Study Conditions of Center of Gravity for Trivial Solution to Semi Linear Differantial Equation of Third Order in The One Critical Cases

Thair Younis Thanoon — *thairthanoon@uomosul.edu.iq*
Zena Talal Yaseen — *zena-talal@uomosul.edu.iq*
College of Computer Sciences and Mathematics
University of Mosul, Mosul, Iraq

Received on: 14/02/2011 **Accepted on: 16/05/2011**

ABSTRACT

In this paper we study the conditions under which the zero solution is center of Gravity in the semi-liner case for certain third order differential equation of the form:
$Y''' + P_1(t)Y'' + P_2(t)Y' + P_3(t)Y = h(t, \bar{Y}) + g(t)$,
We have:
$P_i = \psi^i[q_i + w_i(t)], \quad q_i \in C, \quad w_i(t): \Delta \longrightarrow C, \quad w_i(t) = 0(1), \quad i = 1,2,3$
$t \in \Delta = [a, \infty), \quad a \in N, \quad g: \Delta \longrightarrow R \quad, \bar{Y} = (Y, Y', Y'')$
The characteristic equation of the above differential equation has complex roots of the form :

$$M_1 = -M_2 = iM_0, \quad M_0 > 0 ,$$

and the other root has the following property $Re\ M_3 < 0$.

Keywords: Stability theory ,Critical cases , Center of gravity

دراسة شروط مركز جاذبية الحل الصفري لمعادلة تفاضلية شبه خطية من المرتبة الثالثة في أحدى الحالات الحرجة

ثائر يونس ذنون **زينة طلال ياسين**
كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل

تاريخ استلام البحث: 2011/02/14 **تاريخ قبول البحث: 2011/05/16**

الملخص

في هذا البحث سندرس شروط مركز جاذبية الحل الصفري في الحالة شبه الخطية لمعادلة تفاضلية من المرتبة الثالثة بالشكل:

$$Y''' + P_1(t)Y'' + P_2(t)Y' + P_3(t)Y = h(t, \bar{Y}) + g(t) ,$$

حيث أن:

$$P_i = \psi^i[q_i + w_i(t)], \quad q_i \in C, \quad w_i(t): \Delta \longrightarrow C, \quad w_i(t) = 0(1), \quad i = 1,2,3$$
$$t \in \Delta = [a, \infty), \quad a \in \boldsymbol{N}, \quad g: \Delta \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad, \bar{Y} = (Y, Y', Y'')$$

إن المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية أعلاه لها زوج من الجذور المعقدة بالشكل:

$$M_1 = -M_2 = iM_0, \quad M_0 > 0$$

والجذر الأخر يحقق الخاصية $Re\ M_3 < 0$.

الكلمات المفتاحية : نظرية الاستقرار , الحالات الحرجة , مركز الجاذبية

1- المقدمة

الاستقرار مفهوم ذو أهمية متزايدة في العلوم الحديثة فهو يستخدم في الكثير من التطبيقات العلمية والتكنولوجية والطبية والعسكرية وعلم الفلك وعلوم أخرى كثيرة.

وقد اقترح مفهوم الاستقرار أولاً في الميكانيك والفيزياء أثناء دراسة توازن الأجسام الواقعة تحت تأثير خارجي، فقد عرف بان الأجسام التي تمثلها مجموعة (منظومة) من المعادلات الرياضية تكون بوضع مستقر (اتزان) إذا بقيت المجموعة الواقعة في اللحظة الابتدائية في هذا الوضع بسرعات مساوية للصفر طول الوقت في هذا الوضع، فقد عرف ديرتشيللي Dirichlet عام 1644م بان وضع مجموعة الأجسام الواقعة تحت تأثير قوة الجاذبية يكون مستقراً إذا شغل مركز ثقل مجموعة الأجسام هذه أسفل وضع ممكن. [2]

