Derivation of numerically method for evaluating triple integrals and its error formnla by using trapeoidal method and Simpson's method

اشتقاق طريقة عددية لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها

أ.علي حسن محمد   طالبة الماجستير رحاب رحيم كاظم
قسم الرياضيات / كلية التربية للبنات / جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو اشتقاق طريقة عددية جديدة لحساب التكامـلات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها, إذ قدمنا مبرهنة مع البرهان لإيجاد صيغة الطريقة العددية وحدود التصحيح لها بالنسبة للتكامل الثلاثي, وبالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها قمنا بتحسين نتائج التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وطريقة رومبرك , فوجدنا إن الطريقة المركبة من طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة سمبسون على البعد x وقاعدة شبه المنحرف على البعدين y و z عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعدالداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي إن $h=\bar{h}=\bar{\bar{h}}$ حيث h المسافات بين الإحداثيات على المحور z و $\bar{h}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور y و $\bar{\bar{h}}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور x وأسميناها $RTTS$ حيث يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثلاثية اذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً .

Abstract

Our main aim of this search is to derivation new rule for evaluating of triple integrals with continuous integronds by using trapezoidal and Simpson's rules and to derive correction terms (error formula) and to improve the results by using Romberg accelration. We showed that the composit method from Romberg accelration and the values yielded from Simpson's method at the interior dimension (x) and trapezoidal method at the middle and exterior dimension (y and z) when the number of subintervals of exterior dimension equal to the number of subintervals of middle dimension and equal to the number of subintervals of interior dimension, that is $\left(\bar{\bar{h}}=\bar{h}=h\right)$ such that h is the distances between the coordinates on the z - axis , $\bar{h}$ is the distances between the coordinates on the y - axis and $\bar{\bar{h}}$ is the distances between the coordinates on the x - axis) , which we called it $RTTS$ we can depend on it to evalute triple integrals when the integrands are
Continuous and it give high accuarcy with little periods.

1.المقدمة

أن للتكاملات الثلاثية أهمية في إيجاد الحجوم والمراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للحجوم وكذلك تبرز أهميتها في إيجاد الكتل ذات الكثافة المتغيرة مثل قطعة من سلك رفيع أو صفيحة رقيقة من المعدن.فرانك آيرز [5] .

وقد عمل عدد من الباحثين في مجال التكاملات الثلاثية منهم ضياء [6] في عام 2009 استخدمت طرائق مركبة هي $RMRM\,(RS)$, $RMRM\,(RM)$, $RMRS\,(RM)$ و $RMRS\,(RS)$ وهذه الطرائق ناتجة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى (RM) على البعد الخارجي (z) و $RS\,(RS), RS\,(RM), RM\,(RM), RM\,(RS)$ على البعد الأوسط (y) والبعد الداخلي (x) وقد توصلت إلى إن الطريقة المركبة من قاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك على البعدين الداخلي والأوسط وقاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي $RMRS\,(RS)$ هي الأفضل عند حساب تكاملات ثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة .

وفي عام 2010 قدمت عكار [7] طريقة عددية جديدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على الأبعاد x و y و z عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة البعد الخارجي وأسمتها $RMMM$ وحصلت على نتائج جيدة من حيث الدقة وبفترات جزئية قليلة نسبياً.

أما في هذا البحث قدمنا مبرهنة مع البرهان لاشتقاق طريقة عددية جديدة لحساب قيم تقريبية للتكاملات الثلاثية التي مكاملاتها دوال مستمرة وصيغة الخطأ لها وهذه الطريقة عبارة عن طريقة مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون على البعد الداخلي وقاعدة شبه المنحرف على البعدين (الأوسط والخارجي) عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الأوسط ومساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي أن المسافة بين الإحداثيات على المحور x مساوية للمسافات بين الإحداثيات على المحور y ومساوية للمسافات بين الإحداثيات على المحور z ولاحظنا إن هذه الطريقة مع استخدام حدود التصحيح التي برهناها تعطي نتائج جيدة وسريعة وبعدد فترات جزئية قليلة نسبياً ولا تستغرق وقت كبير للتكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة.

