

مقارنة بين المقدرات الاعيادية والحصينة لنماذج السلاسل الزمنية المختلطة احادية

المنغيرات من الرتب الدنيا

أ. د. عبد المجيد حمزة الناصر* د. صفاء يونس الصفاوي**

المستخلص

ان الحصول على مقدرات ذات كفاءة تعد من اهم مراحل التحليل الاحصائي، وعليه يجب الاهتمام باختبار الطرائق المناسبة للوصول الى ذلك المستوى من التقدير وخصوصا عندما تكون بيانات السلسلة الزمنية تحتوي على بعض البيانات الملوثة التي تكون غير متسقة مع بقية المشاهدات.

وتهدف هذه الدراسة الى اجراء مقارنة بين المقدرات الاعتيادية والمقدرات الحصينة للنماذج المختلطة الاحادية من الرتب الدنيا $ARMA(1,1)$.

وقد تبين بان مقدر الامكان الاعظم كان هو الافضل في حالة عدم وجود الشوارد. اما في حالة اقحام الشوارد بنسبة 10% كانت المقدرات الحصينة هي الافضل وقد تم الاعتماد على معيار متوسط الاخطاء النسبية المطلقة MAPE كمعيار احصائي للمقارنة.

Comparison Between Ordinary Method and Robust Method to estimate the Parameters of the Univariate Mixed Model with Low Order

Abstract

A condense study was done to compare between the ordinary estimators. In particular the maximum likelihood estimator and the robust estimator, to estimate the parameters of the mixed model of order one, namely $ARMA(1,1)$ model.

Simulation study was done for a varieties the model. using: small, moderate and large sample sizes, were some new results were obtained. MAPE was used as a statistical criterion for comparison.

* استاذ/ جامعة بغداد

** استاذ مساعد/ كلية علوم الحاسبات والرياضيات/ جامعة الموصل

1-1 المبحث الاول: المقدمة

حظيت معظم الدراسات والبحوث التي اهتمت بالسلاسل الزمنية والخاصة بالنماذج المختلطة من الدرجة الاولى باهتمام واسع. كما ان فقدان المقدرات لخصائصها الجيدة، دفع الكثير من الباحثين لدراسة الشوارد فضلا عن دراسة طرائق التقدير الحصينة التي تعد وسيلة لحل مشكلة الشوارد. حيث اقترح (Fox, 1972) اول نموذج للشوارد اذ حدد نوعين من الشوارد وفي عام 1973 قام بدراسة تاثير الشوارد في مقدرات المربعات الصغرى وقدم طريقته ودرس خصائصها النظرية والتجريبية. وفي عام 1979 قدم Demby and Martin دراستهما المتميزة والتي تعتبر نقطة انطلاق ومرجعا للعديد من الباحثين الذين درسوا الشوارد في السلاسل الزمنية. وتوالت الدراسات مثل Li and Hui عام 1989 و Abraham and Chang عام 1993 وكذلك Raftery and Martin سنة 1996 و Marnna and Yahai عام 1997 و Martinez and Mentz عام 2002 والشرجبي عام 2003.

يهدف هذا البحث الى اجراء مقارنة كفاءة المقدرات بين الطرائق الاعتيادية مثل (مقدرات المربعات الصغرى ومقدرات الامكان الاعظم) والمقدرات الحصينة للنماذج المختلطة الاحادية المتغيرات من الرتب الدنيا ARMA(1,1) في حالة عدم وجود الشوارد وفي حالة وجود الشوارد. وقد قسم هذا البحث الى ثلاثة مباحث تضمن المبحث الاول المقدمة والهدف من البحث في حين شمل المبحث الثاني على الجانب النظري اما المبحث الثالث فقد انصب على الجانب التجريبي.

المبحث الثاني: الجانب النظري

1-2 قيم الشوارد > Outliers - Values

لقيت مشكلة الشوارد في البيانات اهتماما كبيرا في السنوات الاخيرة بسبب ادراك الكثير من الباحثين لخطورة الاساليب التقليدية في تقدير المعلمات عند ظهور هذه المشكلة فضلا عن ان البيانات لا يمكن ان تخضع بشكل كامل للافتراضات الاعتيادية (كالتوزيع الطبيعي وغيره). لذا كان لزاما للبحث عن طرائق بديلة تكون حصينة او مقاومة لظهور القيم الشاردة في البيانات او خرق الشروط المطلوبة. وبما ان موضوع السلاسل الزمنية من المواضيع المهمة في الدراسات الاحصائية، وان استخدام الطرائق التقليدية سيكون تأثيره كبيرا في تقدير المعلمات وذلك لان وجود الشوارد في بعض متغيرات السلاسل الزمنية سوف يؤثر في دقة تلك المقدرات وأن كشف الشوارد في البيانات ومعالجتها مثلت مساحة واسعة في البحث الاحصائي بسبب كون الاستدلال الاحصائي المبني على اساس التوزيع الطبيعي حساسا تجاه الشوارد Lye, Jenny N. & Vance, L. Martin, (1993).

وقد عرّف الشوارد العديد من الباحثين منها تعريف Lewis و Barnett ، الا ان جميع هذه التعاريف تنصب في مفهوم واحد كونها المشاهدة غير المتسقة مع بقية المشاهدات، لان ظهور القيم الشاردة ناشئ عن احد الاسباب الاتية:

1. أخطاء القياس الناتجة من أخطاء التسجيل.
2. أخطاء المعاينة الناتجة من سوء اختيار العينة وعدم تمثيلها للمجتمع تمثيلا جيدا، أو بسبب التحيز في اختيار العينة.
3. أو تحدث لسبب طبيعي تفرضه حالة معينة.