هنالك الكثير من الطرق الرياضية المستخدمة لدراسة استقرارية المعادلات التفاضلية مثل طريقة التقريب الخطي وطريقة دالة لوبونوف إلا انه ظهرت حالات خاصة سميت بالحالات الحرجة وهي الحالات التي لا يمكن دراسة استقراريتها بالتقريب الخطي والتي يكون فيها على الأقل جذر واحد من جذور المعادلة المميزة يملك جزءاً حقيقياً مساوياً للصفر. وهناك الكثير من هذه الحالات مثلاً عندما تملك المعادلة المميزة جذر جزءه الحقيقي مساوياً للصفر وباقي الجذور تملك جزء حقيقي سالب أو عندما يكون للمعادلة المميزة زوج أو ثلاثة جذور معقدة جزءها الحقيقي مساوياً للصفر وباقي الجذور تملك جزء حقيقي سالب [3] ,[8] وعلى سبيل المثال نذكر الدراسات التالية :

ففي [10] تم دراسة شروط استقرارية الحل الصفري لمعادلة تفاضلية من الرتبة-n في الحالة شبه الخطية والتي تمتلك الشكل :

$$Y^{(n)} + P_1(t)Y^{(n-1)} + \cdots + P_n(t)Y = \varphi\left[t, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}\right] \qquad \ldots(1)$$

في إحدى الحالات الحرجة عندما المعادلة المميزة لها تملك جذراً بالشكل :

$$M_1 = iM_0 \quad \text{عندما} \quad M_0 > 0\,,\ \ t \longrightarrow \infty$$

وباقي جذور المعادلة تحقق الخاصية

$$Re\, M_K < -E \ , \qquad E > 0 \ , \qquad K = 2,3, \ldots, n$$

أما في [11] فقد تم إيجاد الشروط التي يكون فيها الحل الصفري مركزاً للجاذبية والشروط التي لا يكون فيها مركزاً للجاذبية لمعادلة تفاضلية من المرتبة النونية ذات معاملات متغيرة ببطئ في الحالة شبه الخطية وتملك الشكل :

$$X^{(n)} + P_1(\sigma t)X^{(n-1)} + \cdots + P_n(\sigma t)X = h\left(\sigma t, X, X', X'', \ldots, X^{(n-1)}\right) + g(\sigma t)$$

في إحدى الحالات الحرجة عندما المعادلة المميزة لها تملك جذراً بالشكل : $\lambda_1 = i\lambda_0$

وباقي جذور المعادلة تحقق الخاصية :

$$Re\, \lambda_K < -M \ , \qquad M > 0 \ , \qquad K = 2,3, \ldots, n$$

أما في [9] فقد تم دراسة شروط وجود منحني جاذبية الحل لمعادلة تفاضلية غير ذاتية وشبه خطية من الرتبة الثانية عندما تحتوي معاملاتها والحد المطلق فيها على σ وتملك الشكل :

$$Y'' + \lambda(\sigma t)Y = g(\sigma t) + F(\sigma t, Y, Y'), \qquad 0 < \sigma < 1$$

إن مفهوم مركز الجاذبية center of gravity غالباً ما يستخدم في الفيزياء عندما تنجذب الحركة بتأثير قوة تسمى بالقوة المركزية عند نقطة ثابتة تسمى مركز الجاذبية [6] وقد استخدم مفهوم مركز الجاذبية في الرياضيات كتعميم لمفهوم استقرارية الحل الصفري عندما يكون للجاذبية تأثير على استقرارية الحل لمنظومة المعادلات حيث ستنجذب جميع الحلول للمعادلات التفاضلية نحو المحور $Y = 0$ في الاستقرار والاستقرار المحاذي.

2- تعاريف

تعريف (1) [1]

يسمى الحل الصفري $X_i \equiv 0$ للمعادلة التفاضلية (1) مركزاً للجاذبية إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$ بحيث أن $|X_i(t_0)| < \delta$ يؤدي إلى أن $|X_i(t)| < \varepsilon$ لكل $t \geq t_0$ ، $i = 1, \dots, n$.