وان المسائل العددية يمكن أن تحل بالطرائق التقليدية أو باستعمال البرامج ذات التقنية العالية أو بكليهما معا للوصول إلى الهدف الرئيس . فوسيت [1]

2. اشتقاق الطريقة العددية (TTS)لحساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة وصيغة الخطأ لها

سوف نقدم مبرهنة مع البرهان نستعرض فيها اشتقاق طريقة عددية جديدة لحساب قيم التكاملات الثلاثية وتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وقاعدة شبه المنحرف على البعدين الوسطي والخارجي y,z عندما $m=n_1=n_2$) n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$ و m عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[e,g]$) أي إن $\left(\bar{\bar{h}}=\bar{h}=h\right)$ كاندسمي [2]

نرمز لهذه الطريقة بالرمز TTS .

مبرهنة:

لتكن الدالة $f(x,y,z)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فان القيمة التقريبية للتكامل $I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)$ يمكن حسابها من القاعدة الآتية

$$\begin{aligned}
TTS &= \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz = \frac{h^3}{12}[f(a,c,e)+f(a,c,g)+f(a,d,e)+f(a,d,g)+f(b,c,e)+f(b,c,g)+f(b,d,e) \\
&+f(b,d,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(a,c,z_k)+f(a,d,z_k)+f(b,c,z_k)+f(b,d,z_k))+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,e)+f(a,y_j,g)+f(b,y_j,e) \\
&+f(b,y_j,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(a,y_j,z_k)+f(b,y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}f(x_{2i-1},y_j,z_k)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}f(x_{2i-1},y_j,z_k)))+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,e)+ \\
&f(x_{2i-1},c,g)+f(x_{2i-1},d,e)+f(x_{2i-1},d,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{2i-1},c,z_k)+f(x_{2i-1},d,z_k))+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_{2i-1},y_j,e)+f(x_{2i-1},y_j,g))) \\
&+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,e)+f(x_{2i},c,g)+f(x_{2i},d,e)+f(x_{2i},d,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{2i},c,z_k)+f(x_{2i},d,z_k))+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_{2i},y_j,e)+f(x_{2i},y_j,g)))]
\end{aligned}$$

$$x_{(2i)}=a+(2i)h\ ,\ \ i=1,2,\ldots,n\text{-}1 \quad \text{و} \qquad x_{(2i-1)}=a+(2i-1)h\ ,\ \ i=1,2,\ldots,n$$

وصيغة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) هي:-

$$E_{TTS}(h)=I-TTS(h)=Ah^2+Bh^4+Ch^6+\cdots$$

حيث أن $A,B,C,\ldots$ ثوابت .

البرهان

نفرض إن التكامل I معرف كالآتي :

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f\left(x,y,z\right)dxdydz$$

إذ إن $f\left(x,y,z\right)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]\times\left[e,g\right]$, بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_e^g\int_c^d\int_a^b f\left(x,y,z\right)dxdydz=TTS\left(h\right)+E_{TTS}\left(h\right) \qquad ...(1)$$

إذ إن $TTS\left(h\right)$ هي قيمة التكامل عددياً باستخدام قاعدة سمبسون على البعد x وقاعدة شبه المنحرف على البعدين y و z .

وان $E_{TTS}\left(h\right)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن إضافتها إلى قيم$\left(h\right)$ TTS , وان $\frac{g-e}{m}=\frac{d-c}{n_1}=\frac{b-a}{n_2}$ بفرض إن $m=n_1=n_2$ ، حيث ان $(m،n_1،n_2)$ عدد صحيح زوجي.

