Derivation Numerical Method by Using Trapezoidal Method to Evaluate Double Integrations Its Integrands are Continuous But with Singular Derivatives.

اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة شبه المنحرف لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة لكنها معتلة المشتقات الجزئية.

أ.علي حسن محمد حسن عبدالرحيم جبير الياسري
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيس من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة والمعتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل باستعمال قاعدة شبه المنحرف على البعد الداخلي x و البعد الخارجي y وإيجاد حدود التصحيح (صيغة الخطأ) لها، واستعمال طريقة تعجيل رومبرك[2] و[3] لتحسين نتائج التكاملات بالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها، فتبين لنا إن الطريقة عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي أي إن $(h=\bar{h})$ حيث h المسافات بين الإحداثيات على المحور x و $\bar{h}$ المسافات بين الإحداثيات على المحور y والتي أسميناها RTT يمكن الاعتماد عليها في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة والمعتلة المشتقات الجزئية إذ أعطت دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً.

Abstract

The main aim of this research is to derive rule to evaluate double integrations its integrands continuous but have singularity at its derivatives on points not in the end of limits of region of integrals by using Trapezoidal method over interior dimension x and exterior dimension y and to find correction terms(formula of error) for it and using Romberg acceleration [2]and [3] to improve the results of integrations by depending on correction terms that we found with Romberg acceleration when the numbers of subintervals on the x-dimension equal to the subintervals on the y-dimension that is mean $(h=\bar{h})$ whereas h is the distances on x-axis and $\bar{h}$ is the distances on the y-axis.

We named this method by RTT and this method we can depend on it to evaluate double integrations which has singular derivatives on its integrands since it gave high accuracy on the results with little subintervals.

1.المقدمة

يتميز موضوع التحليل العددي في ابتكار طرائق متنوعة لإيجاد حلول تقريبية لمسائل رياضية معينة بأسلوب فعال . تعتمد كفاءة هذه الطرائق على كل من الدقة والسهولة التي يمكن بها أن تنفذ. فالتحليل العددي الحديث هو الواجهة العددية للمجال الواسع للتحليل التطبيقي . وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزم القصور الذاتي للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي ، ومثال علىٰ ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho=2(1-\cos\theta)$ حول المحور القطبي، فضلاً عن أهميته في إيجاد مساحة سطح منحن كإيجاد مساحة قطعة السطح $x^2+y^2+z^2=4$ الواقعة مباشرة فوق منحني القلب $\rho=(1-\cos\theta)$ أو حساب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=36$ الواقعة داخل الاسطوانة $y^2+z^2=6y$ (فرانك آيرز [10]).

في عام 1973 سلّط كل من جار وجاكوبسن [1] الضوء علىٰ حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ أما دافييز ورابينوتز [4] عام 1975 فقد درسا التكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهما كانا يهملان الاعتلال.

عالج محمد [11] في عام 1984 التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو معتلة المشتقة أو المعتلة باستعمال طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك علىٰ البعد الخارجي y وقاعدة كاوس علىٰ البعد الداخلي x وقد أثبتتْ نجاحها علىٰ كثير من التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو معتلة المشتقة أو المعتلة وإنّ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$ (حدود التصحيح للبعد الداخلي x) كانت بالصيغة:

$\bar{E}\left(\bar{h}\right)=\bar{A}_1\bar{h}^2+\bar{A}_2\bar{h}^4+\bar{A}_3\bar{h}^6+...$.

في عام 2002 قدم محمد [2] طريقة مركبة من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطىٰ علىٰ البعدين الداخلي x والخارجي y لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها علىٰ البعدين الداخلي و الخارجي واسماها طريقة رومبرك (رومبرك) إذْ أنّ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$ تعتمد علىٰ سلوك المكامل وقد أعطتْ نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستعملة .

في عام 2005 استعملتْ الطائي [7] قاعدة النقطة الوسطىٰ مع تعجيل رومبرك علىٰ البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون علىٰ البعد الداخلي x مع إهمال الاعتلال علىٰ البعد الداخلي x، وأنّ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$ مشابهه للصيغة التي توصل اليها محمد [11] ، وقد أعطتْ نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستعملة .

في عام 2009 قدّم محمد وآخرون [3] ثلاث طرائق لإيجاد القيم العددية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة هي : $RS(RS)$ و $RM(RS)$ و $RT(RS)$ وقد اعتمدتْ هذه الطرائق علىٰ تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون و قاعدة النقطة الوسطىٰ وقاعدة شبه المنحرف علىٰ البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون مع تعجيل رومبرك علىٰ البعد الداخلي x مع عدم إهمال الاعتلال في كلا البعدين وقد توصلوا إلىٰ أنّ طريقة $RM(RS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية المستعملة.

في عام 2009 قدمتْ ضياء [6] أربع طرائق مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطىٰ وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون هي $RM(RS)$ ، $RM(RM)$ ، $RS(RM)$ و $RS(RS)$ وقد أعطتْ نتائج جيدة من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستعملة. وقد أثبتتْ بانّ الطرائق الأربع أعطتْ الدقة نفسها وبعدد الفترات الجزئية نفسها بالنسبة للتكاملات التي مكاملاتها مستمرة في منطقة التكامل ، أما بالنسبة للتكاملات المعتلة في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل فقد أثبتتْ أفضلية الطريقتين $RM(RS)$ و $RM(RM)$ وقد أثبتتْ من خلال الأمثلة المختارة للتكاملات المعتلة المشتقة أنّ طريقة $RM(RS)$ هي الأفضل وكذلك التكاملات المعتلة الممكن إلغاء الاعتلال فيها، أما بالنسبة للتكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها فقد أثبتتْ أنّ طريقة $RM(RM)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب إلىٰ القيم المضبوطة .

وفي عام 2010 قدمتْ عكار [8] أسلوباً عددياً جديداً لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك علىٰ القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطىٰ علىٰ البعدين x و y وأسمتها RMM وقدمتْ ثلاث حالات مع البرهان لإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح لكل حالة من حالات المكامل وقد حصلتْ علىٰ نتائج جيدة من حيث الدقة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستعملة .

وفي عام 2011عرضتْ موسىٰ [12] ثلاث طرائق عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية لمكاملات مختلفة السلوك بتطبيق تعجيل رومبرك علىٰ القيم الناتجة من استعمال قاعدتي سمبسون والنقطة الوسطىٰ وأسمتها RSS ، RSM و RMS وأثبتتْ أنّ طريقة RSS هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب إلىٰ القيمة المضبوطة من الطريقتين RSM و RMS .

في عام 2012 قدمت الكرمي[9] طرائق عددية جديدة مركبة من قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى وصيغ الخطأ لها(حدود التصحيح) لحساب قيم التكاملات الثنائية ذات المكاملات سواء كانت مستمرة أو مستمرة لكن معتلة المشتقات الجزئية أو المعتلة في نقطة واحدة أو أكثر من نقاط منطقة التكامل من خلال تكاملات مختلفة السلوك باستعمال تعجيل رومبرك وتعجيل ريتشاردسون مع هذه القواعد وأسمتها بـ RTT ، $R\ I$ و RTM عند استعمال تعجيل رومبرك واسمتها بـ TTR ، MTR و TMR عند استعمال تعجيل ريتشاردسون ومن خلال مقارنتها بين الطرائق في أعلاه اتضح أن الطرائق RTT ، RMT و RTM متكافئة فيما بينها من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم إلى القيم المضبوطة للتكاملات وهي أفضل من الطرائق التي قدمتها موسى [12] RSS ، RMS و RSM وكذلك أفضل من الطرائق التي قدمتها ضياء [6]، وأيضا أثبتت أفضليتها على الطريقة التي قدمتها عكار[8] (طريقة RMM) وهي أفضل أيضا من الطرائق (TTR، MTR و TMR التي هي متكافئة فيما بينها أيضا) من حيث الدقة وعدد الفترات الجزئية المستعملة.