تعريف (2) [1]

إذا تحقق التعريف (1) وكان $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0(1)$ فان الحل الصفري للمعادلة التفاضلية (1) عندها يسمى مركز جاذبية محاذي

3- تحويلات مساعدة

لكي يتم إيجاد شروط مركز جاذبية الحل الصفري للمعادلة التفاضلية (1) سوف نستخدم المأخوذات التالية :

مأخوذة (1) [4]

إن التحويل

$$\left.\begin{aligned} y &= \psi X_1 \\ y' &= \psi^2 X_2 \\ y'' &= \psi^3 X_3 \end{aligned}\right\} \qquad \dots(2)$$

وبدوره سيحول المعادلة التفاضلية (1) إلى نظام من المعادلات التفاضلية وكما يلي :

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= -\psi^{-1}\psi' X_1 + \psi X_2 \\ X_2' &= -2\psi^{-1}\psi' X_2 + \psi X_3 \\ X_3' &= -P_3(t)\psi^{-2} X_1 - P_2(t)\psi^{-1} X_2 - (P_1(t) + 3\psi^{-1}\psi')X_3 + F_1(t,X) + \psi^{-3} g(t) \end{aligned}\right\} \qquad \dots(3)$$

حيث أن

$$|F_1(t,X)| \leq L(X_1 + \psi X_2 + \psi^2 X_3)^{1+\beta} \qquad , L = L^* \psi^{\beta-2}$$

مأخوذة (2) [4]

التحويل

$$M = -CX \qquad \dots(4)$$

حيث أن

$$C = \begin{bmatrix} (i\mu_\circ)^2 + q_1(i\mu_\circ) + q_2 & i\mu_\circ + q_1 & 1 \\ (-i\mu_\circ)^2 + q_1(i\mu_\circ) + q_2 & -i\mu_\circ + q_1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

سيحول النظام التفاضلي (3) إلى النظام بالشكل

$$\left.\begin{aligned}
M_1' &= \psi[i\mu_\circ M_1 - a_1 M_3] + F_2 + \psi^{-3} g(t) \\
M_2' &= \psi[q_1 M_1 + (-i\mu_\circ - q_1) M_2 + a_2 M_3] + F_2 + \psi^{-3} g(t) \\
M_3' &= \psi[\frac{1}{2i\mu_\circ} M_1 - \frac{1}{2i\mu_\circ} M_2]
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(5)$$

إذ أن

$$a_1 = q_3 + (i\mu_\circ)^3 + (i\mu_\circ) q_2 + (i\mu_\circ)^2 q_1$$

$$a_2 = -q_3 + (i\mu_\circ)^3 + (i\mu_\circ) q_2 + (i\mu_\circ)^2 q_1$$

$$|F_2| \le L[\frac{1}{-2i\mu_\circ}[(-\psi + \psi^2(-i\mu_\circ + q_1))M_1 + (\psi - \psi^2(i\mu_\circ + q_1))M_2 + $$
$$+ (-2i\mu_\circ - \psi^2(-2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2(i\mu_\circ)^3 - 2i\mu_\circ q_2))M_3]]^{1+\beta}$$

مأخوذة (3) [4]

باستخدام التحويل التالي

$$\left.\begin{aligned}
M_1 &= y_1 \\
M_2 &= y_2 \\
M_3 &= k y_1 + \bar{k} y_2 + y_3 \quad , \quad k, \bar{k} \in C
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(6)$$

وباستخدام النظام (5) ممكن كتابة النظام السابق كالآتي:

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= \psi(d_2 y_1 - a_1 \bar{k} y_2 + -a_1 y_3) + F_3 + \psi^{-3} g(t) \\
y_2' &= \psi(d_1 y_1 - d_3 y_2 + a_2 y_3) + F_3 + \psi^{-3} g(t) \\
y_3' &= \psi[(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) y_1 + (-\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5) y_2 + d_6 y_3] - F_3(k + \bar{k}) - \psi^{-3} g(k + \bar{k})
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(7)$$

$$d_1 = q_1 + a_2 k \qquad , d_4 = -k d_2 - \bar{k} d_1$$

$$d_2 = i\mu_\circ - a_1 k \qquad , d_5 = a_1 k \bar{k} + \bar{k} d_3$$

$$d_3 = i\mu_\circ + q_1 - a_2 \bar{k} \qquad , d_6 = k a_1 - \bar{k} a_2$$

$$|F_3| \le L[\frac{-\psi + \psi^2(-i\mu_\circ + q_1) + k(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^2 q_1 - 2(i\mu_\circ)^3 - 2i\mu_\circ q_2))}{-2i\mu_\circ} y_1 +$$
$$+ \frac{\psi - \psi^2(i\mu_\circ + q_1) + \bar{k}(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^2 q_1 - 2(i\mu_\circ)^3 - 2i\mu_\circ q_2))}{-2i\mu_\circ} y_2 +$$
$$+ \frac{-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^2 q_1 - 2(i\mu_\circ)^3 - 2i\mu_\circ q_2)}{-2i\mu_\circ} y_3]^{1+\beta}$$

مأخوذة (4) [4]

من التحويل

$$\left.\begin{aligned}
y_1 &= z_1 + b z_2 + b_3 z_3 \\
y_2 &= b z_1 + z_2 + b_3 z_3 \\
y_3 &= -z_3
\end{aligned}\right\} \qquad \ldots(8)$$

نحصل على النظام التالي :

$$z_1' = \frac{\psi}{1-b^2}\{[d_2 + b(-d_1 - a_1\bar{k} + bd_3) - b_3(b-1)[(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) + b(\frac{-1}{2i\mu_\circ} + d_5)]]z_1 +$$
$$+[b(d_2 - bd_1 + d_3) - a_1\bar{k} - b_3(b-1)(b(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) - \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5)]z_2 +$$
$$+[b_3(d_2 + b(d_3 - d_1) + b_3(b-1)(d_4 + d_5) - a_1\bar{k}) + a_1 + ba_2 + b_3(b-1)d_6]z_3\} +$$
$$+\frac{F_4}{1-b^2}(1 - b + b_3(b-1)(k+\bar{k})) + \frac{\psi^{-3}}{1-b^2}(1 - b + b_3(b-1)(k+\bar{k}))$$

$$z_2' = \frac{\psi}{1-b^2}\{[d_1 + b(-d_2 + ba_1\bar{k} - d_3) - b_3(b-1)(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4 + b(\frac{-1}{2i\mu_\circ} + d_5))]z_1$$
$$+[b(-bd_2 + d_1 + a_1\bar{k}) - d_3 - b_3(b-1)(b(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) - \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5)]z_2$$
$$+[b_3(d_1 - b(d_2 - a_1\bar{k}) - d_3 - b_3(b-1)(d_4 + d_5)) - ba_1 - a_2 + b_3(b-1)d_6]z_3\}$$
$$+\frac{F_4}{1-b^2}(1 - b + b_3(b-1)(k+\bar{k})) + \frac{\psi^{-3}g}{1-b^2}(1 - b + b_3(b-1)(k+\bar{k}))$$

$$z_3' = -\psi\{[\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4 + b(-\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5)]z_1 +$$
$$+[b(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) - \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5]z_2 +$$
$$+b_3(d_4 + d_5) - d_6]z_3\} + F_4(k+\bar{k}) + \psi^{-3}g(k+\bar{k})$$