أن صيغة الخطأ للتكاملات الأحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة سمبسون هي

$$E_S(h)=-\frac{1}{180}h^4(f_{2n}^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{1}{1512}h^6(f_{2n}^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots \qquad ...(2)$$

فوكس [3]

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغة (2) نحصل على:-

$$E_S(h)=\frac{-\left(x_{2n}-x_0\right)}{180}h^4f^{(4)}\left(\mu_1\right)+\frac{\left(x_{2n}-x_0\right)}{1512}h^6f^{(6)}\left(\mu_2\right)+... \qquad ...(3)$$

حيث $\mu_i\in\left(x_0,x_{2n}\right)$, $i=1,2,3,...$.عكار[7]

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_a^b f\left(x,y,z\right)dx$ قيمته عددياً بقاعدة سمبسون على البعد x (التعامل مع z وy كثابتين) هي

$$\int_a^b f(x,y,z)dx=\frac{h}{3}\left(f(a,y,z)+f(b,y,z)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}f(x_{2i-1},y,z)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}f(x_{2i},y,z)\right)$$

$$-\frac{(b-a)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(\mu_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(\mu_2,y,z)}{\partial x^6}+... \qquad \cdots(4)$$

$$\mu_1,\mu_2,..\in(a,b) \quad , \quad i=1,2,...,n\text{ -1} \ , \ \mathrm{x}_{2i}=a+2ih \quad , \quad i=1,2,...,n \ , \ \mathrm{x}_{2i-1}=a+(2i-1)h$$

وبمكاملة الصيغة (4) عدديا على الفترة $\left[c,d\right]$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف على البعد y نحصل على :

$$
\begin{aligned}
TS &= \int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dx = \frac{h^2}{6}[f(a,c,z)+f(a,d,z)+f(b,c,z)+f(b,d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,z)+f(b,y_j,z)) \\
&+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,z)+f(x_{2i-1},d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2i-1},y_j,z))+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,z)+f(x_{2i},d,z)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_{2i},y_j,z))] \\
&+\int_c^d[\frac{(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4(\mu_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6(\mu_2,y,z)}{\partial x^6}+....]dy+\frac{h}{3}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\delta_1,z)}{\partial y^2}+ \\
&\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\delta_2,z)}{\partial y^4}+...]+\frac{h}{3}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\delta_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\delta_2,z)}{\partial y^4}+...]+ \\
&\frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},\delta_{i1},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},\delta_{i2},z)}{\partial y^4}+...]+\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},\delta_{i1},z)}{\partial y^2} \\
&+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},\delta_{i2},z)}{\partial y^4}+...] \qquad ....(5)
\end{aligned}
$$

حيث μ_j قيم تنتمي للفترة (a,b) و δij قيم تنتمي للفترة (c,d) , $j=1,2,3,\cdots,n+1$, $i=1,2,3,\cdots,n+1$

وبمكاملة الصيغة (5) عدديا على الفترة $[e,g]$ باستخدام قاعدة شبه المنحرف على البعد z نحصل على:

$$
\begin{aligned}
TTS &= \int_e^g\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)dx = \frac{h^3}{12}[f(a,c,e)+f(a,c,g)+f(a,d,e)+f(a,d,g)+f(b,c,e)+f(b,c,g)+f(b,d,e) \\
&+f(b,d,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(a,c,z_k)+f(a,d,z_k)+f(b,c,z_k)+f(b,d,z_k))+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(a,y_j,e)+f(a,y_j,g)+f(b,y_j,e) \\
&+f(b,y_j,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(a,y_j,z_k)+f(b,y_j,z_k)+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2i-1},y_j,z_k)+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2i-1},y_j,z_k)))+4\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(f(x_{2i-1},c,e)+ \\
&f(x_{2i-1},c,g)+f(x_{2i-1},d,e)+f(x_{2i-1},d,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{2i-1},c,z_k)+f(x_{2i-1},d,z_k))+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_{2i-1},y_j,e)+f(x_{2i-1},y_j,g))) \\
&+2\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}(f(x_{2i},c,e)+f(x_{2i},c,g)+f(x_{2i},d,e)+f(x_{2i},d,g)+2\sum_{k=1}^{n-1}(f(x_{2i},c,z_k)+f(x_{2i},d,z_k))+2\sum_{j=1}^{n-1}(f(x_{2i},y_j,e)+f(x_{2i},y_j,g)))] \\
&\int_e^g[\int_c^d[\frac{(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4(\mu_1,y,z)}{\partial x^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^6(\mu_2,y,z)}{\partial x^6}+....]dy+\frac{h}{3}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,\delta_{11},z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,\delta_2,z)}{\partial y^4}+...] \\
&+\frac{h}{3}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,\delta_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,\delta_2,z)}{\partial y^4}+...]+\frac{4h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},\delta_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},\delta_2,z)}{\partial y^4}+...]+ \\
&\frac{2h}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{(d-c)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},\delta_1,z)}{\partial y^2}+\frac{(d-c)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},\delta_2,z)}{\partial y^4}+...]]dz+
\end{aligned}
$$