في عام 2012 أيضا قدم الشريفي [5] طرائق عددية جديدة مركبة من قاعدتي سمبسون و شبه المنحرف وصيغ الخطأ لها (حدود التصحيح) وتحسين النتائج باستعمال تعجيل رومبرك و تعجيل ريتشاردسون مع هاتين القاعدتين وأسماها بـ RTS و RST عند استعمال تعجيل رومبرك معها وأسماها بـ $\bar{R}TS$ و $\bar{R}ST$ عند استعمال تعجيل ريتشاردسون معها لحساب التكاملات الثنائية سواء كانت ذات مكاملات مستمرة أو مستمرة لكن معتلة المشتقات الجزئية أو المعتلة في نقطة واحدة أو أكثر من نقاط منطقة التكامل من خلال تكاملات مختلفة السلوك واتضح من خلال مقارنته بين الطرائق في أعلاه أنّ الطريقتين RTS و

RST هي الأفضل من الطريقتين $\bar{R}TS$ و $\bar{R}ST$ من حيث الدقة وسرعة اقتراب القيم إلى القيم المضبوطة للتكاملات وعدد الفترات الجزئية المستعملة .
أما في بحثنا هذا فقد قدمنا مبرهنة مع البرهان لاشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة شبه المنحرف على البعدين (الداخلي x والخارجي y) لحساب التكاملات الثنائية المستمرة والمعتلة المشتقات الجزئية تحديداً عند النقطة $(x,y)=(x_0,y_n)$ سوف نقسم فترة التكامل على البعد الداخلي x لعدد من الفترات الجزئية (n) ونقسم فترة التكامل على البعد الخارجي y لعدد من الفترات الجزئية (m) حيث $h=\dfrac{b-a}{n}$ و $\bar{h}=\dfrac{d-c}{m}$ (وسنأخذ $h=\bar{h}$) كي نتمكن من استخدام تعجيل رومبرك وأسمينا الطريقة بـ TT ولتحسين النتائج استخدمنا طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من القاعدة المذكورة وأسميناها طريقة RTT بعد أن اشتققنا الصيغة العامة لحدود التصحيح لهذه الطريقة المركبة .
في بحثنا هذا استعملنا لغة الماتلاب (Matlab Language) في كتابة البرامج الخاصة لحساب التكاملات الثنائية وكذلك البرامج الخاصة برسم المخططات البيانية للدوال.
سوف نورد الآن مبرهنة لحساب قيم التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة التي قدمتها الكرمي[9] لحساب القيمة التقريبية للتكامل الثنائي لتعلق ذلك بعملنا.

<u>مبرهنة: (1)</u> قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين (الداخلي x والخارجي y) (TT)

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة و قابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي:

$$I=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$$

يمكن حسابها من القاعدة الآتية:

$$TT=\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+2\sum_{i=1}^{n-1}\bigg(f(a,y_i)+f(b,y_i)+f(x_i,c)+f(x_i,d)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\bigg)\Bigg]+E_{TT}(h)$$

وان صيغة الخطأ هي

$$E_{TT}(h)=I-TT(h)=A_{TT}h^2+B_{TT}h^4+C_{TT}h^6+\cdots$$

حيث $A_{TT},B_{TT},C_{TT},\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة f فقط ولا تعتمد على h.