$$|F_4| \le L\{\frac{1}{-2i\mu_\circ}[-\psi + \psi^2(-i\mu_\circ + q_1) + k(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^3 - 2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2i\mu_\circ q_2)) +$$
$$+b(\psi - \psi^2(i\mu_\circ + q_1) + \bar{k}(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^3 - 2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2i\mu_\circ q_2)))]z_1 +$$
$$+\frac{1}{-2i\mu_\circ}[b(-\psi + \psi^2(-i\mu_\circ + q_1) + k(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^3 - 2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2i\mu_\circ q_2))) +$$
$$+(\psi - \psi^2(i\mu_\circ + q_1) + \bar{k}(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^3 - 2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2i\mu_\circ q_2))]z_2 +$$
$$+\frac{1}{-2i\mu_\circ}[b_3(-2i\mu_\circ\psi^2 + (k+\bar{k})(-2i\mu_\circ - \psi^2(-2(i\mu_\circ)^3 - 2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2i\mu_\circ q_2))) +$$
$$+2i\mu_\circ + \psi^2(-2(i\mu_\circ)^3 - 2q_1(i\mu_\circ)^2 - 2i\mu_\circ q_2)]z_3\}^{1+\beta}$$

مأخوذة (5) [4]

التحويل

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= w_1 e^{i\theta} \\ z_2 &= w_2 e^{-i\theta} \\ z_3 &= -w_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots(10)$$

حيث أن $\theta \in [0, 2\pi]$

يحول النظام (9) إلى النظام التفاضلي التالي:

$$\left.\begin{aligned}
w_1' &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \lambda_3 w_3 + F_5 \frac{e^{-i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k})) + \\
&\quad + \psi^{-3} g \frac{e^{-i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k})) \\
w_2' &= \lambda_1^* w_1 + \lambda_2^* w_2 + \lambda_3^* w_3 + \frac{e^{i\theta}F_5}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k})) + \\
&\quad + \frac{e^{i\theta}\psi^{-3} g}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k})) \\
w_3' &= \lambda_1^{**} w_1 + \lambda_2^{**} w_2 + \lambda_3^{**} w_3 - F_5(k+\bar{k}) - \psi^{-3} g(k+\bar{k})
\end{aligned}\right\} \quad \ldots(11)$$

إذ أن

$$A_1 = d_2 + b(-d_1 - a_1\bar{k} + bd_3) - b_3(b-1)[(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) + b(\frac{-1}{2i\mu_\circ} + d_5)]$$

$$A_2 = b(d_2 - bd_1 + d_3) - a_1\bar{k} - b_3(b-1)(b(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) - \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5)$$

$$A_3 = b_3(d_2 + b(d_3 - d_1) - b_3(b-1)(d_4 + d_5) - a_1\bar{k}) + a_1 + ba_2 + b_3(b-1)d_6$$

$$\lambda_1 = \frac{\psi}{1-b^2} A_1 \quad , \quad \lambda_2 = \frac{\psi\, e^{-2i\theta}}{1-b^2} A_2 \quad , \quad \lambda_3 = \frac{-e^{-i\theta}\psi}{1-b^2} A_3$$

$$B_1 = d_1 + b(-d_2 + ba_1\bar{k} - d_3) - b_3(b-1)(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4 + b(\frac{-1}{2i\mu_\circ} + d_5))$$

$$B_2 = b(-bd_2 + d_1 - a_1\bar{k}) - d_3 - b_3(b-1)(b(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) - \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5)$$

$$B_3 = b_3(d_1 - b(d_2 - a_1\bar{k}) - d_3 - b_3(b-1)(d_4 + d_5)) - ba_1 - a_2 + b_3(b-1)d_6$$

$$\lambda_1^* = \frac{\psi}{1-b^2}(B_1 e^{2i\theta}), \quad \lambda_2^* = \frac{\psi}{1-b^2} B_2, \quad \lambda_3^* = \frac{-\psi}{1-b^2} e^{i\theta} B_3$$

$$C_1 = \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4 + b(-\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5)$$