$$\frac{h^2}{6}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,c,\theta_1)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,c,\theta_2)}{\partial z^4}+...]+\frac{h^2}{6}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,d,\theta_1)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,d,\theta_2)}{\partial z^4}+...]$$

$$\frac{h^2}{6}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,c,\theta_1)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,c,\theta_2)}{\partial z^4}+...]+\frac{h^2}{6}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,d,\theta_1)}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,d,\theta_2)}{\partial z^4}+...]$$

$$\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{n-1}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(a,y_j,\theta_{1j})}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(a,y_j,\theta_{2j})}{\partial z^4}+...]+\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{n-1}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(b,y_j,\theta_{1j})}{\partial z^2}+$$

$$\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(b,y_j,\theta_{2j})}{\partial z^4}+...]+\frac{2h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},c,\theta_{1j})}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},c,\theta_{2j})}{\partial z^4}+...]$$

$$\frac{2h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},d,\theta_{i1})}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},d,\theta_{i2})}{\partial z^4}+...]+\frac{4h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\sum_{j=1}^{n-1}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i-1},y_j,\theta_{ij1})}{\partial z^2}$$

$$+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i-1},y_j,\theta_{ij2})}{\partial z^4}+...]+\frac{h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},c,\theta_{i1})}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},c,\theta_{i2})}{\partial z^4}+...]+$$

$$\frac{h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},d,\theta_{i1})}{\partial z^2}+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},d,\theta_{i2})}{\partial z^4}+...]+\frac{2h^2}{3}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\sum_{j=1}^{n-1}[\frac{(g-e)}{-12}h^2\frac{\partial^2 f(x_{2i},y_j,\theta_{ij1})}{\partial z^2}$$

$$+\frac{(g-e)}{720}h^4\frac{\partial^4 f(x_{2i},y_j,\theta_{ij2})}{\partial z^4}+...] \qquad ......(6)$$

حيث قيم θ_{ij} تنتمي للفترة $i=1,2,3,...$ (e,g) $j=1,2,3,...$

وبما إن $...,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$ و $...,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ و $...,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2},\frac{\partial^4 f}{\partial z^4}$ مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$

,فان صيغة حدود التصحيح للتكامل الثلاثي I بقاعدة سمبسون على البعد x وقاعدة شبه المنحرف على البعدين y و z تصبح :-

$$E_{TTS}(h)=(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h^4}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1},\overline{\kappa_1}\right)}{\partial x^4}+\frac{h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2},\overline{\kappa_2}\right)}{\partial x^6}-\cdots\right)+(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h^2}{12}\frac{\partial^2 f\left(\overline{\overline{n_1}},\overline{\overline{\mu_1}},\overline{\overline{\kappa_1}}\right)}{\partial y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n_2}},\overline{\overline{\mu_2}},\overline{\overline{\kappa_2}}\right)}{\partial y^4}-\cdots\right)+(g-e)(d-c)(b-a)\left(\frac{-h^2}{12}\frac{\partial^2 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1,\hat{\kappa}_1\right)}{\partial z^2}+\frac{h^4}{720}\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2,\hat{\kappa}_2\right)}{\partial z^4}-\cdots\right)$$

$$E_{TTS}(h)=(g-e)(d-c)(b-a)h^2\left(\frac{-h^2}{180}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1},\overline{\kappa_1}\right)}{\partial x^4}+\frac{-1}{12}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n_1}},\overline{\overline{\mu_1}},\overline{\overline{\kappa_1}}\right)}{\partial y^4}+\frac{-1}{12}\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1,\hat{\kappa}_1\right)}{\partial z^4}\right)$$