يوجد أسلوبان لمعالجة مسألة وجود الشوارد في البيانات، يكمن الأسلوب الأول في اكتشاف الشوارد وتصحيحها (تعديلها) ومن ثم إجراء التحليل الإحصائي التقليدي المعتمد. أما الأسلوب الثاني فيجري فيه التعامل مع مجموعة البيانات كما هي دون أي تعديل ولكي يتم التحليل بأجراءات أو طرائق حسنة تكون حساسيتها أقل اتجاه الشوارد من الطرائق التقليدية إذ تتم بعض الطرائق فيها من خلال إعطاء أوزان صغيرة (غالبا صفر) للملاحظات الشارده والبعض الآخر يتم إجراء الحصانة من خلال وضع قيود معينة على معلمتي التموضع والقياس يتم بعدها اكتشاف الشوارد خلال مسافات مهلونغيس الحسنة لبيانات متعدد المتغيرات.

إذ أن هذه المشاهدات يكون لها أعلى المسافات (المسافة التي تزيد عن قيمة القطع Cut-off value تعتبر شاردة).

ففي حالة المتغير الواحد يمكن ملاحظة القيمة الشاردة من خلال ترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا أو تنازليا حيث تقع في ذيل الترتيب.

أما في حالة متعدد المتغيرات فإن عملية الكشف عن الشوارد تصبح من الصعوبة بشكل يجعل من الضروري اتخاذ صيغة رياضية حسنة للكشف عنها. إذ أننا في هذه الحالة يجب أن نتجاوز أسلوب الفحص البصري والتشخيص الشخصي

2-2 الكشف عن الشوارد في السلاسل الزمنية:

إن عملية الكشف عن الشوارد وتحديد طبيعتها لها أهمية في عملية معالجة تأثيرات الشوارد السلبية في تقديرات معلمات النماذج المختلفة، ويعد مقياس الامكان من المقاييس المهمة والفعالة في هذا المجال إذ يتم استخدامه في الحالتين الاتيتين:

الحالة الأولى: عندما يكون التباين ومعلمات النموذج معروفة.

إن نموذج السلسلة الزمنية في حالة وجود الشوارد النمطية (IO) Innovations
Outlier يتم تقدير التأثير (w) وفق الصيغة:

$$Y_t = y_t + (\theta(B)/\phi(B))a_t + w\varepsilon_t^T \quad \dots \dots \dots (1a)$$

حيث

$$a_t = (1-B)^d$$

وبالاعتماد على حدود (a_t) يمكن إعادة كتابة المعادلة (1-1a) كما يأتي:

$$Y_t = (\theta(B)/\phi(B))a_t + w\varepsilon_t^T \quad \dots \dots (1b)$$

أما النموذج في حالة وجود الشوارد المضافة (A0) Additive Effects Outliers
كما في المعادلة الاتية:

$$\phi(B) y_t = \theta(B) a_t$$

ويمكن كتابته على حدود (a_t) كما يلي:

$$Y_t = y_t + w\varepsilon_t^T$$

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t + w\varepsilon_t^T$$

كما ان الشكل العام لنموذج الشوارد هو

$$Y_t = \sum W_j V_j(B) a_t^T + y_t$$

إذ ان

$$y_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} a_t$$

$$V_j(B) = \theta(B) / \phi(B) a(B)$$

في حالة وجود الشوارد من النوع (IO) عند الزمن (t=T)

$$V_j=1$$

في حالة وجود الشوارد من النوع (AO) عند الزمن (t=T)
أو ان

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \dots + \phi_p y_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \dots \dots \dots (2)$$

حيث ان:

$\phi(B)$ هي متعدد الحدود في B لمعلمت نموذج الانحدار الذاتي (ϕ_1, \dots, ϕ_p) .

$\theta(B)$ هي متعدد الحدود في B لمعلمت نموذج الاوساط المتحركة $(\theta_1, \dots, \theta_q)$

وان B هو معامل الارتداد (الازاحة) الخلفي.

وان a_t هي سلسلة التشويش الابيض بوسط حسابي صفر وتباين ثابت σ_a^2

وعند تعريف y_t بانها عملية عشوائية خطية مستقرة بعدد محدد (t) من المركبات فانه يمكن

التعبير عن y_t باتجاه واحد من الاوساط المتحركة (MA) وكما يأتي:

$$y_t = a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j}$$

$$\psi_0 = 1$$

$$y_t = \psi(B) a_t \dots \dots \dots (3)$$

وان $\psi(B)$ تحقق الشرط الاتي :

$$\psi_j \rightarrow 0 \text{ as } j \rightarrow \infty$$

$$\sum |\psi_j| < \infty$$

وهذا الشرط يعكس مدى تقارب متعدد الحدود $\psi(B)$ الا انه من الصعب بمكان الوصول الى

تقدير النموذج بسبب ان $\psi(B)$ تحتوي على عدد لا نهائي من المعلمت ولذلك يمكن استخدام نسب

تقريبية وهي (Kaiser, R. & Maravall, A., 2001).

$$\psi(B) = \theta(B) / \phi(B) \dots \dots \dots (4)$$

حيث ان

$\theta(B)$ و $\phi(B)$ متعدد الحدود في B من درجة p و q على التوالي وعليه يمكن كتابة y_t كما

يأتي:

$$\phi(B) y_t = \theta(B) a_t, \quad y_t = [\theta(B) / \phi(B)] a_t$$

او

$$[1 + \phi_1 B + \dots + \phi_p B^p] y_t = [1 + \theta_1 B + \dots + \theta_q B^q] a_t \dots \dots \dots (5)$$

واذا ضربنا طرفي المعادلة بالمقدار y_{t-k} حيث ان $k > q$ ومن ثم نأخذ التوقع سنحصل على

المعادلة الفرقية (Difference Equation) الاتية:

$$\gamma_k + \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

أي ان

$$\phi(B) \gamma_k = 0$$

وان γ_k هي دالة لـ k وان $k > q$.

