يتم الحصول على (P_n) كالآتي:

$$P_n=P_0\prod_{i=0}^{C-1}\frac{\lambda i}{(i+1)\mu}\prod_{i=C}^{n-1}\frac{\lambda_i}{i\,\mu}$$

$$P_n=P_0\frac{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_{C-1}}{(1\mu)(2\mu)\ldots(C\mu)}*\frac{\lambda_C\lambda_{C+1}\ldots\lambda_{n-1}}{(C\mu)((C+1)\mu)\ldots((n-1)\mu}$$

$$P_n=P_0\frac{\lambda*\lambda\ldots\lambda}{(1\mu)(2\mu)\ldots(C\mu)}\times\frac{\lambda*\lambda\ldots\lambda}{(C\mu)(C\,\mu)\ldots(n-1)\mu}$$

$$\therefore P_n=P_0\left(\frac{1}{C!}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(\frac{1}{C^{n-C}}\right)$$

ويمكن معرفة احتمال عدم وجود وحدة في النظام الذي يرمز له ب (P_0) ، وذلك من خلال العلاقة الآتية:

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=1$$

إذ أن

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n=\sum_{n=0}^{C-1}P_n+\sum_{n=C}^{\infty}P_n$$

وبالتعويض عن كل بما يساويه نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{C-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0+\sum_{n=C}^{\infty}\frac{1}{C^{n-C}.\,C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0=1$$

أو

$$\sum_{n=0}^{C-1}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0+\sum_{n=C}^{\infty}\frac{1}{\frac{C^n}{C^C}.\,C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0=1$$

وبتبسيط المعادلة وأجراء عدد من العمليات الرياضية نحصل على :

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{C-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n + \frac{1}{C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C \left(\frac{C\mu}{C\mu-\lambda}\right)}$$

مقاييس الأداء لنظام صف الانتظار

بعد معرفة قيمة P_n للحالات الثلاثة الخاصة بأنموذج (M/M/C)،فيمكننا تحديد مقاييس الأداء،وأن متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة في النظام(L_s)تستخرج باستعمال القيمة المتوقعة التي تمثل متوسط طول صف الانتظار الذي يرمز له ب (E) :

$$L_s = En = \sum_{n=0}^{\infty} nP_n$$

وبالتعويض عن (P_n) بما يساويه نحصل على:

$$L_s = En = \sum_{n=0}^{C-1} n\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0 + \sum_{n=C}^{\infty} n\frac{1}{C^{n-C}.C!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n P_0$$

ومن ثمَّ

$$L_s = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}$$

إما متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة في صف الانتظار يمكن احتسابه باستعمال القانون الآتي:

$$L_q = L_s - L$$

وبالتعويض عن كل بما يساويه نحصل على :

$$L_q = \left[\frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}\right] - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\therefore L_q = \frac{\lambda\mu\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2}P_0$$

أما متوسط الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام (L_s) فيمكن احتسابها بالاعتماد على قانون لتل (Little's law) من المعادلة :(1)

$$L_s = \lambda W_s$$

ومنها

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}$$

وبالتعويض عن كل بما يساويه نحصل على:

$$W_s = \left(\frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{\lambda}{\mu}\right)\frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore W_s = \frac{\mu(\frac{\lambda}{\mu})^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2}P_0 + \frac{1}{\mu}$$

وبحسب قانون لتل (Little's law) حسب المعادلة (2) يمكن احتساب متوسط الوقت الذي تستغرقه الوحدات في صف الانتظار الذي يرمز له ب (W_q) كما يأتي :-

$$L_q = \lambda W_q$$

ومنها

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

وبالتعويض عن كل بما يساويه نحصل على :

$$W_q = \left(\frac{\lambda\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2} P_0 \right) \frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore W_q = \frac{\mu \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^C}{(C-1)!\,(C\mu-\lambda)^2} P_0$$

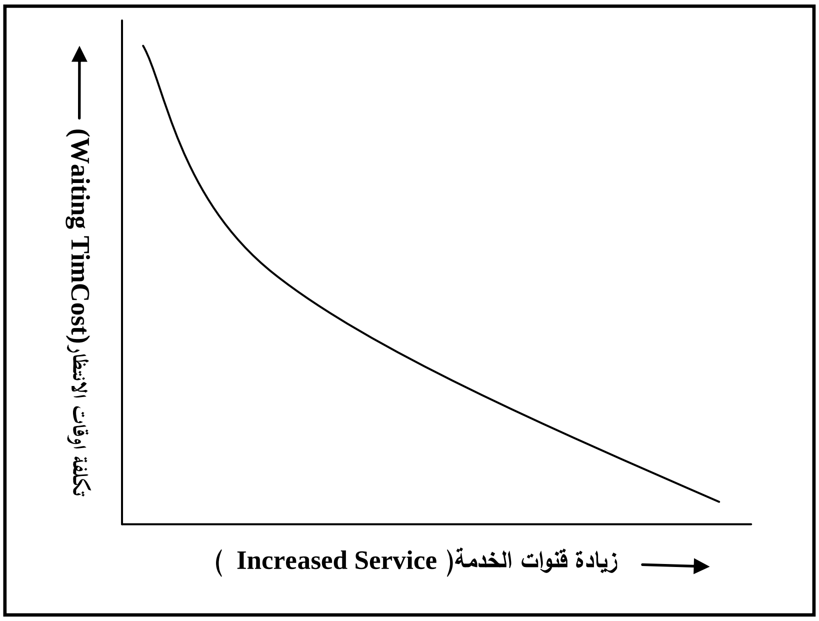
الكلفة في صفوف الانتظار [13] [14] [15] [16] [17] :

الكلفة الإجمالية قد تتضمن نوعين من التكاليف وهي تكاليف كمية (المباشرة) وتكاليف غير كميه(غير المباشرة).

فالتكاليف الكمية (المباشرة) : هي كلفة الخدمة التي تقدمها المنشأة أو المنظمة أو الدائرة . وهذه التكاليف قد تكون ثابتة كرواتب الموظفين و متغيره كمساحة الغرف ، عدد قنوات الخدمة الأثاث ، الكهرباء ، وغيرها .