$$+(g-e)(d-c)(b-a)h^4\left(\frac{-h^2}{1512}\frac{\partial^4 f\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2},\overline{\kappa_2}\right)}{\partial x^6}+\frac{-1}{720}\frac{\partial^4 f\left(\overline{\overline{n_2}},\overline{\overline{\mu_2}},\overline{\overline{\kappa_2}}\right)}{\partial y^6}+\frac{-1}{720}\frac{\partial^4 f\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2,\hat{\kappa}_2\right)}{\partial z^6}\right)+\cdots \qquad \cdots(7)$$

$$\ldots,\left(\overline{n_2},\overline{\mu_2},\overline{\kappa_2}\right),\left(\overline{n_1},\overline{\mu_1},\overline{\kappa_1}\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g], \quad \ldots,\left(\overline{\overline{n_2}},\overline{\overline{\mu_2}},\overline{\overline{\kappa_2}}\right),\left(\overline{\overline{n_1}},\overline{\overline{\mu_1}},\overline{\overline{\kappa_1}}\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$$

$$\ldots,\left(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2,\hat{\kappa}_2\right),\left(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1,\hat{\kappa}_1\right)\in[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$$

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة Exist في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ للقاعدة المذكورة كالآتي :

$$E_{TTS}(h) = I - TTS(h) = Ah^2 + Bh^4 + Ch^6 + \ldots \qquad \ldots(8)$$

حيث $A, B, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة في منطقة التكامل وبذلك ينتهي البرهان .

ملاحظة :- سوف نقوم بتحسين نتائج الطريقة اعلاه وذلك باستخدام تعجيل (طريقة) رومبرك وسوف نطلق على الطريقة $RTTS$.

3.الأمثلة

1- $I = \int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{y\log(x+z)}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.2335404545127 (مقربة إلى ثلاث عشر مرتبة عشرية) .

2- $I = \int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.00525674345502 (مقربة إلى اربعة عشرة مرتبة عشرية)

3- $I = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)dxdydz$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.5160245509312 (مقربة إلى ثلاث عشر مرتبة عشرية) .

4.النتائج

إن مكامل التكامل $\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{y\log(x+z)}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ معرف لكل $(x,y,z)\in[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل تكون مماثلة للصيغة(8) والجدول (1) يبين حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال طريقة $RTTS$

n	قيم قاعدة TTS	$K=2$	$K=4$	$K=6$	$K=8$	$K=10$
2	0.22961787891933					
4	0.23256360697007	0.23354551632031				
8	0.23329638054808	0.23354063840742	0.23354031321323			
16	0.23347944291320	0.23354046370158	0.23354045205452	0.23354045425835		
32	0.23352520201670	0.23354045505120	0.23354045447451	0.23354045451292	0.23354045451392	
64	0.23353664141356	0.23354045454585	0.23354045451216	0.23354045451276	0.23354045451276	0.23354045451276

الجدول (1) يبين حساب التكامل الثلاثي $\int_1^2\int_1^2\int_1^2 \frac{y\log(x+z)}{x^2+y^2+z^2}dxdydz$ بطريقة $RTTS$

نستنتج من الجدول انه عندما $m = n_1 = n_2 = 64$ فان قيمة التكامل باستخدام قاعدة TTS تكون صحيحة لاربع مراتب عشرية وعند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة نحصل على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لثلاث عشر مرتبة عشرية .

كذلك مكامل التكامل $I = \int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$ معرف لكل $(x,y,z)\in[0,1]\times[1,2]\times[2,3]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة(8) والجدول (2) يبين حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال طريقة $RTTS$.

n	قيم قاعدة TTS	$K=2$	$K=4$	$K=6$	$K=8$
2	0.00546156354427				
4	0.00531061017731	0.00526029238833			
8	0.00527037715809	0.00525696615169	0.00525674440258		
16	0.00526016233004	0.00525675738736	0.00525674346973	0.00525674345493	
32	0.00525759882702	0.00525674432601	0.00525674345525	0.00525674345502	0.00525674345502

الجدول (2) حساب التكامل الثلاثي $I=\int_2^3\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y+z)}dxdydz$

نستنتج من الجدول انه عندما $m=n_1=n_2=32$ فان قيمة التكامل بقاعدة TTS تكون صحيحة لخمس مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة لاربع عشر مرتبه عشرية .