اما ايجاد قيمة معامل الارتباط الذاتي بمعادلة الفروق المتجانسة (1-6) التي ستكون

$$r^p + \phi_1 r^{p-1} + \dots + \phi_{p-1} r + \phi_p = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

وإذا كانت (r_1, r_2, \dots, r_p) هي جذور المعادلة $\phi(B)\gamma_k=0$ فيمكن كتابة γ_k على وفق الصيغة الآتية:

$$\gamma_k = \sum_{i=1}^p r_i^k$$

وهي التي تتقارب الى الصفر كلما كانت k كبيرة جدا، أي :

$$\gamma_k \rightarrow 0 \quad \text{as } k \rightarrow \infty$$

او ان

$$|r_i| < 1 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, p$$

وبالعودة الى المعادلة (1-4) تكون الدالة المولدة للتباين المشترك AGF

$$\gamma(B,F) = \theta(B)\theta(F) / \phi(B)\phi(F) \quad \dots\dots\dots (8)$$

وهي الصيغة التي تحقق شروط الاستقرار من تماثل وتقارب .

الحالة الثانية : عندما تكون معلمات النموذج والتباين مجهولة:

وهي الحالة التي تلاحظ دائما في التطبيقات العملية، ولكي يمكن الحصول على التباين

وكذلك المعلمات من خلال تقديرها سوية مع (W) بالنسبة الى كل نموذج سواء كان (IO) ام

(AO) ، وذلك باستخدام اسلوب الامكان الأعظم **Maximum Likelihood (ML)**

Estimation ومن ثم ايجاد كل من $\hat{\lambda}_{2T}, \hat{\lambda}_{1T}$ وكما يأتي (الشرجي، 2003):

$$\hat{\lambda}_{1T} = \hat{W}_{IO} / \hat{\sigma}_a$$

$$\hat{\lambda}_{2T} = \hat{W}_{AO} / \hat{\rho} \hat{\sigma}_a \quad \dots\dots\dots (9)$$

وان

$$\hat{W}_{IO} = \hat{e}_T$$

$$\hat{W}_{AO}^2 = \hat{\rho}^2 (1 - \hat{\Psi}_1 F - \hat{\Psi}_2 F^2 - \dots - \hat{\Psi}_{n-T} F^{n-T}) \hat{e}_T$$

$$\hat{\rho}^2 = (1 + \hat{\Psi}_1 + \hat{\Psi}_2 + \dots + \hat{\Psi}_{n-T})^{-1} \quad \dots\dots\dots (10)$$

وهذه في الحقيقة تكافئ تقريبا مقياس نسبة الامكان عندما تكون معلمات النموذج والتباين معلومة.

وللكشف عن (IO) والـ (AO) ذات المواقع المجهولة فانه يمكن اختبار ذلك عن طريق

$$\hat{\eta}_{IO} = \max_t |\lambda_{1t}| > c \quad , \quad t=1,2,\dots,n$$

$$\hat{\eta}_{AO} = \max_t |\lambda_{2t}| > c \quad , \quad t=1,2,\dots,n \quad \dots\dots (11)$$

حيث ان c عدد ثابت موجب اختياري وللتمييز بين انواع الشوارد (AO) و (IO) يتم استخدام المتباينات الآتية:

إذا كانت $|\hat{\lambda}_{1T}| > |\hat{\lambda}_{2T}|$ فهذا يعني وجود شوارد من النوع (IO) .

وهذه كانت $|\hat{\lambda}_{1T}| \leq |\hat{\lambda}_{2T}|$ فهذا يعني وجود شوارد من النوع (AO) .

3-2 مقدرات معاملات نموذج الاخذار الذاتي بالطرائق الاعيادية:

1-3-2 طريقة المربعات الصغرى Least Squares Method

سنتعرض في هذا المبحث الى توضيح الاجراءات الخاصة بتقدير معاملات نموذج الانحدار الذاتي ARMA(p,0) عندما $(p \geq 1)$ باستخدام طريقة المربعات الصغرى. وهي احدى طرائق التقدير الاعتيادية في الحصول على المقدرات الاولية Initial Estimates اللازمة للبدء باجراءات الطرائق الحصينة. (Harba 1981).
بافتراض السلسلة الزمنية $\{y_t\}$ ، $(t = 0, 1, \dots)$ والتي تعطي على وفق نموذج الانحدار الذاتي ARMA (p,0).

$$y_t = \Phi_j y_{t-j} + \varepsilon_t \quad \dots \quad (12) \sum_{j=1}^p$$

حيث ان Φ_j تمثل معاملات الانحدار الذاتي، ε_t تمثل حد الخطأ العشوائي بوسط صفر وتباين σ^2 ، وجعل Φ و Y_t معرفة بصيغة المصفوفات

$$\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p)'$$

$$Y_t = (y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p})'$$

لذلك يمكن كتابة نموذج الانحدار الذاتي ARMA(p,0) بالصيغة الاتية:

$$y_t = \Phi^T Y_t + \varepsilon_t \quad \dots \quad (13)$$

وبافتراض ان فترة الاشارة Signal Interval هي (T) ، تحتوي على (I) من العينات وهذا يعني بان $T = I \Delta T$ ، حيث ΔT تمثل مجال العينة. وعليه فان اول عينة في هذه الفترة تكون y_t ، في حين تكون العينة الاخيرة y_{t+r} . وخلال هذه الفترة يتطلب تقدير $\hat{\phi}_r$ بحيث ان تكون دالة الكلفة (Cost Function) J_r اقل ما يمكن، حيث ان

$$J_r = \sum (y_m - \hat{\phi}_r^T Y_m)^2 \quad \dots \quad (14)$$

وعليه فان $\hat{\phi}_r$ يجب ان تحقق

$$(\partial J_r / \partial \hat{\phi}_r) = 0$$

بحيث ان

$$\left[\sum_{m=t}^{t+r} Y_m Y_m^T \right] \hat{\phi}_r = \sum_{m=t}^{t+r} y_m Y_m \quad \dots \quad (15)$$