<u>2-اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة شبه المنحرف لحساب التكاملات الثنائية المستمرة والمعتلة المشتقات الجزئية في غير أحدى نهايتي منطقة التكامل.</u>

لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط المنطقة $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]$ عدا النقطة $(x,y)=(x_0,y_n)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي:

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)dxdy$$

يمكن حسابها بتطبيق القاعدة (TT) من الصيغة الاتية:

$$TT(h)=\frac{h^2}{4}\Big[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_n)+ 2\sum_{i=1}^{n-1}\Big[f(x_0,y_i)+f(x_n,y_i)+f(x_i,y_0)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1}f(x_i,y_j)\Big]\Big]+E_{TT}(h)$$

وان صيغة الخطأ (حدود التصحيح)هي:

$$E_{TT}(h)=\Big[h^4\left(\tfrac{-1}{12}D_x^2+\tfrac{-1}{12}D_y^2\right)+h^5\left(\tfrac{1}{24}D_x^3+\tfrac{-1}{24}D_x^2D_y+\tfrac{1}{24}D_xD_y^2+\tfrac{-1}{24}D_y^3\right) +h^6\left(\tfrac{-1}{80}D_x^4+\tfrac{1}{48}D_x^3D_y+\tfrac{-5}{144}D_x^2D_y^2+\tfrac{1}{48}D_xD_y^3+\tfrac{-1}{80}D_y^4\right)+\cdots\Big]f(x_1,y_{n-1}) +A_4h^2+B_4h^4+C_4h^6+\cdots$$

حيث $A_4,B_4,C_4,\cdots$ ثوابت تعتمد قيمها على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط.

البرهان:

التكامل الثنائي المعرف بالصيغة

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy=TT\left(h\right)+E_{TT}\left(h\right) \qquad \cdots(1)$$

حيث أن $TT(h)$ القيمة التقريبية للتكامل عددياً بطريقة شبه المنحرف على كلا البعدين x و y وأن $E_{TT}(h)$ سلسلة حدود التصحيح يمكن تجزئته الى اربعة تكاملات هي:

$$I=\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1}f\left(x,y\right)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy+\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n}f\left(x,y\right)dxdy \qquad \cdots(2)$$

في التكاملات أعلاه نلاحظ ان التكامل الاول والثالث والرابع فيها الدالة $f\left(x,y\right)$ مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات باستخدام المبرهنة (1) اما بالنسبة للتكامل الثاني في المنطقة الجزئية $\left[x_0,x_1\right]\times\left[y_{n-1},y_n\right]$ فيه الدالة $f\left(x,y\right)$ مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرّفة عند النقطة $\left(x_0,y_n\right)$ وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a functions of two variables موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $\left(x_0,y_n\right)$ وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

التكامل الأول: الكرمي[9].

$$\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1}f\left(x,y\right)dxdy=\sum_{i=0}^{n-2}\int_{y_i}^{y_{i+1}}\int_{x_0}^{x_1}f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\sum_{i=0}^{n-2}\left[f(x_0,y_i)+f(x_0,y_{i+1})+f(x_1,y_i)+f(x_1,y_{i+1})\right] +A_1h^2+B_1h^4+C_1h^6+\cdots \qquad \cdots\cdots(3)$$

التكامل الثاني:

بالنسبة للتكامل في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]$ نلاحظ ان الدالة معرفة عند النقطة (x_1,y_{n-1}) لذا نستطيع نشر الدالة $f(x,y)$ باستخدام متسلسلة تايلر حول النقطة (x_1,y_{n-1}) وبذلك يكون لدينا

$$f(x,y)=\Big[1+(x-x_1)D_x+(y-y_{n-1})D_y+\frac{(x-x_1)^2}{2!}D_x^2+(x-x_1)(y-y_{n-1})D_xD_y+\frac{(y-y_{n-1})^2}{2!}D_y^2 +\frac{(x-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x-x_1)^2(y-y_{n-1})}{2!}D_x^2D_y+\frac{(x-x_1)(y-y_{n-1})^2}{2!}D_xD_y^2+\frac{(y-y_{n-1})^3}{3!}D_y^3$$

$$+\frac{(x-x_1)^4}{4!}D_x^4+\frac{(x-x_1)^3(y-y_{n-1})}{3!}D_x^3D_y+\frac{(x-x_1)^2(y-y_{n-1})^2}{2!2!}D_x^2D_y^2$$
$$+\frac{(x-x_1)(y-y_{n-1})^3}{3!}D_xD_y^3+\frac{(y-y_{n-1})^4}{4!}D_y^4+\cdots]\,f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(4)$$

وبفرض أن جميع المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ موجودة عند النقطة (x_1,y_{n-1}) (لأن الدالة في هذه النقطة معرفة ولايوجد فيها اعتلال فعليه يمكن استخدام متسلسلة تايلر لها المذكورة في الصيغة (4)).