في حين حصلت موسى [9] عندما $m=n_1=n_2=16$ على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية بطريقة SSS وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلت على قيمة صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية

بينما حصلت عكار[6] عندما $m=n_1=n_2=16$ على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية باستخدام قاعدة MMM وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة MMM حصلت على اثنتي عشر مرتبه عشرية عندما $m=n_1=n_2=16$

وكذلك مكامل التكامل $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)dxdydz$ معرف لكل $(x,y,z)\in[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون مماثلة للصيغة(8) والجدول (3) يبين حساب التكامل في أعلاه عددياً باستعمال بطريقة $RTTS$.

n	قيم قاعدة TTS	$K=2$	$K=4$	$K=6$	$K=8$	$K=10$
2	0.46486892706218					
4	0.50288075739233	0.51555136750238				
8	0.51271677685411	0.51599478334137	0.51602434439730			
16	0.51519608494323	0.51602268763960	0.51602454792615	0.51602455115677		
32	0.51581734705996	0.51602443443221	0.51602455088505	0.51602455093202	0.51602455093114	
64	0.51597274450194	0.51602454364926	0.51602455093040	0.51602455093112	0.51602455093111	0.51602455093111

الجدول (3) حساب التكامل الثلاثي $I=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi}{2}(x+y+z)\right)dxdydz$

نستنتج من الجدول انه عندما $m=n_1=n_2=64$ فان القيمة بقاعدة TTS تكون صحيحة لمرتبتين عشريتين وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لاثنتي عشر مرتبة عشرية .

5.المناقشة

نستنتج من خلال نتائج الجداول انه عند حساب التكاملات الثلاثية بقاعدة سمبسون على البعد x ,وقاعدة شبه المنحرف على البعدين y و z عندما $m=n_1=n_2$) حيث n_2 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$ و n_1 عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$ وm عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[e,g]$) و $(h=\bar{h}=\bar{\bar{h}})$ إن هذه القاعدة (قاعدة TTS) تعطي قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لخمس مراتب عشرية عندما $m=n_1=n_2=64$ وفي التكامل الثاني كانت القيمة صحيحة لاربع مراتب عشرية عندما $m=n_1=n_2=32$ إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال طريقة تعجيل رومبرك للقاعدة المذكورة حصلت على نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات التحليلية اذ كانت مطابقة لقيمة التحليلية في التكامل الأول عندما $m=n_1=n_2=64$ وفي التكامل الثاني عندما $m=n_1=n_2=32$ حصلنا على اربع عشر مرتبة عشرية اماالتكامل الثالث فقد حصلنا عندما $m=n_1=n_2=64$ على اثنتي عشر مرتبة عشرية وبذلك يمكن الاعتماد على الطريقة $RTTS$ في حساب التكاملات الثلاثية ذات المكاملات المستمرة.

الملحق :

$f\ (x, y, z)$ -1

هو ملف لكتابة الدالة $f\ (x, y, z)$ وفيه

function F=$f\ (x, y, z)$;

F= sin($pi\ /2*(x+y+z)$);