وبتجديد

$$P^{-1}_r = \sum_{m=t}^{t+r} Y_m Y_m^T \quad \dots \quad (16)$$

فان P^{-1}_r تكون قابلة للعكس Invertible فقط اذا كانت $r > p$ والمتمثلة بدرجة النموذج وعليه فان المعادلة (16) ستكون

$$P_r^{-1} \hat{\phi}_r = \sum_{m=t}^{t+r} y_m Y_m^T \quad \dots \quad (17)$$

$$\hat{\phi}_r = P_r \sum_{m=t}^{t+r} y_m Y_m^T \quad \dots \quad (18)$$

ويلاحظ انه بالرغم من ان $(Y_m Y_m^T)$ تكون مصفوفة غير احادية **non-singular** فان المصفوفة P_r^{-1} تكون مصفوفة غير احادية **non-singular** وذلك لكون المجموع هو على مدى (m) . هذا ويمكن اعادة كتابة المعادلة (18) بالصيغة الاتية:

$$P_r^{-1} \hat{\phi}_r = \sum_{m=t}^{t+r-1} y_m Y_m + y_r Y_r \quad \dots \quad (19)$$

ومن الصيغة (16) نلاحظ ان:

$$\sum_{m=t}^{t+r-1} y_m Y_m = \left[\sum_{m=t}^{t+r-1} Y_m Y_m^T \right] \hat{\phi}_{r-1} \quad \dots \quad (20)$$

لذلك فان المعادلة (19) ستكون:

$$P_r^{-1} \hat{\phi}_r = \left[\sum_{m=t}^{t+r-1} Y_m \cdot Y_m^T \right] + y_r Y_r \quad \dots \quad (21) \hat{\phi}_{r-1}$$

بإضافة وطرح $Y_r^T \hat{\phi}_{r-1}$ من الطرف الايمن من المعادلة (21) فان:

$$\begin{aligned} P_r^{-1} \hat{\phi}_r &= \left[\sum_{m=t}^{t+r-1} Y_m \cdot Y_m^T \right] + Y_r (y_r - Y_r^T \hat{\phi}_{r-1}) + Y_r Y_r^T \hat{\phi}_{r-1} \hat{\phi}_{r-1} \\ &= \left[\sum_{m=t}^{t+r} Y_m \cdot Y_m^T \right] + Y_r (y_r - Y_r^T \hat{\phi}_{r-1}) \quad \dots \quad (22) \hat{\phi}_{r-1} \end{aligned}$$

وبتعويض قيمة p_r^{-1} و اجراء بعض التبسيطات نحصل على مقدر $\hat{\phi}_r$ بالصيغة الاتية:

$$\hat{\phi}_r = \hat{\phi}_{r-1} + P_r Y_r (y_r - Y_r^T \hat{\phi}_{r-1}) \quad \dots \quad (23)$$

إذا $\hat{\phi}_r$ يتم الحصول عليها بالتتابع من خلال المقدر السابق $(\hat{\phi}_{r-1})$ ، ومن قياسات (y_r) و (Y_r) التي تشترط بان P_r يتم الحصول عليها بالتتابع ايضا.

وإن المقدر الابتدائي p يتم اختياره بطريقة اعتباطية و لكن لمقتضيات إنجاز عملية التقارب **Convergence**، بشكل متسارع فإنه من الملائم استخدام المقدر الابتدائي المتمثل بالصورة الاتية :

$$P_0 = 1/\varepsilon \quad , \quad \varepsilon > 0$$

حيث أن (ε) عدد صغير اعتباطي، بحيث أن $(1/\varepsilon)$ تكون بأي موقع بين العدد (10) وأعلى قيمة يمكن أن يحتوي عليها الحاسوب.

طريقة بديلة لايجاد مقدر الامكان الاعظم التام لنموذج **ARMA(1,0)**:

من الواضح ان نموذج الانحدار الذاتي من الدرجة الاولى **ARMA(1,0)** يمكن كتابته بالصيغة الاتية:

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \quad \dots \quad (24)$$

حيث يتبع الخطأ العشوائي توزيعاً طبيعياً معني ذلك ان $\{\varepsilon_t\}$ is i.i.d. $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ يمكن كتابته بدلالة الأخطاء العشوائية على وفق الصيغة الآتية:

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \varepsilon_{t-i} \quad \dots \dots \dots (25)$$

وعليه يمكن البرهنة على ان التوزيع الحدي للسلسلة الزمنية y_t يتبع توزيعاً طبيعياً على وفق الصيغة الآتية:

$$y_t \sim N\left(0, \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2}\right)$$

وواضح ان $\{y_t\}$ مترابطة فيما بينها ولذلك يشترط اجراء تحويل (Transformation) مناسب لاجاد دالة الامكان وعلى النحو الآتي:
من الواضح ان :

$$\varepsilon_2 = y_2 - \phi_1 y_1$$

$$\varepsilon_3 = y_3 - \phi_1 y_2$$

⋮

$$\varepsilon_n = y_n - \phi_1 y_{n-1}$$

مستقلة بعضها عن البعض الاخر وتوزيع كل منها طبيعي بوسط حسابي صفر وتباين ثابت σ_ε^2 ودالة الامكان للعينة هي:

$$\ell(y_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n) = \left[\frac{1 - \phi_1^2}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2}(1 - \phi_1^2)} \left[\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right]^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n \varepsilon_t^2} \quad (26)$$

ومن الواضح ان دالة التحويل البيقوبي (Jacobian) اللازمة للتحويل المحدد لها يساوي واحداً أي ان $|J|=1$ وهذا يقود الى دالة الامكان التامة (Exact):

$$\ell(y_1, y_2, \dots, y_n) = \left[\frac{1 - \phi_1^2}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{y_1^2}{2\sigma_\varepsilon^2}(1 - \phi_1^2)} \left(\frac{1}{2\pi\sigma_\varepsilon^2}\right)^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^n (y_t - \phi_1 y_{t-1})^2} \quad (27)$$

وبعد التبسيط نحصل على دالة الامكان

$$\ell(y_1, y_2, \dots, y_n) = (2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{n}{2}} (1 - \phi_1^2)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} [(1 - \phi_1^2)y_1^2 + \sum_{t=2}^n (y_t - \phi_1 y_{t-1})^2]} \quad (28)$$