وبأخذ التكامل الثنائي للمعادلة (4) في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]$ نحصل على:

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\Bigg[\ (x_1-x_0)\,(y_n-y_{n-1})-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})}{2}D_x+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^2}{2}D_y$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})}{6}D_x^2-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})^2}{4}D_x\,D_y+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^3}{6}D_y^2$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^4(y_n-y_{n-1})}{24}D_x^3-\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})^2}{12}D_x^2D_y-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})^3}{12}D_xD_y^2$$
$$+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y^3-\frac{(x_0-x_1)^5(y_n-y_{n-1})}{120}D_x^4-\frac{(x_0-x_1)^4(y_n-y_{n-1})^2}{48}D_x^3\,D_y$$
$$-\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})^3}{36}D_x^2D_y^2-\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})^4}{48}D_xD_y^3+\frac{(x_1-x_0)(y_n-y_{n-1})^5}{120}D_y^4$$
$$+\cdots\ \Bigg]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(5)$$

وبالتعويض عن (y_n-y_{n-1}) و (x_1-x_0) بـ h وكذلك عن (x_0-x_1) بـ $-h$ في (5) نجد ان:

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\Bigg[h^2-\frac{h^3}{2}D_x+\frac{h^3}{2}D_y+\frac{h^4}{6}D_x^2-\frac{h^4}{4}D_xD_y+\frac{h^4}{6}D_y^2-\frac{h^5}{24}D_x^3+\frac{h^5}{12}D_x^2D_y-\frac{h^5}{12}D_xD_y^2$$
$$+\frac{h^5}{24}D_y^3+\frac{h^6}{120}D_x^4-\frac{h^6}{48}D_x^3D_y+\frac{h^6}{36}D_x^2D_y^2-\frac{h^6}{48}D_xD_y^3+\frac{h^6}{120}D_y^4+\cdots\ \Bigg]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(6)$$

ولإيجاد قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين (الداخلي x والخارجي y) في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]$. نعوض عن x بـ x_0 ، وعن y بـ y_n في الصيغة(4) نحصل على:

$$f(x_0,y_n)=\Bigg[1+(x_0-x_1)D_x+(y_n-y_{n-1})D_y+\frac{(x_0-x_1)^2}{2}D_x^2+(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})D_xD_y$$
$$+\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2}D_y^2+\frac{(x_0-x_1)^3}{6}D_x^3+\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})}{2}D_x^2D_y+\frac{(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})^2}{2}D_xD_y^2$$
$$+\frac{(y_n-y_{n-1})^3}{6}D_y^3+\frac{(x_0-x_1)^4}{24}D_x^4+\frac{(x_0-x_1)^3(y_n-y_{n-1})}{6}D_x^3D_y+\frac{(x_0-x_1)^2(y_n-y_{n-1})^2}{4}D_x^2D_y^2$$
$$+\frac{(x_0-x_1)(y_n-y_{n-1})^3}{6}D_xD_y^3+\frac{(y_n-y_{n-1})^4}{24}D_y^4+\cdots\ \Bigg]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(7)$$

وايضا نعوض عن x بـ x_0 ، وعن y بـ y_{n-1} في الصيغة (4) نجد ان:

$$f(x_0,y_{n-1})=\left[1+(x_0-x_1)D_x+\frac{(x_0-x_1)^2}{2!}D_x^2+\frac{(x_0-x_1)^3}{3!}D_x^3+\frac{(x_0-x_1)^4}{4!}D_x^4+\cdots\right]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(8)$$