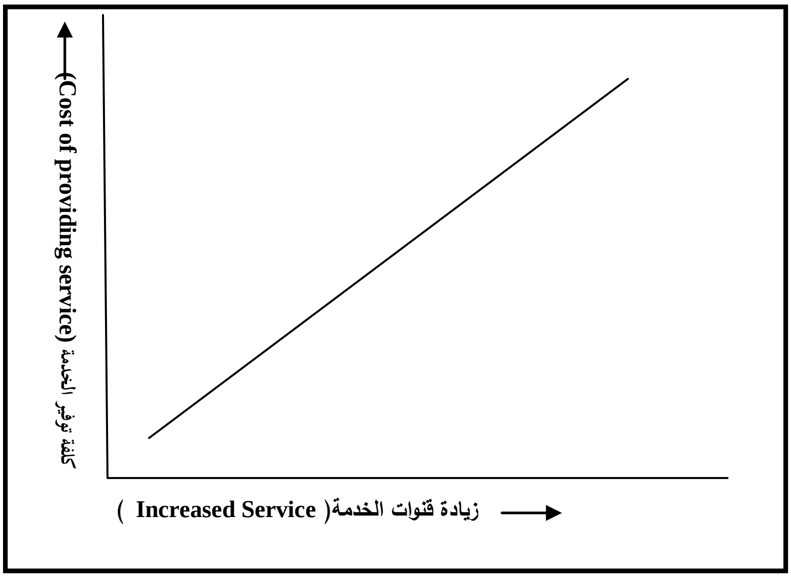
أما التكاليف غير الكمية (غير المباشرة) : هي الكلفة التي تخص الوحدات الطالبة للخدمة (الزبائن) كالجهد الذي يبذله الزبون في الانتظار وأضاعه الوقت والتعب وغيرها.

والشكل (3) يوضح نوع علاقة مستوى قنوات تقديم الخدمة بتكاليف وقت الانتظار كالآتي:



الشكل (3) العلاقة بين مستوى الخدمة وتكاليف أوقات الانتظار

إذ أن زيادة عدد قنوات الخدمة يؤدي إلى انخفاض تكاليف الانتظار فمن الشكل المذكور آنفاً نلاحظ عندما كان عدد القنوات (واحداً مثلاً) كانت كلفة الانتظار عالية وعند ازدياد عدد القنوات نلاحظ أن كلفة الانتظار تبدأ بالانخفاض.
أن الشكل (4) يوضح العلاقة بين مستوى تقديم الخدمة وتكلفة توفير تلك الخدمة ، ويلاحظ بأنه كلما زادت طاقه الخدمة (عدد قنوات تقديم الخدمة) أدى إلى زيادة في كلفتها ، وبالعكس كلما انخفضت طاقه الخدمة (عدد قنوات تقديم الخدمة) أدى إلى انخفاض في تكلفتها.



الشكل (4) العلاقة بين مستوى الخدمة وتكلفة توفير الخدمة

أن فعالية أي نظام لتحليل صفوف الانتظار هو تحقيق التوازن بين تكلفة تقديم مستوى معين من طاقة الخدمة وتكلفة انتظار الوحدات في صف الانتظار لحين الحصول على الخدمة ، ومن الشكل (3) و(4) يلاحظ إنه كلما زادت طاقة الخدمة(عدد قنوات تقديم الخدمة) انخفض عدد الوحدات المنتظرة في صف ومن ثمَّ انخفاض وقت انتظارهم أي انخفاض تكاليف الانتظار وزيادة تكاليف قنوات تقديم الخدمة ، وبالعكس كلما انخفضت طاقة الخدمة (عدد قنوات تقديم الخدمة) ازدادت عدد الوحدات المنتظرة في صف الانتظار، ومن ثمَّ زيادة تكاليف صف الانتظار (المباشرة وغير المباشرة) وانخفاض تكاليف قنوات تقديم الخدمة.أي أن عدد قنوات الخدمة تتناسب عكسياً مع كلفة أوقات الانتظار وطردياً مع كلفة تقديم الخدمة .
ومن ثمَّ يكون الهدف من الكلفة لصفوف الانتظار هو تحديد مستوى معين من طاقة الخدمة يترتب عليه انخفاض التكلفة الإجمالية ، وذلك بعد أن يتم القيام بنموذج للتكلفة الإجمالية التي تشمل تكلفة الانتظار وتكلفة الخدمة .
أن كلفة عدد قنوات الخدمة يتناسب عكسيا مع تكاليف الانتظار كما في الشكل (5) لذلك فأن كلفة الخدمة (Service cost) الكمية (المباشرة) هي عبارة عن عدد قنوات الخدمة مضروبا بكلفة قناة الخدمة الواحدة ، وبذلك فأن كلفة الخدمة المتوقعة $E(S_c)$تستخرج كما يأتي:

$$\mathrm{E}(S_c) = S.C_s \qquad \dots\dots\dots (18)$$

إذ تشير (C_s) إلى كلفة قناة الخدمة الواحدة خلال وحدة الزمن.
وتشير (S) إلى عدد قنوات الخدمة ، والذي يمكن الحصول عليها من حاصل قسمة عدد الوحدات الطالبة للخدمة (الزبائن) خلال وحدة الزمن (يوم ، أسبوع ، سنة ، وغيرها) والذي يرمز لها ب (B_1) مقسوما على عدد الزبائن الذين تقدم لهم الخدمة من قناة واحدة خلال وحدة الزمن (يوم ، أسبوع ، سنة ، وغيرها) والذي يرمز لها ب (B_2) بعبارة اخرى ان عدد قنوات الخدمة (S) هي $\frac{\mathrm{B}_1}{\mathrm{B}_2}$ يعبر عنها رياضياً بالمعادلة الآتية:

$$S = \frac{B_1}{B_2} \qquad \dots\dots\dots (19)$$

وبتعويض المعادلة (19) في المعادلة (18) نحصل على:

$$\mathrm{E}(S_c) = \frac{B_1}{B_2}.C_s \qquad \dots\dots\dots (20)$$

أما كلفة انتظار (Waiting cost) الوحدة (الغير مباشره) فهي عبارة عن حاصل ضرب متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة في النظام (L_s) مضروبا في كلفة الانتظار للوحدة الطالبة للخدمة خلال وحده زمنيه (C_w)، كما يأتي:-

$$\mathrm{E}(W_c) = L_s.C_w \qquad \dots\dots\dots (21)$$

إذ تشير (C_w) إلى كلفة انتظار الوحدة الطالبة للخدمة (الزبون) خلال وحدة الزمن.
وتشير (L_s) الى متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة (الزبائن) في النظام .