$$C_2 = b(\frac{1}{2i\mu_\circ} + d_4) - \frac{1}{2i\mu_\circ} + d_5$$

$$C_3 = b_3(d_4 + d_5) - d_6$$

$$\lambda_1^{**} = \psi(C_1 e^{i\theta}), \quad \lambda_2^{**} = \psi\,(C_2\, e^{-i\theta}), \quad \lambda_3^{**} = -\psi\, C_3$$

$$|F_5| \le L\{\frac{1}{-2i\mu_\circ}[-\psi+\psi^2(-i\mu_\circ+q_1)+k(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2))+$$
$$+b(\psi-\psi^2(i\mu_\circ+q_1)+\bar{k}(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2))]w_1e^{i\theta}+$$
$$+\frac{1}{-2i\mu_\circ}[b(-\psi+\psi^2(-i\mu_\circ+q_1)+k(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2)))+$$
$$+(\psi-\psi^2(i\mu_\circ+q_1)+\bar{k}(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2))]w_2e^{-i\theta}+$$
$$+\frac{1}{-2i\mu_\circ}[b_3(-2i\mu_\circ\psi^2+(k+\bar{k})(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2)))+$$
$$+2i\mu_\circ+\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2)](-w_3)\}^{1+\beta}$$

مأخوذة (6) [7]

لكي نقل قيمة الدالة $\psi^{-3}g$ نستخدم التحويل الأتي :

$$w_s=(\psi^{-3}g(t))^{\delta}H_s\,,\ s=1,2,3,\ \text{و}\ 0<\delta<1 \qquad \dots(12)$$

وباستخدام النظام (11) والنظام (12) يمكننا الحصول على النظام الأتي :

$$\left.\begin{aligned}
H_1' &= [\lambda_1-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_1+\lambda_2H_2+\lambda_3H_3+\\
&\quad+(\psi^{-3}g)^{-\delta}F_6\frac{e^{-i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))+\\
&\quad+(\psi^{-3}g)^{1-\delta}\frac{e^{-i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))\\
H_2' &= \lambda_1^*H_1+[\lambda_2^*-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_2+\lambda_3^*H_3+\\
&\quad+(\psi^{-3}g)^{-\delta}F_6\frac{e^{i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))+\\
&\quad+(\psi^{-3}g)^{1-\delta}\frac{e^{i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))\\
H_3' &= \lambda_1^{**}H_1+\lambda_2^{**}H_2+[\lambda_3^{**}-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_3\\
&\quad-(\psi^{-3}g)^{-\delta}F_6(k+\bar{k})-(\psi^{-3}g)^{1-\delta}(k+\bar{k})
\end{aligned}\right\} \qquad \dots(13)$$

إذ أن

$$|F_6| \le L\{\frac{1}{-2i\mu_\circ}[-\psi+\psi^2(-i\mu_\circ+q_1)+k(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-$$
$$-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2))+b(\psi-\psi^2(i\mu_\circ+q_1)+$$
$$+\bar{k}(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2))](\psi^{-3}g)^{\delta}H_1e^{i\theta}+$$
$$+\frac{1}{-2i\mu_\circ}[b(-\psi+\psi^2(-i\mu_\circ+q_1)+k(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-$$
$$-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2)))+(\psi-\psi^2(i\mu_\circ+q_1)+$$
$$+\bar{k}(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2))](\psi^{-3}g)^{\delta}H_2e^{-i\theta}+$$
$$+\frac{1}{-2i\mu_\circ}[b_3(-2i\mu_\circ\psi^2+(k+\bar{k})(-2i\mu_\circ-\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-$$

$$-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2)))+2i\mu_\circ+$$
$$+\psi^2(-2(i\mu_\circ)^3-2q_1(i\mu_\circ)^2-2i\mu_\circ q_2)][-(\psi^{-3}g)^\delta H_3)\}^{1+\beta}$$

3- النظام المساعد

نلاحظ انه من الصعب تطبيق مبدأ الاستقرار وإيجاد شروط مركز الجاذبية من النظام السابق فنلجأ إلى تكوين نظام مساعد من هذا النظام الأخير وكما يأتي