وبالتعويض عن x بـx_1 وعن y بـy_n في الصيغة (4) نستنتج ان :

$$f(x_1,y_n)=\left[1+(y_n-y_{n-1})D_y+\frac{(y_n-y_{n-1})^2}{2!}D_y^2+\frac{(y_n-y_{n-1})^3}{3!}D_y^3+\frac{(y_n-y_{n-1})^4}{4!}D_y^4+\cdots\right]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(9)$$

وبالتعويض عن (x_0-x_1) بـ$-h$ وعن (y_n-y_{n-1}) بـh في المعادلات(7)،(8)،(9) نحصل على:

$$(i)\quad f(x_0,y_n)=\Big[1-hD_x+hD_y+\frac{h^2}{2}D_x^2-h^2D_xD_y+\frac{h^2}{2}D_y^2-\frac{h^3}{6}D_x^3+\frac{h^3}{2}D_x^2D_y-\frac{h^3}{2}D_xD_y^2+\frac{h^3}{6}D_y^3$$
$$+\frac{h^4}{24}D_x^4-\frac{h^4}{6}D_x^3D_y+\frac{h^4}{4}D_x^2D_y^2-\frac{h^4}{6}D_xD_y^3+\frac{h^4}{24}D_y^4+\cdots\Big]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(10)$$

$$(ii)\quad f(x_0,y_{n-1})=\left[1-hD_x+\frac{h^2}{2}D_x^2-\frac{h^3}{6}D_x^3+\frac{h^4}{24}D_x^4+\cdots\right]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(11)$$

$$(iii)\quad f(x_1,y_n)=\left[1+hD_y+\frac{h^2}{2}D_y^2+\frac{h^3}{6}D_y^3+\frac{h^4}{24}D_y^4+\cdots\right]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(12)$$

بضرب المعادلات (10)،(11)،(12) بـ $-\frac{h^2}{4}$ وجمعها مع المعادلة (6) نحصل على:

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\left[f(x_0,y_{n-1})+f(x_0,y_n)+f(x_1,y_{n-1})+f(x_1,y_n)\right]+$$
$$\Big[h^4\left(\tfrac{-1}{12}D_x^2+\tfrac{-1}{12}D_y^2\right)+h^5\left(\tfrac{1}{24}D_x^3+\tfrac{-1}{24}D_x^2D_y+\tfrac{1}{24}D_xD_y^2+\tfrac{-1}{24}D_y^3\right)+$$
$$h^6\left(\tfrac{-1}{80}D_x^4+\tfrac{1}{48}D_x^3D_y+\tfrac{-5}{144}D_x^2D_y^2+\tfrac{1}{48}D_xD_y^3+\tfrac{-1}{80}D_y^4\right)+\cdots\Big]f(x_1,y_{n-1}) \qquad \cdots(13)$$

المعادلة (13) تمثل قيمة التكامل بقاعدة شبه المنحرف على البعدين x و y في المنطقة $[x_0,x_1]\times[y_{n-1},y_n]$ وبضمنها صيغة الخطأ حول النقطة (x_1,y_{n-1}) بسبب الاعتلال .

التكامل الثالث: الكرمي[9].

$$\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{4}\Bigg[\ f(x_1,y_0)+f(x_1,y_{n-1})+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_{n-1})+$$
$$2\sum_{j=1}^{n-2} f(x_1,y_j)+f(x_n,y_j)+$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_i,y_0)+f(x_i,y_{n-1})+2\sum_{j=1}^{n-2}f(x_i,y_j)\right)\Bigg]+$$
$$A_2h^2+B_2h^4+C_2h^6+\cdots \qquad \cdots\cdots(14)$$

التكامل الرابع: الكرمي[9].

$$\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy=\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{i=1}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x,y)dxdy$$
$$=\frac{h^2}{4}\sum_{i=1}^{n-1}\left[f(x_i,y_{n-1})+f(x_i,y_n)+f(x_{i+1},y_{n-1})+f(x_{i+1},y_n)\right]$$
$$+A_3h^2+B_3h^4+C_3h^6+ \qquad \cdots(15)$$