وعن طريق استعمال الحل ألتتابعي يمكن الوصول إلى النقطة المثلى لعدد القنوات التي تفي بالغرض وتجعل الصف في حده الأدنى وكذلك هذا العدد من القنوات يقترن بالكلفة ألأصغريه.

وان متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة في النظام تساوي حاصل قسمه عدد الوحدات التي تم تقديم الخدمة لها عند بداية عمل الدائرة أو المنظمة والذي يرمز لها ب (B_2) مضافا اليها عدد الوحدات التي تم تقديم الخدمة لها عند نهاية العمل والذي يساوي (صفراً) وذلك لأنه لا توجد هناك أي وحده طالبه للخدمة في الدائرة او المنظمة عند نهاية العمل ،ومن ثمَّ فأن متوسط عدد الوحدات الطالبة للخدمة في النظام سوف يعبر عنها رياضيا كالتالي :

$$L_s = \frac{B_2 + 0}{2} = \frac{B_2}{2} \qquad \ldots\ldots\ldots (22)$$

وبتعويض المعادلة (22) في المعادلة (21) نحصل على :

$$E(W_c) = \frac{B_2}{2} . C_w \qquad \ldots\ldots\ldots (23)$$

ومن المعادلة (20) و (23) يمكن حساب معادلة التوقع للتكاليف الكلية (Total cost) كما يأتي :-

$$E(T_c) = E(S_c) + E(W_c)$$

وبالتعويض عن كل من ($E(W_c)$ و $E(S_c)$) بما يساويه نحصل على :

$$\therefore E(T_c) = \frac{B_1}{B_2} . C_s + \frac{B_2}{2} . C_w \qquad \ldots\ldots\ldots (24)$$

فلتحديد العدد الأمثل من الوحدات الطالبة للخدمة لكل قناة خدمية ، لابد من اشتقاق المعادلة (24) بالنسبة إلى (B_2) التي تمثل عدد الوحدات (الزبائن) التي تم تقديم الخدمة لهم من قبل قناة خدمة واحدة خلال وحدة الزمن ، و كما يأتي :

$$\frac{dE(T_c)}{dB_2} = \frac{B_2 . 0 - B_1 . 1}{(B_2)^2} C_s + \frac{1}{2} C_w$$

$$\because \frac{dE(T_c)}{dB_2} = 0$$

$$\therefore \frac{B_2 . 0 - B_1 . 1}{(B_2)^2} C_s + \frac{1}{2} C_w = 0$$

$$\frac{-B_1}{(B_2)^2} C_s + \frac{1}{2} C_w = 0$$

$$\frac{B_1}{(B_2)^2} C_s = \frac{1}{2} C_w$$

ومنها

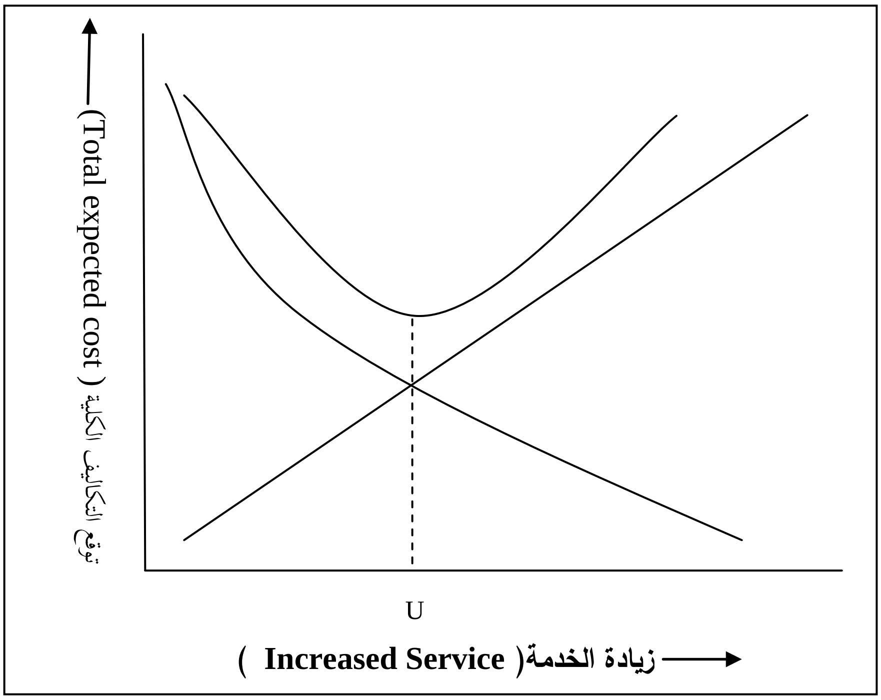
$$(B_2)^2 = \frac{2. B_1 . C_s}{C_w}$$

ومن ثمَّ نحصل على :

$$B_2 = \sqrt{\frac{2. B_1 . C_s}{C_w}} \qquad \ldots\ldots\ldots (25)$$

أي عدد الوحدات التي تم تقديم الخدمة لها من قبل القناة الواحدة خلال وحدة الزمن يساوي الجذر ألتربيعي الموجب لحاصل قسمة عدد الزبائن الطالبين للخدمة خلال وحدة الزمن (يوم ، أسبوع ، شهر ، ...) مضروبا بكلفة القناة الواحدة (C_s) على كلفة الانتظار(C_w) التي يصعب تحديدها فقد تحسب كنسبة مئوية من قيمة كلفة القناة الواحدة .

والشكل أدناه يوضح معادلة التوقع للتكاليف الإجمالية .



الشكل(5) يوضح معادلة التوقع للتكاليف الإجمالية

أن الشكل (5) يوضح كلفة التكاليف الإجمالية وان (U) يمثل أدنى تكلفه أجماليه عند مستوى الخدمة.

الجانب العملي

التمهيد :

يتضمن هذا الفصل التطبيقات العلمية للجانب النظري من هذا البحث ، إذ تم تطبيق ذلك في مصرف الرشيد / 21 عن طريق دراسة صفوف الانتظار ومعرفة معدل الوصول (λ) ومعدل الخدمة (μ) ، وقد تم استعمال البرنامج الجاهز (Win QSB) لمعرفة مدى كفاءة الأنموذج المستخدم وذلك عن طريق حساب مقاييس الأداء الخاصة بصفوف الانتظار (M/M/C) .