وعند اخذ اللوغاريتم الطبيعي لدالة الامكان والتفاضل بالنسبة الى المعلمة ϕ_1 نحصل على المعادلة من الدرجة الثالثة وكما ياتي:

$$\hat{\phi}_1^3 - \frac{n-2}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}}{\sum_{t=3}^n y_{t-1}^2} \hat{\phi}_1^2 - \left[1 + \frac{1}{n-1} \left(1 + \frac{\sum_{t=1}^n y_t^2}{\sum_{t=3}^n y_{t-1}^2}\right)\right] \hat{\phi}_1 + \frac{n}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}}{\sum_{t=3}^n y_{t-1}^2} = 0 \quad \dots \dots (29)$$

وبعد حل المعادلة نحصل على مقدر الامكان الاعظم التام للمعلمة ϕ_1 والتي تحقق الاستقرارية:

$$\hat{\phi}_1 = \frac{n-2}{n-1} \frac{\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}}{\sum_{t=3}^n y_{t-1}^2} \dots\dots\dots (30)$$

4 تقديرات معاملات النموذج بالطريقة الحصينة:

إن القيم الشاردة للسلسلة الزمنية يمكن أن تؤثر عكسياً في كل من مقدرات المربعات الصغرى (LS) ومعامل مقدرات M لمعاملات الأنداد الذاتي. إن الأهتمام إنصب هنا للحصول على مقدرات حصينة لمعامل الأنداد الذاتي من الدرجة الأولى (x_t). إذ أن المشاهدات هي $y_t = x_t + v_t$ مع نموذجين يتغيران الأول الشوارد النمطية (IO) Innovation Outliers مع $(v_t=0)$ ، x_t احتمال غير طبيعي Possibly non-Gaussian والثاني نموذج الشوارد المضافة Additive Effects Outliers (AO) مع v_t غير صفرية واحتمال كبير جداً وجزء صغير possibly quite large small fraction من الزمن و x_t طبيعية، والتصنيف العام لمقدرات M تكون مفترضة والتي لها خصائص حصينة لمتوسط مربعات الخطأ باتجاه كلا النموذجين (IO) و (AO) بطريقة كاوس Gaussian Method.

في هذا البحث سندرس مشاكل الحصول على مقدرات حصينة للأنداد الذاتي من الرتب الدنيا ، أي التحويل بالنسبة إلى السلاسل الزمنية للشوارد. فعند اقتراح إجراءات حصينة لتقدير معاملات السلاسل الزمنية، فإنه يقتضي تمييز السلاسل الزمنية الملوثة بالشوارد بنماذج احتمالية مناسبة.

وبسبب صعوبة صياغة النماذج الاحتمالية التامة (Martin 1979) فإنه يبدو إلزاماً البدء بالنماذج المولدة لتعيين الشوارد البسيطة، والتي يمكنها تهينة بيانات حقيقية تحتوي على الشوارد، وقد أثبت عملياً، أن سلوك الشوارد غالباً ما يتبع أحد الأشكال الآتية:

- أ- السلوك المحتمل الأول لحدوث الشوارد هو أن تكون فرصة حدوثها مرتبطة عادة بالمتبقي من مفردات العينة، باستثناء حالة Initial Jump التي تعرف بالتغير الفجائي الابتدائي.
- ب- السلوك المحتمل الثاني، يعرف بشوارد الخطأ الكبير، الذي قد يعود لأسباب مختلفة، أمثال خطأ التسجيل.
- ج- السلوك المحتمل الثالث، يعرف بالشوارد مختلفة الأنواع ذات السلوك اللا متصل بسلوك بقية مفردات العينة. وهذا النوع قد يعود إلى القصور في استخدام وسيلة التسجيل.

مما تقدم، فإن أنواع السلوك المحتملة أعلاه يمكن أن تتحقق بنماذج مناسبة، فالنوع الأول من السلوك يمكن الحصول عليه مع نموذج الشوارد النمطية (Innovation Outlier. IO)، فإذا كانت قيم المشاهدات تساوي قيم جوهر العملية (Zch, J.E., (1979)، أي

$$y_i = \hat{x}_t \quad \dots\dots\dots (31)$$

وإن توزيع أخطاء (IO) متناظر، ثقيل الأطراف، عندئذ فإن نموذج الشوارد يسمى بالنموذج النمطي (IO)، أمثال توزيع t أو توزيع طبيعي ملوث آخر (G) حيث أن:

$$G(p, \sigma_1, \sigma_2) = (1-p) N(0, \sigma_1^2) + pN(0, \sigma_2^2)$$

بحيث أن $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$ وإن قيمة p تكون صغيرة عادة.

وبعبارة أخرى إذا كانت قيم (ε_t) الضوضاء الأبيض تحقق شرط (iid) للمتغير العشوائي ذي التوزيع المتماثل (G) بمتوسط صفر ومعلمة القياس (σ) فإن قيم المتغير العشوائي تسمى Innovation. أما بالنسبة إلى نوع السلوك الثاني والثالث، فإن النموذج الملائم، يعرف بنموذج الشوارد المضافة أو التجميعية Additive outlier (AO) حيث أن:

$$Y_t = X_t + V_t \quad \dots\dots\dots (32)$$

حيث V_t متغير عشوائي توزيعه مستقل عن X_t وتوزيعه الحدي (عندما تكون p صغيرة نسبياً) هو

$$P(V_t = 0) = 1 - \gamma$$

هذا وقد اثبتت التجربة في حقل السلاسل الزمنية، أن مدى γ يتحقق ما بين (0.01, 0.25) (Stochinger & Duter, 1987) كما يمكن أن يكون توزيع V_t طبيعياً مختلطاً

$$CND(p, \sigma_3) = (1-\gamma) \delta_0 + \gamma N(p, \sigma_3^2) \quad \dots\dots\dots (33)$$

حيث تشير δ_0 إلى التوزيع المنحل Degenerated الذي تتركز كتلته عند مركز النقل. إن هذا النوع من الشوارد يمكن حدوثه، إذا اسقطت فرضية الاستقلالية V_t وقد أشار إلى هذا النوع من الشوارد لأول مرة (Fox 1972)، إذ اقترح نوعين من الشوارد، تلك التي تؤثر في المشاهدة فقط عند حدوثها والذي عُرف بعدئذ بالشوارد المتجددة أو النمطية (النوع الأول) وتلك التي تؤثر في المشاهدات عموماً والذي عُرف بالشوارد المضافة أو التجميعية (النوع الثاني)، وعلاوة على ذلك فقد تقدم Fox في السنة نفسها أيضاً باقتراحين لتحديد نوع الشوارد، الأول يبني على فكرة الفحص للنموذجين ومن ثم إختيار النموذج الذي تكون المشاهدة الشاردة فيه أكثر تطرفاً، والثاني باختيار النموذج عندما تتهيا فرصة الكشف عن مدى تأثير المشاهدة الشاردة في المشاهدات اللاحقة لها.