حيث $A_i, B_i, C_i, \cdots$ ، $(i=1,2,3)$ ثوابت تعتمد على قيم المشتقات الجزئية بالنسبة للمتغيرين x ،y وبجمع المعادلات (3)،(13)،(14)،(15) نحصل على:

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{4}\Bigg[& f(x_0,y_0)+f(x_0,y_n)+f(x_n,y_0)+f(x_n,y_n)+\\ & 2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_0,y_i)+f(x_n,y_i)+f(x_i,y_0)+f(x_i,y_n)+2\sum_{j=1}^{n-1} f(x_i,y_j)\right)\Bigg]\\ & +\Big[h^4\left(\tfrac{-1}{12}D_x^2+\tfrac{-1}{12}D_y^2\right)+h^5\left(\tfrac{1}{24}D_x^3+\tfrac{-1}{24}D_x^2D_y+\tfrac{1}{24}D_xD_y^2+\tfrac{-1}{24}D_y^3\right)\\ & +h^6\left(\tfrac{-1}{80}D_x^4+\tfrac{1}{48}D_x^3D_y+\tfrac{-5}{144}D_x^2D_y^2+\tfrac{1}{48}D_xD_y^3+\tfrac{-1}{80}D_y^4\right)+\cdots\Big] f(x_1,y_{n-1})\\ & +A_4h^2+B_4h^4+C_4h^6+\cdots \end{aligned} \qquad \cdots(16)$$

حيث $A_4, B_4, C_4, \cdots$ ثوابت تعتمد على قيمة المشتقات الجزئية للدالة f بالنسبة للمتغيرين x ، y . وان $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ، $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ ، $D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ، $D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}, ...$ وبذلك تم البرهان.

الصيغة (16) تمثل قيمة التكامل(1) باستخدام قاعدة شبه المنحرف على كلا البعدين الداخلي x والخارجي y متضمنة حدود التصحيح (مقدار الخطأ) بسبب الاعتلال في النقطة (x_0, y_n) حول النقطة (x_1, y_{n-1}) .

3- **الأمثلة:**

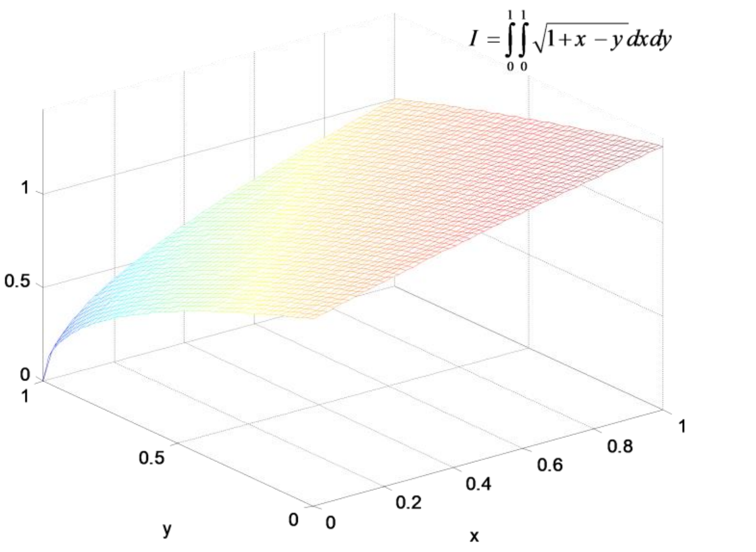
1- $I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,dxdy$ إذ أن قيمة التكامل التحليلية هي 0.97516113319790 مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية.

2- $I=\int_0^1\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+y^2}\;dxdy$ إذ أن قيمة التكامل التحليلية 0.43931732073627 مقربة لأربع عشرة مرتبة عشرية.

3- $I=\int_{-1}^0\int_0^1 \sqrt{x^4+y^4}\;dxdy$ غير معروف القيمة التحليلية.