2- برنامج لإيجاد التكامل الثلاثي للدالة $f\ (x, y, z)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ باستعمال طريقة $RTTS$

```
clc
clear
a=0;b=1;c=0;d=1;e=0;f=1;eps=10^(-14);
%find triple integral of function g(x,y,z) on the [a,b]*[c,d]*[e,f]
%using RTTS
D(1)=2;D(2)=4;D(3)=6;D(4)=8;D(5)=10;D(6)=12;D(7)=14;D(8)=16;D(9)=18;D(10)=20;D(11)=22;
n=2;h=(b-a)/n;
s(1,1)=2;
s(1,2)=h*h*h*(g(a,c,e)+g(a,c,f)+g(a,d,e)+g(a,d,f)+g(b,c,e)+g(b,c,f)+g(b,d,e)+g(b,d,f)+2*(g(a,c,e+h)
+g(a,d,e+h)+g(b,c,e+h)+g(b,d,e+h)+g(a,c+h,e)+g(a,c+h,f)+g(b,c+h,e)+g(b,c+h,f))+4*(g(a,c+h,e+h)
+g(b,c+h,e+h))+16*g(a+h,c+h,e+h)+4*(g(a+h,c,e)+g(a+h,c,f)+g(a+h,d,e)+g(a+h,d,f))+8*(g(a+h,c,e
+h)+g(a+h,d,e+h)+g(a+h,c+h,e)+g(a+h,c+h,f)))/12;
for i=2:8;
 n=2^i;s(i,2)=0;
 h=(b-a)/n;
 s(i,2)=s(i,2)+g(a,c,e)+g(a,c,f)+g(a,d,e)+g(a,d,f)+g(b,c,e)+g(b,c,f)+g(b,d,e)+g(b,d,f);
 for k=1:n-1;
s(i,2)=s(i,2)+2*(g(a,c,e+k*h)+g(a,d,e+k*h)+g(b,c,e+k*h)+g(b,d,e+k*h));
end
for j=1:n-1;
s(i,2)=s(i,2)+2*(g(a,c+j*h,e)+g(a,c+j*h,f)+g(b,c+j*h,e)+g(b,c+j*h,f));
for t=1:n-1;
s(i,2)=s(i,2)+4*(g(a,c+j*h,e+t*h)+g(b,c+j*h,e+t*h));
for i3=1:2:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+16*g(a+i3*h,c+j*h,e+t*h);
 end
 for i1=2:2:n-2;
 s(i,2)=s(i,2)+8*g(a+i1*h,c+j*h,e+t*h);
 end
end
end
for i2=1:2:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+4*(g(a+i2*h,c,e)+g(a+i2*h,c,f)+g(a+i2*h,d,e)+g(a+i2*h,d,f));
 for k1=1:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+8*(g(a+i2*h,c,e+k1*h)+g(a+i2*h,d,e+k1*h));
 end
for j1=1:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+8*(g(a+i2*h,c+j1*h,e)+g(a+i2*h,c+j1*h,f));
 end
 end
```

```
for tt=2:2:n-2;
 s(i,2)=s(i,2)+2*(g(a+tt*h,c,e)+g(a+tt*h,c,f)+g(a+tt*h,d,e)+g(a+tt*h,d,f));
 for k3=1:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+4*(g(a+tt*h,c,e+k3*h)+g(a+tt*h,d,e+k3*h));
 end
 for j3=1:n-1;
 s(i,2)=s(i,2)+4*(g(a+tt*h,c+j3*h,e)+g(a+tt*h,c+j3*h,f));
 s(i,1)=n;
 end
  end
  s(i,2)=s(i,2)*h*h*h/12;
for l=3:i+1
 clc
 s(i,l)=(s(i,l-1)*2^D(l-2)-s(i-1,l-1))/(2^D(l-2)-1)
end
if abs(s(i,i+1)-s(i,i))<=eps;
 disp([2^(i-1),2*(i-1),s(i,i+1)])
 break
end
end
('xlswrite('G:/(RTTS-2).xls',s,1,'A2)
```

المصادر

[1] Fausett L. V. , " Applied Numerical Analysis Using Matalb ",second edition, Person Prentice-Hall , pp. 416-430 ,2008 .

[2] P.Kandasamy , " Numerical Methods" S.Chand and Companyltd ,2000 .

[3] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[4] Fox L.," Romberg Integration for aClass of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967

[5] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988

[6] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .

[7] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[8] موسى , صفاء مهدي , " تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عدديا باستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون " , رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2011 .

[9] بوردين , ريتشارد ودوكلاس فاريز, " التحليل العددي " ,مديرية دار الكتب للطباعة و النشر , ترجمة خالد احمد السامرائي كلية التربية للبنات جامعة بغداد سنة 1992