3-2 صياغة نموذج المحاكاة:

تعد المحاكاة عملية تشبيه أو تقليد للواقع الحقيقي، أي إيجاد صورة طبق الأصل من أي نظام أو نموذج دون أخذ ذلك النظام أو النموذج ذاته، وخصوصاً أن بعض هذه المشاكل والنظريات الإحصائية يصعب برهنتها رياضياً، مما دفع الباحثين إلى ترجمتها على مجتمعات تجريبية ثم سحب عدد من العينات العشوائية منها ليتم التوصل إلى الحلول المثلى لمثل هذه المشكلات. لذا وسعياً لتحقيق الهدف الأساسي لهذا البحث فقد صيغ نموذج المحاكاة على وفق الخطوات التالية:

أولاً: المجموعة الأولى من التجارب لمقارنة الطرائق الاعتيادية والحصينة لتقدير معاملات ARMA(1,1) وتتضمن هذه التجارب عدة مراحل لتوليد البيانات، التقدير ثم المقارنة، وقد تمت كتابة البرامج الخاصة بذلك بالاعتماد على برنامج (Minitab) ومن خلال امكانياته باستخدام الـ (Macros). وتوليد البيانات لغرض تقدير معاملات النموذج المختلط من الرتبة الأولى ARMA(1,1) وحسب الحالات الآتية:

1. تحديد عدد المتغيرات في النموذج $m=1$

$$y_t = \phi_1 y_{t-1} + \varepsilon_t - \theta_1 \varepsilon_{t-1}$$

حيث

$$\phi_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\sum (y_{t-2} - \bar{y})(y_t - \bar{y})}{\sum (y_{t-1} - \bar{y})(y_t - \bar{y})}$$

$$\theta_1 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. تحديد حجم العينة (n) حيث تم اختيار ثلاثة احجام للعينات هي (25, 50, 100).
3. تحديد القيم الافتراضية لمعاملات النموذج المختلط من الدرجة الاولى ARMA(1,1) (ϕ_1, θ_1) حيث تم تحديد القيم الافتراضية :

$$(\phi_1, \theta_1) = (0.8, -0.8), (0.8, -0.6), \dots, (-0.8, 0.2)$$

وجميعها تحقق الاستقرارية وقابلية العكس وقد تم اخذ توافق القيم الافتراضية وعددها 36 حالة وتم تقدير معاملات النموذج المختلط على وفق طرائق المربعات الصغرى (LS) والامكان الاعظم (ML) والحصينة (RO) في حالة عدم اقحام الشوارد وكذلك في حالة اقحام الشوارد حيث تم اقحام الشوارد بنسبة 10% وفي جميع الطرائق تم اعتماد متوسط الاخطاء النسبية المطلقة (MAPE) معايير احصائية حيث كانت طريقة الامكان الاعظم هي الافضل قبل اقحام الشوارد اما في حالة اقحام الشوارد فكانت الطريقة الحصينة هي الافضل كما في الجدول (1). كما لوحظ ان متوسط الاخطاء النسبية المطلقة يتناقص مع زيادة حجم العينة وهذا يتطابق تماما والنظرية الاحصائية.

المبحث الثالث: الاستنتاجات

مما تقدم نستنتج ما ياتي:

- أ. في حالة كون حجم العينة صغيراً فإن مقدر الامكان الاعظم باعتماد معيار متوسط الاخطاء النسبية (MAPE) هو المقدر المفضل بنسبة 86% في حالة عدم وجود الشوارد في حين تفوقت الطريقة الحصينة عند وجود الشوارد وبنسبة 92%.
- ب. في حالة كون حجم العينة متوسطاً فإن مقدر الامكان الاعظم باعتماد معيار متوسط الاخطاء النسبية (MAPE) هو المقدر المفضل بنسبة 96% في حالة عدم وجود الشوارد في حين تفوقت الطريقة الحصينة عند وجود الشوارد وبنسبة 100%.
- ج. في حالة كون حجم العينة كبيراً فإن مقدر الامكان الاعظم باعتماد معيار متوسط الاخطاء النسبية (MAPE) هو المقدر المفضل بنسبة 86% في حالة عدم اقحام الشوارد في حين تفوقت الطريقة الحصينة عند وجود الشوارد وبنسبة 98%.

الجدول (1)
 يبين متوسط الأخطاء النسبية المطلقة لمعاملات النموذج المختلط المقدر ARMA(1,1)
 عندما يكون حجم العينة (25)