جمع البيانات (collected of data)

بالنظر لعدم توفر معلومات كافية عن معدل الوصول (λ) ومعدل الخدمة (μ) (أو الوقت المستغرق لتقديم الخدمة للزبون في قناة الخدمة) فقد قامت الباحثة بجمع البيانات بنفسها وبشكل يومي ولمدة أسبوعين وذلك حسب الاستمارة الموجودة في الملحق ، وقد تم اختيار مدة الذروة بالنسبة ل (مصرف الرشيد / 21 / شعبة الرواتب) التي تم الاستفسار عنها وتبين أن المدة التي يزداد فيها مراجعة الزبائن هي من بعد تاريخ (14) من كل شهر ولغاية نهاية الشهر ، لذا اختارت الباحثة المدة من (28-14) من الشهر.

وجدت الباحثة في المصرف قناتين للخدمة ، وصفاً مزدحماً (طويلاً) للانتظار.

بدأت الباحثة بتسجيل وصول الزبائن (λ) بالساعة في كل يوم ، إذ صممت استمارة وقت ثبت فيها ساعات العمل اليومية المنتظمين في الصف وكما في الجدول (2) الذي يبين عدد الزبائن الواصلين لليوم الأول وكالاتي:-

جدول (2) توزيع وصول الزبائن في اليوم الأول

عدد الزبائن الواصلين خلال كل ساعة	القناة الخدمية 1	القناة الخدمية 2	المجموع
08:30 – 09:30	13	10	23
09:30 – 10:30	31	32	63
10:30 – 11:30	26	29	55
11:30 – 12:30	15	28	43
12:30 – 01:30	7	15	22
01:30 – 02:30	5	7	12
المجموع	97	121	218

ففي اليوم الأول تم حساب معدل الوصول بالساعة الواحدة (λ_1) ، وذلك عن طريق قسمة مجموع عدد الزبائن الواصلين على عدد ساعات العمل (6 ساعات) وكالأتي:-

$$\lambda_1 = \frac{218}{6} = 36.33$$

وبنفس الطريقة السابقة نحصل على معدل الوصول لليوم الثاني وبالساعة الواحدة (λ_2) ، كالأتي:-

$$\lambda_2 = \frac{224}{6} = 37.33$$

إذن معدل وصول الزبائن لليوم الثاني وفي الساعة الواحدة يساوي (λ_2 = 37.33 زبون / ساعة) .

وعلى ضوء الطريقة المذكورة آنفا فقد تم مراقبة عدد الزبائن الواصلين والملتحقين بصفوف الانتظار لمدة أسبوعين كالآتي :-

جدول (3) توزيع معدل عدد الزبائن الواصلين للمدة من (28-14) من الشهر

عدد الأيام	مجموع عدد الزبائن	معدلات الوصول
اليوم الأول	218	36.33
اليوم الثاني	224	37.33
اليوم الثالث	231	38.5
اليوم الرابع	248	41.33
اليوم الخامس	283	47.17
اليوم السادس	286	47.67
اليوم السابع	284	47.33
اليوم الثامن	257	42.83
اليوم التاسع	241	40.17
اليوم العاشر	216	36
المجموع	2488	414.66

وان معدل الوصول العام لليوم الواحد وبالساعة الواحدة (λ) لقناتي الخدمة نحصل عليها بقسمة مجموع معدلات الوصول للأيام العشر (λ_i , $i = 1,2,3,4, \dots 10$) على (10) يوم ، وكالاتي:-

$$\lambda = \frac{414.66}{10} = 41.466 \text{ زبون/ساعة}$$

وبالنظر لوجود قناتين للخدمة فان معدل الوصول في صف كل قناة خدمة هو (λ = 20.733 زبون / ساعة) .

كما يمكن حساب معدل عدد الزبائن الذين تم تقديم الخدمة لهم (μ) لقناتي الخدمة بالطريقة نفسها التي فيها استخرج معدل الوصول (λ) ، وذلك عن طريق الاستعانة بالجدول (4) الأتي:-

جدول (4) توزيع معدل عدد الزبائن الذين تمت خدمتهم خلال أسبوعين

عدد الأيام	مجموع الزبائن الذين تمت خدمتهم	معدل الزبائن الذين تمت خدمتهم بالساعة لقناتي الخدمة	معدل الزبائن الذين تمت خدمتهم بالساعة للقناة الواحدة	الوقت المستغرق للخدمة في القناة الواحدة بالدقيقة
اليوم الأول	256	42.67	21.335	2.812
اليوم الثاني	292	48.67	24.335	2.466
اليوم الثالث	294	49	24.5	2.449
اليوم الرابع	291	48.5	24.25	2.474
اليوم الخامس	265	44.17	22.085	2.717
اليوم السادس	249	41.5	20.75	2.892
اليوم السابع	239	39.83	19.915	3.013
اليوم الثامن	232	38.67	19.335	3.103
اليوم التاسع	227	37.83	18.915	3.172
اليوم العاشر	226	37.67	18.835	3.186
المجموع	2568	428.51	214.255	28.284

وبقسمة مجموع معدلات عدد الزبائن الذين تمت خدمتهم على عشرة أيام (10 يوم) نحصل على معدل تقديم الخدمة لليوم الواحد وبالساعة الواحدة وكالاتي:-

$$\mu = \frac{428.51}{10} = 42.851 \text{ زبون/ ساعة}$$

أي إن معدل تقديم الخدمة لقناتي الخدمة (زبون / ساعة $\mu = 42.85$) . أو أن معدل تقديم الخدمة للقناة الواحدة (زبون / ساعة $\mu = 21.43$)

بعد عملية جمع البيانات وتبويبها على عدد أيام جمع البيانات ، تم اختبار البيانات الإحصائية ، ولتحديد التوزيع الملائم لعمليات وصول الزبائن لابد من اختبار ذلك ، إذ تم اختيار اختبار مربع كاي (χ^2 Test) الذي هو من أحد اختبارات حسن المطابقة ، ويتم الاختبار عن طريق البرنامج الإحصائي الجاهز (PASW STATISTICS 18) .

أن الفرضية الإحصائية للاختبار الخاص بتوزيع وصول الزبائن هي كالأتي :-

H_0 : توزيع وصول الزبائن يتبع التوزيع البواسوني.