نكتب النظام المساعد للنظام (13) وسنطبق على هذا النظام شروط مركز الجاذبية والذي سيملك الشكل الآتي :

$$\left.\begin{aligned}
H_1'&=[\lambda_1-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_1+\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3+D_1+D_2\\
H_2'&=\lambda_1^*\xi_1+[\lambda_2^*-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_2+\lambda_3^*\xi_3+D_1^*+D_2^*\\
H_3'&=\lambda_1^{**}\xi_1+\lambda_2^{**}\xi_2+[\lambda_3^{**}-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_3+D_1^{**}+D_2^{**}
\end{aligned}\right\}\qquad\ldots(14)$$

حيث أن $s=1,2,3$, $\xi_s=\xi_s(t)$ دالة اختيارية بالنسبة لـ t ومستمرة عندما $t\geq T$ وان

$$D_1=(\psi^{-3}g)^{-\delta}F_7\frac{e^{-i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))$$
$$D_2=(\psi^{-3}g)^{1-\delta}\frac{e^{-i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))$$
$$D_1^*=(\psi^{-3}g)^{-\delta}F_7\frac{e^{i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))$$
$$D_2^*=(\psi^{-3}g)^{1-\delta}\frac{e^{i\theta}}{1-b^2}(1-b+b_3(b-1)(k+\bar{k}))$$
$$D_1^{**}=-(\psi^{-3}g)^{-\delta}F_7(k+\bar{k})$$
$$D_2^{**}=-(\psi^{-3}g)^{1-\delta}(k+\bar{k})$$

حيث أن F_7 هي نفسها F_6 بالتعويض عن كل H بـ ξ

وبتطبيق مبدأ الاستقرار لبيرون على النظام (14) نحصل على :

$$|H_1|\leq e^{\int_T^t \operatorname{Re}[\lambda_1-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt}[|c|+\int_T^t(\lambda_2\xi_2+\lambda_3\xi_3+D_1+$$
$$+D_2)e^{-\int_T^t \operatorname{Re}[\lambda_1-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt}dt]$$

$$|H_2|\leq e^{\int_T^t \operatorname{Re}[\lambda_2^*-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt}[|c|+\int_T^t(\lambda_1^*\xi_1+\lambda_3^*\xi_3+D_1^*+$$
$$+D_2^*)e^{-\int_T^t \operatorname{Re}[\lambda_2^*-\delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt}dt]$$

$$|H_3| \le e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_3^{**} - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} [|c| + \int_T^t (\lambda_1^{**}\xi_1 + \lambda_2^{**}\xi_2 + D_1^{**} + D_2^{**}) e^{-\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_3^{**} - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} dt]$$

4- النتائج الأساسية

مبرهنة : في المعادلة (1) إذا كان

$$p_i:\Delta = [a,\infty] \to c \quad , \qquad h:\Delta \times C^n \to c \qquad -1$$

$$|h(t,y,y',y'')| \le L^*[|y| + |y'| + |y''|]^{1+\beta}$$

$$L^*:\Delta \to [0,\infty] \ ,\beta \ge 0 \ ,g:\Delta \to R$$

$$\lim_{t\to\infty} \Psi^{-2}\Psi' = 0(1), \lim_{t\to\infty} W_i(t) = 0(1) \qquad -2$$

وإذا كان

A- $\int_T^t Re\lambda dt \to \infty \quad as \quad t \to \infty$

B- $\int_T^t \mathrm{Re}\lambda \mathrm{dt} \int_T^t \lambda e^{-\int_T^t \mathrm{Re}\lambda \mathrm{dt}} \mathrm{dt} = 0(1), t \to \infty$

فان هذا يؤدي إلى أن الحل الصفري للمعادلة (1) مركزاً للجاذبية

وإذا كان

C- $\int_T^t Re\lambda \mathrm{dt} \to \infty \quad \mathrm{as} \quad t \to \infty$