قبل أقحام الشوارد						بعد أقحام الشوارد			
رقم التشكيلة	طريقة التقدير القيم الافتراضية للمعاملات	LS	ML	Robust	Best	LS	ML	Robust	Best
1	$\phi = 0.8$ $\theta = -0.8$	0.00463029	0.00439570	0.009413040	ML	0.000996376	0.000996527	0.000104288	RO
		0.00283523	0.00105452	0.008713000	ML	0.00467967	0.00105258	0.000941054	RO
2	$\phi = 0.8$ $\theta = -0.6$	0.00081820	0.000825783	0.000930120	LS	0.00117350	0.00116627	0.000857707	RO
		8 0.00231701	0.00111706	0.008833290	ML	0.00529653	0.00105018	0.000913140	RO
3	$\phi = 0.8$ $\theta = -0.2$	0.00286717	0.00278937	0.009183490	ML	0.000913989	0.000917573	0.000117342	RO
		0.00626127	0.00124991	0.005705290	ML	0.00772764	0.00197049	0.000731583	RO
4	$\phi = 0.8$ $\theta = 0.2$	0.0170527	0.0163838	0.00902436	ML	0.000934881	0.000937595	0.000106919	RO
		0.00118536	0.000741829	0.00146248	ML	0.0119543	0.00252196	0.00127661	RO
5	$\phi = 0.8$ $\theta = 0.6$	0.00472037	0.00456535	0.00869391	ML	0.00119371	0.00118564	0.001134403	RO
		0.0136528	0.000880842	0.00115520	ML	0.00312255	0.00109207	0.00109452	ML
6	$\phi = 0.8$ $\theta = 0.8$	0.00126354	0.00125256	0.00862717	ML	0.000640919	0.000655881	0.000140192	RO
		0.00387362	0.000985539	0.00111930	ML	0.000146489	0.000411784	0.000106975	RO

قبل اقحام الشوارد						بعد اقحام الشوارد			
رقم التشكيلة	طريقة التقدير القيم الافتراضية للمعاملات	LS	ML	Robust	Best	LS	ML	Robust	Best
7	$\phi = 0.6$ $\theta = -0.8$	0.00275341	0.00268035	0.00900925	ML	0.00150306	0.00148210	0.000933047	RO
		0.00282882	0.00102013	0.00859432	ML	0.00264026	0.00370954	0.000938648	RO
8	$\phi = 0.6$ $\theta = -0.6$	0.00377653	0.00366084	0.00896936	ML	0.00225181	0.00219965	0.00107317	RO
		0.00635461	0.00102683	0.00810186	ML	0.000690708	0.00115875	0.000614427	RO
9	$\phi = 0.6$ $\theta = -0.2$	0.0137672	0.0131519	0.08949400	ML	0.00275948	0.00268616	0.000946449	RO
		0.00568743	0.00115125	0.00372315	ML	0.00151989	0.00141587	0.000744000	RO
10	$\phi = 0.6$ $\theta = 0.2$	0.00226954	0.00213331	0.00890763	ML	0.00322045	0.00312793	0.00124967	RO
		0.00422176	0.00103025	0.00165588	ML	0.0133190	0.000827771	0.00126774	ML
11	$\phi = 0.6$ $\theta = 0.6$	0.00196166	0.00192159	0.00882144	ML	0.000269031	0.000216155	0.000130883	RO
		0.00081193 5	0.000929183	0.00121548	LS	0.000270593	0.000855581	0.000109491	RO
12	$\phi = 0.6$ $\theta = 0.8$	0.00186700	0.00183087	0.00881413	ML	0.00118158	0.00117401	0.001160485	RO
		0.00215007	0.000898923	0.00116984	ML	0.00527499	0.000953264	0.000106715	RO
13	$\phi = 0.2$ $\theta = -0.8$	0.00430972	0.00417181	0.00712071	ML	0.00157419	0.00155026	0.000181885	RO
		0.00196659	0.00103745	0.007095560	ML	0.00142212	0.00105878	0.000893671	RO
14	$\phi = 0.2$ $\theta = -0.6$	0.00258095	0.00251508	0.00708650	ML	0.001030020	0.00102877	0.00101384	RO
		0.00285102	0.00107400	0.00419368	ML	0.00348267	0.000982917	0.000926789	RO
15	$\phi = 0.2$ $\theta = -0.2$	0.00106091	0.00105838	0.00700833	ML	0.000774569	0.000783962	0.000556272	RO
		0.00613817	0.00125443	0.00970477	ML	0.00821737	0.00119015	0.001172180	RO

قبل اقحام الشوارد						بعد اقحام الشوارد			
رقم التشكيلة	طريقة التقدير القيم الافتراضية للمعاملات	LS	ML	Robust	Best	LS	ML	Robust	Best
16	$\phi = 0.2$	0.00050905							
	$\theta = 0.8$	8	0.000529514	0.000708238	LS	0.000227533	0.000176386	0.000968271	ML
	----	0.00016719	0.000913850	0.00167160	LS	0.000492360	0.000968271	0.000106737	RO
		4							
17	$\phi = 0.2$	0.00344673	0.00334478	0.00705764	ML	0.00119343	0.00118537	0.000251296	RO
	$\theta = 0.6$	0.00131983	0.000865931	0.00137121	ML	0.00179691	0.00111105	0.00109330	RO
18	$\phi = 0.2$	0.00058570	0.000602967	0.000707054	LS	0.00267751	0.00260761	0.00139605	RO
	$\theta = 0.2$	5	0.000687902	0.00219561	ML	0.00359475	0.000204914	0.000128262	RO
19	$\phi = -0.2$	0.0629432	0.0602789	0.12770400	ML	0.000758055	0.000768136	0.000131504	RO
	$\theta = -0.8$	0.00222156	0.00105406	0.00514471	ML	0.00309385	0.00113433	0.000969255	RO
20	$\phi = -0.2$	0.0681697	0.0653710	0.001288211	RO	0.00195617	0.00191633	0.00290783	ML
	$\theta = -0.6$	0.00161950	0.00108685	0.00375883	ML	0.000377845	0.00107108	0.000999113	LS
						7			
21	$\phi = -0.2$	0.00174646	0.00163202	0.00168048	ML	0.00131327	0.00130022	0.001187196	RO
	$\theta = -0.2$	0.00574273	0.00125361	0.0526373	ML	0.00266635	0.00116159	0.000956145	RO
22	$\phi = -0.2$	0.00061483							
	$\theta = 0.8$	1	0.000547546	0.00128544	ML	0.000619709	0.000552222	0.000522657	RO
		8	0.00101969	0.000887049	LS	0.000583410	0.00111969	0.000102363	RO