H_1 : توزيع وصول الزبائن يتبع توزيعا أخر غير التوزيع البواسوني.

الجدول (5) الآتي يوضح نتائج اختبار مربع كاي (χ^2 Test) المحسوبة كالأتي:

جدول (5) نتائج اختبار مربع كاي (χ^2)

Test	Statistical test	Degree of freedom	Asymp. Sig.
Chi - Square	0.000	9	0.84

يتضح من نتائج التحليل الإحصائي إن قيمة Asymp. Sig. أكبر من مستوى المعنوية (0.05) ، لذلك فالقرار هو عدم رفض H_0 التي تنص على ان توزيع وصول الزبائن يتبع التوزيع البواسوني وبالمعلمة (λ= 41.47 زبون / ساعة) لقناتي الخدمة.

كذلك يتم اختبار وقت تقديم الخدمة ومعرفة التوزيع الإحصائي الخاص بوقت تقديم الخدمة عن طريق تطبيق اختبار مربع كاي (χ^2 Test) لحسن المطابقة ، وذلك عن طريق تطبيق البرنامج الإحصائي الجاهز(PASW STATISTICS 20) .
وذلك عن طريق الفرضية الآتية:

H_0 : توزيع تقديم الخدمة للزبائن يتبع التوزيع الآسي.

H_1 : توزيع تقديم الخدمة للزبائن يتبع توزيعا آخر غير التوزيع الآسي.

الجدول (6) الآتي يوضح نتائج مربع كاي (χ^2 Test) المحسوبة كالآتي:-

جدول (6) نتائج اختبار مربع كاي (χ^2)

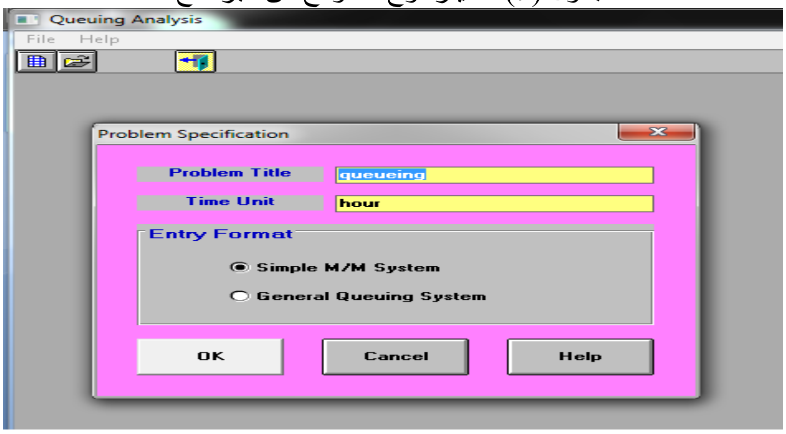
Test	Statistical test	Degree of freedom	Asymp. Sig.
Chi – Square	0.000	9	0.93

يتضح من نتائج التحليل الإحصائي إن قيمة Asymp .Sig. أكبر من مستوى المعنوية (0.05) ، إذ أن القرار ينص على عدم رفض H_0 التي تنص على أن توزيع وقت تقديم الخدمة للزبائن يتبع التوزيع الآسي .
ولهذا فان توزيع وقت الخدمة يتبع التوزيع الآسي بمعدل (0.04667 ساعة / لكل زبون في القناة الواحدة وبما يعادل (2.7996) دقيقة ، وبذلك فان عدد الزبائن الذين سيتم تقديم الخدمة لهم في القناة الواحدة سيكون ($\mu = \frac{1}{0.04667} = 21.427$ زبون/ساعة) ، أي ان معدل الخدمة العام للقناتين سيكون ($\mu = 2(21.427) = 42.854$ زبون/ساعة).
وبعد معرفة توزيع أوقات الوصول وأوقات الخدمة ، لابد من تحديد العناصر الأساسية لنماذج صفوف الانتظار وذلك لمعرفة قيم مقاييس الأداء لنظام صف الانتظار.

تحديد العناصر الأساسية لنماذج صفوف الانتظار

لوحظ عن طريق المتابعة اليومية وتسجيل المعلومات أن عدد قنوات الخدمة كانت اثنتين (c=2) وان معدل الوصول لقناتي الخدمة يساوي ($\lambda = 41.47$ زبون/ساعة) كما أن عدد الزبائن الذين تم تقديم الخدمة لهم في القناة الواحدة كانت (21.43 زبون / ساعة) وعدد الزبائن الذين تم تقديم الخدمة لهم في القناتين هو ($\mu = 42.85$ زبون/ ساعة) .
وباستعمال البرنامج الجاهز (Win QSB) الذي يعمل في بيئة (windows) وعلى الحاسبة الالكترونية لحل مشكلة الزخم الحاصل في المصرف يمكن احتساب جميع المؤشرات الإحصائية الخاصة بمقاييس أداء النظام، إذ يعمل هذا البرنامج على حل مشكلة صفوف الانتظار بعد معرفة قيمة كل من معدل الوصول ومعدل تقديم الخدمة ، ومن ثم يمكننا حساب المقاييس الأخرى التي تخص نماذج صفوف الانتظار في المصرف .
فمن البرنامج نختار كلمة (File) ومنها نختار كلمة (New Problem) فتفتح نافذة كالآتي:-

جدول (7) اختيار نوع النموذج من البرنامج



من النافذة الموضحة في الجدول (7) نختار كلمة (Simple M/M System) إذ إن وحدة الوقت هي بالساعات (hour) ، وان وقت الوصول يتبع توزيع بواسون بمعدل وصول ($\lambda = 41.47$ زبون/ساعة) ووقت الخدمة يتبع التوزيع الآسي إذأن معدل خدمة للقناة الواحدة ($\mu = 21.43$ زبون/ساعة) وان عدد مراكز الخدمة (2) ، فتفتح نافذة تحتوي على النتائج الآتية:-

جدول (8) مقاييس أداء النموذج (M/M/2)

04-23-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/2	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	41.4700
3	Service rate per server (mu) per hour =	21.4300
4	Overall system effective arrival rate per hour =	41.4700
5	Overall system effective service rate per hour =	41.4700
6	Overall system utilization =	96.7569 %
7	Average number of customers in the system (L) =	30.3263
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	28.3911
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	29.8345
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.7313 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.6846 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.7194 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	1.6483 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	95.1620 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