فان هذا يؤدي إلى أن الحل الصفري للمعادلة (1) لا تمثل مركزاً للجاذبية

البرهان :-

بتطبيق التحويلات (2) ، (4) ، (8) ، (10) ، (12) على المعادلة (1) نحصل على النظام المساعد

$$H_1' = [\lambda_1 - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_1 + \lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3 + D_1 + D_2$$

$$H_2' = \lambda_1^*\xi_1 + [\lambda_2^* - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_2 + \lambda_3^*\xi_3 + D_1^* + D_2^* \qquad \ldots(15)$$

$$H_3' = \lambda_1^{**}\xi_1 + \lambda_2^{**}\xi_2 + [\lambda_3^{**} - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']H_3 + D_1^{**} + D_2^{**}$$

حيث أن $\xi = \xi(t)$ هي دالة اختيارية ومستمرة لكل $t \ge T$, إن النظام المساعد (15) يحل باستخدام طريقة تغيير الثوابت [5]

$$|H_1| \le e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_1 - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} [|c| + \int_T^t (\lambda_2\xi_2 + \lambda_3\xi_3 + D_1 + D_2) e^{-\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_1 - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} dt]$$

$$\left|H_2\right| \le e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_2^* - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt}[|c| + \int_T^t (\lambda_1^*\xi_1 + \lambda_3^*\xi_3 + D_1^* + + D_2^*)e^{-\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_2^* - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} dt]$$

$$\left|H_3\right| \le e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_3^{**} - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt}[|c| + \int_T^t (\lambda_1^{**}\xi_1 + \lambda_2^{**}\xi_2 + D_1^{**} + + D_2^{**})e^{-\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_3^{**} - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} dt]$$

الآن من الواضح انه إذا كان :

1) $e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_1 - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} = 0$

2) $e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_2^* - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} = 0$

3) $e^{\int_T^t \mathrm{Re}[\lambda_3^{**} - \delta(\psi^{-3}g)^{-1}(\psi^{-3}g)']dt} = 0$

فان الحل الصفري للمعادلة (1) مركز جاذبية

ملاحظة:

نظرا لصعوبة الحسابات الرياضية في هذه الحالة الحرجة فقد تم التعامل في هذا البحث مع معادلة تفاضلية من الرتبة الثالثة. يمكن تعميم النتائج إلى معادلة تفاضلية من المرتبة النونية باستخدام الحاسوب.

المصادر

[1] Cesari L., "Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equation", 1963.

[2] Gantermager V.R., "Lectures in the analysis mechanics", Nauka Publications, Moscow, 1971.

[3] kostin A.V., I.E. Vitricenko, "Generalization of lyapunov's stability theorem in the case of one zero characteristic exponent for non-autonomous system", soviet math. Dokl, vol 25, no.3, 1982.

[4] Malkin I.G., Theory of stability of motion", Moscow, 1966.

[5] Sgolts L.E., "differential equation and calculus of variation", India, 1977.

[6] Tenenbaum M., Pollard H., "Ordinary differential equation", 1964.

[7] Thanoon T.Y., "Center of gravity of non autonomous non-linear differential system in some critical cases " Ph.D. thesis, Odessa, USSR, 1990.

[8] Thanoon T.Y., "stable solution nonautonomous semi-linear differential equation 2-nd order with slowly changeable coefficients", j.edh.sci,vol(28),1988.

[9] Thanoon T.Y., "On gravity curve of solution for non automous semi-linear differential equation 2nd order with parameter", J. edu. Sci., Vol 29, P.P 124-129, 1998.

[10] Thanoon T.Y., Al katib A.Z.,"the finding conditions of stable trivial solution for certian differential equation in the semi-linear –cases", J.Edu. Sci., vol 37 , p.p 88-96, 1999.

[11] Thanoon T.Y., Etewi R.J., "On the center of gravity for Quasi-linear differential equation of order N in the critical case", J.Edu. Sci., vol 12, no. 1, p.p 82-99, 2001.