قبل اقحام الشوارد						بعد اقحام الشوارد			
رقم التشكيلة	طريقة التقدير القيم الافتراضية للمعاملات	LS	ML	Robust	Best	LS	ML	Robust	Best
23	$\phi = -0.2$ $\theta = 0.6$	0.00253578 0.00179237	0.00238846 0.000896017	0.00248506 0.00179682	ML ML	0.00107095 0.00466677	0.00106800 0.000991863	0.000157456 0.000103459	RO RO
24	$\phi = -0.2$ $\theta = 0.2$	0.00534864 0.00008374 1	0.00516744 0.00118440	0.00628463 0.00331487	ML LS	0.00202892 0.00503197	0.00198605 0.000791014	0.00249839 0.000108948	ML RO
25	$\phi = -0.6$ $\theta = -0.8$	0.00194223 0.00224099	0.00190297 0.00101969	0.00198480 0.00928447	ML ML	0.000823676 0.00140632	0.000831023 0.000993557	0.000815367 0.000102104	RO RO
26	$\phi = -0.6$ $\theta = -0.6$	0.00359719 0.00311809	0.00348898 0.00107486	0.01009053 0.300807136	ML ML	0.00103039 0.00171842	0.001025912 0.00108249	0.00012392 0.00103621	RO RO
27	$\phi = -0.6$ $\theta = -0.2$	0.00480416 0.00486864	0.00464566 0.00132751	0.01092360 0.00631003	ML ML	0.000449171 0.00470919	0.000472122 0.00109705	0.000106894 0.00109145	RO RO
28	$\phi = -0.6$ $\theta = 0.8$	0.00141914 0.00067432 1	0.00140168 0.000902693	0.0110455 0.00108514	ML LS	0.00119456 0.00127040	0.00118645 0.00122944	0.00114596 0.000978811	RO RO
29	$\phi = -0.6$ $\theta = 0.6$	0.00151499 0.00042593 1	0.00149353 0.000414401	0.01111102 0.00113350	ML ML	0.00296014 0.00169032	0.00287846 0.004295460	0.001236240 0.000972346	RO RO
30	$\phi = -0.6$ $\theta = 0.2$	0.00256511 0.00617285	0.00249989 0.00108744	0.01096900 0.00141917	ML ML	0.000025188 0.00366989	0.000017528 0.00217112	0.0000086514 0.000909985	RO RO

قبل اقحام الشوارد						بعد اقحام الشوارد			
رقم التشكيلة	طريقة التقدير القيم الافتراضية للمعلمت	LS	ML	Robust	Best	LS	ML	Robust	Best
32	$\phi = -0.8$ $\theta = -0.6$	0.00162042 0.00328502	0.00159457 0.00107710	0.01057300 0.009918800	ML ML	0.00199782 0.00251583	0.00195625 0.000737236	0.00103815 0.000105117	RO RO
33	$\phi = -0.8$ $\theta = -0.2$	0.00253717 0.00576393	0.00238979 0.00135396	0.01067480 0.009271850	ML ML	0.0045748 0.0367147	0.00239675 0.00109408	0.000813360 0.00104672	RO RO
34	$\phi = -0.8$ $\theta = 0.8$	0.00218391 0.0043354	0.00213458 0.000942272	0.01102129 0.00102129	ML ML	0.000910076 0.00056345	0.000913823 0.000985332	0.000141907 0.0000967017	RO RO
35	$\phi = -0.8$ $\theta = 0.6$	0.00221704 0.00130092	0.00208300 0.000960749	0.01108811 0.00102727	ML ML	0.000201500 0.00331784	0.000151438 0.000967617	0.000137908 0.000953546	RO RO
36	$\phi = -0.8$ $\theta = 0.2$	0.00022669 1 0.00869704	0.000258913 0.000715501	0.00108140 0.00109839	LS ML	0.00186147 0.00395514	0.00182557 0.00116320	0.00115563 0.000856588	RO RO

في حالة كون حجم العينة صغيراً ($n=25$) فان طريقة الامكان الاعظم تفوقت بنسبة %86 على بقية الطرائق قبل اقحام الشوارد ولكل قيم المعلمت المختارة. في حين تفوقت الطريقة الحصينة في جميع الحالات عند اقحام الشوارد وبنسبة %96 معتمدين على معيار متوسط الاخطاء النسبية المطلقة.

المصادر

1. الشرجبي، قاسم عبده علي (2003) "التقديرات الحصينة لنماذج ARMA مع تطبيق عملي" إطروحة دكتوراه في الإحصاء، كلية الإدارة و الاقتصاد، الجامعة المستنصرية.
2. الصفاوي، صفاء يونس طليح. (2005). "مقارنة بين المقدرات الاعتيادية والحصينة لنماذج السلاسل الزمنية المختلطة الثانية من الرتب الدنيا"، اطروحة دكتوراه غيرمنشورة، كلية علوم الحاسبات والرياضيات، جامعة الموصل.
3. Fox, A.J., (1973), "Outliers In Time Series", J.R. Statistics Soc. B. 34, 350-363.
4. Harba, M.I.A., (1981), "Signal Processing & Digital Computer Techniques Applied To Surface Electromyography Ph.D. Dissertation University Of Bristol.
5. Kaiser, R. & Maravall, A., (2001), "Notes Of Time Series Analysis ARIMA & Signal Extraction", Bonco De Espane – Servicio Estudios.
6. Lye, Jenny N. & Vance, L. Martin, (1993), "Robust Estimation Non-Normalities & Generalized Exponential Distribution", JASA 88, 261-267.
7. Martin , R.D., (1980), "Robust Estimation of Autoregressive Models", Indirection in Time Series, eds, D.R. Brillinger & G. C. Tiao, Hayward, C.A. : Institute of Mathmatical Statistics.
8. Stochinger, N. & Duter, R., (1987), "Robust Time Series Analysis A survey", Supplement To The J. Kybernetika.
9. Zch, J.E., (1979), "Efficiency Robustness Of Generalized M-Estimates For Auto regression & Their Use In Determining Outlier", Ph.D. Dissertation Univ. Washington, seattle, U.S.A.