التعليق على نتائج مقاييس الأداء لقناتي الخدمة وتفسيرها كما في الجدول (8)

1. نسبة الاستخدام يساوي 96.7569 ، أي أن 96.76 % من الوقت يكون لموظفي الكاونتر في حالة عمل وهذا ما يعطي إشارة واضحة عن وجود زحام كبير للزبائن في المصرف ، أما احتمال أن يكون موظفي الخدمة بدون عمل (فارغة) فهو احتمال قليل جدا بنسبة 1.65 % من الوقت أي يصل إلى 0.017 تقريبا.
2. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في النظام (يشمل صف الانتظار + الزبون الذي في قناة الخدمة) يساوي 30.3263 زبوناً ، عن طريق هذه النتيجة نلاحظ أنه سوف يكون هناك اثنان من الزبائن عند كل محطة لتقديم الخدمة و (28) زبوناً في الصف في الوقت نفسه ، وهذا يدل على وجود صف انتظار ومن ثم يوجد زخم في النظام .
3. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في الصف يساوي 28.3911 زبون، أي أن هناك ما يقارب (28) زبوناً في صف الانتظار.
4. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في النظام يساوي 0.7313 ساعة إي (43.878 دقيقة) ، إذ إن هذه المدة طويلة جدا وذلك يعود إلى طول الوقت الذي يستغرقه الزبون بسبب قلة قنوات الخدمة وطول صف الانتظار.
5. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في الصف يساوي 0.6846 ساعة أي (41.076 دقيقه) ، إذ يعد هذا المقياس ذو أهمية كبيرة وعلى المصرف ، إذ أن 41 دقيقة تعد وقتاً طويلا جدا بالنسبة للزبون المنتظر في الصف .

إما في حالة وجود ثلاث قنوات خدمة($c=3$)فان معدل وصول الوحدات(زبون/ ساعه $\lambda = 41.47$)وان معدل وقت الخدمة (خدمة/ساعة $\mu = 21.43$)لقناة الخدمة الواحدة.بعد إدخال هذه القيم في البرنامج تفتح نافذة فيها مختلف مقاييس الأداء كالآتي :-

جدول (9) مقاييس أداء النموذج (M/M/3)

04-23-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/3	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	41.4700
3	Service rate per server (mu) per hour =	21.4300
4	Overall system effective arrival rate per hour =	41.4700
5	Overall system effective service rate per hour =	41.4700
6	Overall system utilization =	64.5046 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2.6883
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.7531
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	1.8173
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.0648 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.0182 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.0438 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	12.1801 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	41.4441 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

التعليق على نتائج مقاييس الأداء لثلاث قنوات خدمة وتفسيرها كما في الجدول (9)

1. نسبة الاستخدام يساوي 64.5046 ، أي أن 64.50 % من الوقت يكون لموظفي الكاونتر في حالة عمل وهذا ما يعطي إشارة واضحة عن وجود عدد مناسب من الزبائن في المصرف، واحتمال كون قناة الخدمة بدون عمل (فارغة) أي بنسبة 12.18 % أي يصل إلى 0.12 تقريبا.
2. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في النظام (يشمل صف الانتظار + مقدم الخدمة) يساوي 2.6883 زبون ، عن طريق هذه النتيجة نلاحظ بأنه سوف يكون هناك ثلاثة من الزبائن عند كل محطة لتقديم الخدمة ولا زبون في الصف في الوقت نفسه ، وهذا يدل على عدم وجود صف للانتظار.
3. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في الصف يساوي 0.7531 زبوناً ، أي يوجد هناك زبون واحد على الأكثر في صف الانتظار.
4. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في النظام يساوي 0.0648 ساعة أي (3.888 دقيقة) ، إذ إن هذه المدة تعد مناسبة وذلك يعود إلى طول الوقت الذي يستغرقه الزبون وهو في صف الانتظار.
5. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في الصف يساوي 0.0182 ساعة أي (1.092 دقيقه) ، إذ يعد هذا المقياس ذا أهمية كبيرة للمصرف والزبون ، إذ أن دقيقة واحدة يعد وقتاً قليلاً بالنسبة للزبون المنتظر في الصف .

إما في حالة وجود أربع قنوات خدمة(c=4)فان معدل وصول الوحدات(زبون/ ساعه $\lambda = 41.47$)وان معدل وقت الخدمة (خدمة/ساعة $\mu = 21.43$)لقناة الخدمة الواحدة. بعد إدخال هذه القيم في البرنامج تفتح نافذة فيها مختلف مقاييس الأداء كالآتي :-

جدول (10) مقاييس أداء النموذج (M/M/4)

04-23-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/4	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	41.4700
3	Service rate per server (mu) per hour =	21.4300
4	Overall system effective arrival rate per hour =	41.4700
5	Overall system effective service rate per hour =	41.4700
6	Overall system utilization =	48.3784 %
7	Average number of customers in the system (L) =	2.0836
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.1484
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0.9372
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.0502 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.0036 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.0226 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	13.9915 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	15.8369 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

التعليق على نتائج مقاييس الأداء لاربعة قنوات للخدمة وتفسيرها كما في الجدول (10)

1. نسبة الاستخدام تساوي 48.3784 ، أي أن % 48.38 من الوقت يكون لموظفي الكاونتر في حالة عمل ، وان احتمال ان تكون قناة الخدمة بدون عمل (فارغة) هي بنسبة % 13.99 أي يصل الى 0.14 تقريبا.
2. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في النظام (يشمل صف الانتظار + مقدم الخدمة) يساوي 2.0836 زبوناً ، عن طريق هذه النتيجة نلاحظ بعدم وجود أي صف للانتظار.
3. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في الصف يساوي 0.1484 زبوناً ، أي لا يوجد هناك زبون في صف الانتظار.
4. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في النظام يساوي 0.0502 ساعة اي (3.012 دقيقة) إذ أن هذه المدة تعد مناسبة وذلك يعود إلى طول الوقت الذي يستغرقه الزبون وهو في صف الانتظار.
5. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في الصف يساوي 0.0036 ساعة أي (0.216دقيقه) ، أي لا يوجد هناك أي وقت للانتظار .

إما في حالة وجود خمس قنوات خدمة (c=5) فان معدل وصول الوحدات (زبون/ ساعه $\lambda = 41.47$) وان معدل وقت الخدمة (خدمة/ساعة $\mu = 21.43$) لقناة الخدمة الواحدة . بعد إدخال هذه القيم في البرنامج تفتح نافذة فيها مختلف مقاييس الأداء كالآتي:-

جدول (11) مقاييس أداء النموذج (M/M/5)

04-23-2017	Performance Measure	Result
1	System: M/M/5	From Formula
2	Customer arrival rate (lambda) per hour =	41.4700
3	Service rate per server (mu) per hour =	21.4300
4	Overall system effective arrival rate per hour =	41.4700
5	Overall system effective service rate per hour =	41.4700
6	Overall system utilization =	38.7028 %
7	Average number of customers in the system (L) =	1.9686
8	Average number of customers in the queue (Lq) =	0.0334
9	Average number of customers in the queue for a busy system (Lb) =	0.6314
10	Average time customer spends in the system (W) =	0.0475 hours
11	Average time customer spends in the queue (Wq) =	0.0008 hours
12	Average time customer spends in the queue for a busy system (Wb) =	0.0152 hours
13	The probability that all servers are idle (Po) =	14.3503 %
14	The probability an arriving customer waits (Pw) or system is busy (Pb) =	5.2942 %
15	Average number of customers being balked per hour =	0
16	Total cost of busy server per hour =	$0
17	Total cost of idle server per hour =	$0
18	Total cost of customer waiting per hour =	$0
19	Total cost of customer being served per hour =	$0
20	Total cost of customer being balked per hour =	$0
21	Total queue space cost per hour =	$0
22	Total system cost per hour =	$0

التعليق على نتائج مقاييس الأداء لخمس قنوات للخدمة وتفسيرها كما في الجدول (11)

1. نسبة الاستخدام تساوي 38.7028 ، أي أن % 38.70 من الوقت يكون لموظفي الكاونتر في حالة عمل ، واحتمال أن تكون قنوات الخدمة بدون عمل (فارغة) هي بنسبة % 14.35 أي يصل إلى 0.14 تقريبا.
2. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في النظام (يشمل صف الانتظار + مقدم الخدمة) يساوي 1.9686 زبون ، عن طريق هذه النتيجة نلاحظ بعدم وجود أي صف للانتظار.
3. متوسط عدد الزبائن الطالبين للخدمة في الصف يساوي 0.0334 زبوناً ، أي لا يوجد زبون في صف الانتظار.
4. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في النظام يساوي 0.0475 ساعة اي (2.85 دقيقة) إذ إن هذه المدة تعد مناسبة وذلك يعود إلى طول الوقت الذي يستغرقه الزبون وهو في صف الانتظار
5. متوسط الوقت الذي يستغرقه كل زبون في الصف يساوي 0.0008 ساعة أي (0.048 دقيقه) ، أي لا يوجد هناك أي وقت للانتظار .

لكن زيادة قنوات الخدمة ليس بالأمر اليسير إذ أن زيادة أعداد قنوات الخدمة تترتب عليها تكاليف أضافية (رواتب ، أجور ، بنايات ، مكاتب ... الخ) لذلك لابد من الأخذ بنظر الاعتبار التكاليف الخاصة بقنوات الخدمة والتكاليف الخاصة بانتظار الزبائن وهذه التكاليف تسمى بالتكاليف المتغيرة إذ كلما ازدادت قنوات الخدمة زادت تكاليف تقديم الخدمة وانخفضت تكاليف انتظار الزبائن وكلما انخفض عدد قنوات الخدمة ازدادت تكاليف انتظار الزبائن وعند مناقشة هذا الموضوع مع موظفي المصرف لم احصل على كم هي هذه التكاليف (تكاليف الانتظار ، تكاليف القناة الخاصة بالخدمة الإضافية) فبعد مناقشة الموضوع قدرت إن تكاليف قناة الخدمة الواحدة هي (9 آلاف دينار) [التكاليف المتغيرة] وتكاليف الانتظار هي (10) آلاف دينار وبعد استعمال الحل ألتتابعي للوصول إلى العدد الأمثل من قنوات الخدمة بعد تقدير كل من كلفة القناة الواحدة وكلفة الانتظار حصلت الباحثة على النتائج الموضحة في الجدول(12) كالآتي:-

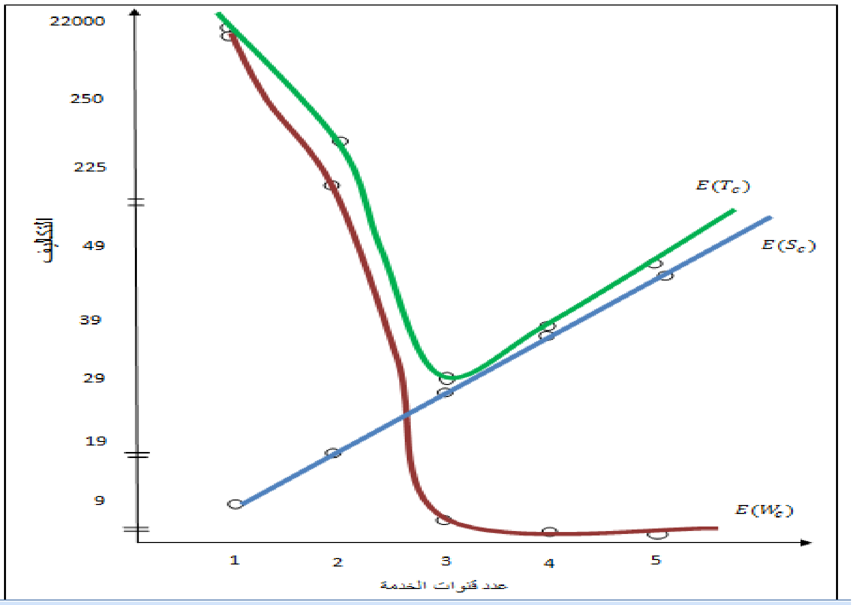
جدول (12) كلفة الخدمة وكلفة الانتظار والكلفة الكلية

$E(T_c) = E(S_c) + E(W_c)$	$E(W_c) = L_s * C_w * W_s$	$E(S_c) = S * C_s$	L_s	L_q	عدد قنوات الخدمة (S)
239.776	221.776	18	30.3263	28.3911	2
28.742	1.742	27	2.6883	0.7531	3
37.046	1.046	36	2.0836	0.1484	4
45.935	0.935	45	1.9686	0.0334	5

من الجدول المذكور آنفاً :-

1. في حالة ازدياد عدد قنوات الخدمة إلى اثنتين (c=2) نلاحظ أن التكاليف الإجمالية قد انخفضت .
2. في حالة ازدياد عدد قنوات الخدمة إلى ثلاث قنوات بدلا من قناتين للخدمة فان التكاليف الإجمالية هي الأخرى تنخفض وتصل إلى أدنى نقطه لها.
3. عند زيادة عدد قنوات الخدمة إلى أربع ، خمس قنوات نلاحظ بان التكاليف الإجمالية المتغيرة بدأت ترتفع وهذا يعني أن أفضل عدد لقنوات الخدمة هو أن يكون في المصرف ثلاث قنوات أفضل من قناتين للخدمة.

والشكل رقم (6) يبين التكاليف المتزايدة (تكاليف عدد قنوات الخدمة) والتكاليف المتناقصة (تكاليف انتظار الزبائن) والتكاليف الإجمالية Total Cost .



الشكل (6) يمثل التكاليف الإجمالية وتكاليف عدد قنوات الخدمة وتكاليف الانتظار

الاستنتاجات والتوصيات

بعد دراسة وتحليل صفوف الانتظار وما تم الحصول عليه من الجانب العملي يمكن تثبيت الاستنتاجات والتوصيات .

أولا: الاستنتاجات

1. توصلت الدراسة إلى أن أفضل عدد لقنوات الخدمة هي ثلاث قنوات بدلا من اثنتين ما يؤدي إلى صغر حجم صف الانتظار وعدم ضياع وقت الزبائن.
2. التكاليف الإجمالية المتغيرة تكون في حدها الأدنى عندما يكون عدد قنوات الخدمة ثلاث قنوات .

ثانيا: التوصيات

بناءً على الاستنتاجات التي توصلت لها الباحثة فيمكن وضع التوصيات الآتية:-

1. ضرورة استعمال ثلاث قنوات للخدمة بدلا من قناتين وذلك لتيسير معاملات الزبائن من جهة وانخفاض التكاليف الإجمالية إلى حدها الأدنى.
2. يفضل استعمال شاشة عرض أو تلفزيون يعرض فيه رقم البطاقة أو رقم قناة الخدمة التي تكون فارغة أو غير فارغة ، عاطلة أو عاملة ، وهكذا لتعد أداة إرشادية للزبون.
3. ضرورة الإفادة من التطورات التكنولوجية ، وذلك عن طريق استعمال بطاقات الدفع الالكتروني وإدخال الصراف الآلي لتخفيف الضغط على قناة تقديم الخدمة.
4. في حالة ازدياد عدد الزبائن في المصرف فينبغي أما تقسيمهم حسب الحروف الهجائية أو حسب مناطق السكن ليتسنى تقليل صفوف الانتظار وتقديم خدمة جيدة وسريعة.

المصادر

[1] Taha , Hamdy ," **Operation Research An Introduction** " ,Publisher Pearson Education , Inc , 2007 .

[2] أحمد ، عمار شهاب ، " تطبيقات لنظرية صفوف الانتظار في المستشفى التعليمي لكلية طب الأسنان " ، رسالة ماجستير ، علوم في بحوث العمليات، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعه بغداد ، 2007.

[3] Murthy , Rama , " Operation Reseach " second edition , Published by New Age International (p)Ltd , 2007.

[4] الشمرتي ، حامد سعد نور ، " بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا" الطبعة الأولى ، مكتبه الذاكرة ، 2010.

[5] الطائي ، حسين حامد ، " بناء نموذج صفوف الانتظار باستخدام المقدرات الحصينة لقسم الباطنية / مستشفى بغداد التعليمي " ، رسالة ماجستير ، علوم بحوث العمليات ، كلية الإدارة والاقتصاد ، جامعة بغداد ، 2016 .

[6] Adan , Ivo and Resing , Jacques , " Queuing System " Eindhoven University of Technology , March,26,2015.

[7] Sztrik , Janos," Queueing Theory And It's Applications Apersonal View ", proceedings of the 8th International conference on Applied Informatics Eger , Hunguary, VOL.1.PP.9-30. University of Debrecen , 2010.

[8] Frederick , Hillier and Gerald ,Lieberman, " Introduction to Opeation Research " , Publisger McGraw. Hill , 2010 .

[9] Hogg, Robert and Crig , Aiien , Fourth edition " Introduction to Mathematical statistics " , Publisher Mac Millan , Inc , 1978.

[10] Narayan , Bhat , U. , " An Introduction to Queueing Theory Modeling And Analysis in A pplications " Publisher Birkhauser Boston , 2008 .

[11] Daigle, John N , " Queueing theory with Applications to packet Telecommunication " Publisher Springer Science + Busieness Media , Inc , 2005 .

[12] Leonard , Kleinrock ," Queueing System Volume J:Theory " Publisher by John Wiley &Sons, Inc , 1975 .

[13] Kumar Gupta , Prem ," Operations Research " Published by S.Chand &Company Ltd , 2009 .

[14] Bloch, Gunter , Greiner , Stefan ; demeer , Hermann ; and trivedi , Kishors . " Queueing Network and Markov Chains " second edition Publisher by John Wiley &Sons , Inc. ,2006.

[15] Wang , Jin Y , " Operation Research ∏ " Ch 17-24 College of Managament, NCTU , 2009.

[16] Doane , David P. and Seward , Lori E." Applied statistics in Business and Economics " fourth edition , Publisher The Mc Graw –Hill companies , Inc , 2004.

[17] Navidi ,William , " Principles of statistics for Engineers and Scientists " , Publisher McGraw-Hill Companies ,Inc , 2010.

الملحق

استمارة جمع بيانات أوقات الوصول البيني
وأوقات الخدمة للزبائن الواصلين إلى مركز تقديم الخدمة

عدد الزبائن	وقت الوصول	بدء الخدمة	انتهاء الخدمة	وقت الخدمة	عدد الزبائن	وقت الوصول	بدء الخدمة	انتهاء الخدمة	وقت الخدمة
1					37				
2					38				
3					39				
4					40				
5					41				
6					42				
7					43				
8					44				
9					45				
10					46				
11					47				
12					48				
13					49				
14					50				
15					51				
16					52				
17					53				
18					54				
19					55				
20					56				
21					57				
22					58				
23					59				
24					60				
25					61				