4- النتائج

الشكل رقم (1)



1- إن مكامل التكامل $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy$ والمبين في الشكل(1) مستمر لكن معتل المشتقات الجزئية عندما $(x,y)=(0,1)$ وإن قيمته التحليلية 0.97516113319790 مقربة الى أربعة عشر مرتبة عشرية. وبتطبيق القاعدة TT كانت حدود التصحيح(...,2,2.5,4,6,8) عند تطبيق القاعدة(16) وإن القيمة بطريقة TT صحيحة لأربعة مراتب عشرية عندما n=64 وبعد استعمال تعجيل رومبرك على النتائج المحصل عليها وباعتماد حدود التصحيح التي حصلنا عليها حصلنا على قيمة صحيحة لثلاثة عشر مرتبة عشرية صحيحة عندما n=64 بفارق تسع وحدات في المرتبة الرابعة عشر، النتائج مدونة في الجدول رقم(1).

الوقت المستغرق في حساب (33.752885 seconds)

n=m	TT	K=2	K=2.5	K=4	K=6	K=8	K=10
1	0.85355339059327						
2	0.94635126079285	0.97728388419271					
4	0.96826940805530	0.97557545714279	0.97520859424384				
8	0.97349527809559	0.97523723477568	0.97516460584014	0.97516167327989			
16	0.97475490007878	0.97517477407317	0.97516136143469	0.97516114514099	0.97516113675784		
32	0.97506139238924	0.97516355649273	0.97516114766053	0.97516113340892	0.97516113322270	0.97516113320884	
64	0.97513651984239	0.97516156232677	0.97516113410508	0.97516113320139	0.97516113319809	0.97516113319800	0.97516113319799
الجدول(1) يبين قيمة التكامل $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy$ بطريقة RTT							0.97516113319790

توضيح دالة المكامل هنا معتلة المشتقات الجزئية في النقطة (0,1)

$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy$$

$$let\ f(x,y)=\sqrt{1+x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{1+x-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(0,1)\ is\ undefined$$

ولايجاد قيمة التكامل اعلاه تحليلياً

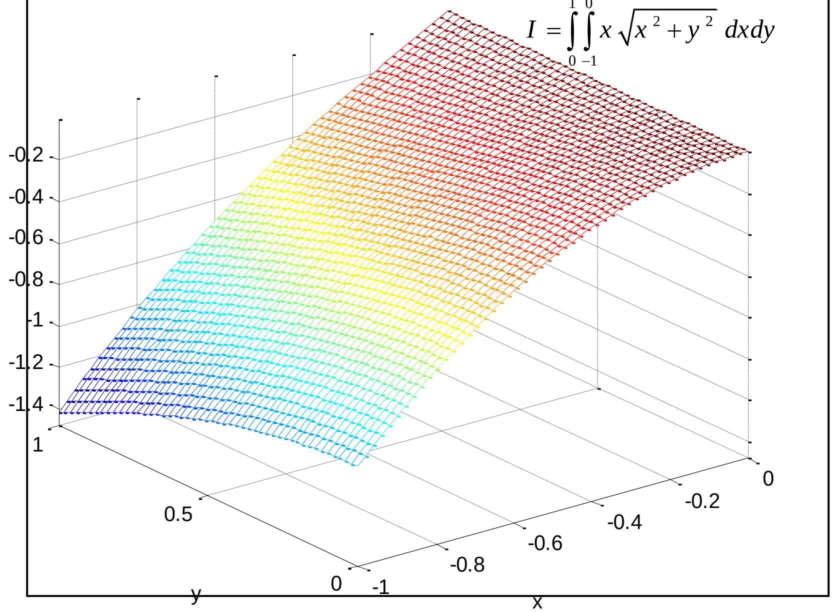
$$I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy$$

$$(i)\ \int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dx=\frac{2}{3}[1+x-y]^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}\left[(2-y)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$(ii)\int_0^1\frac{2}{3}\left[(2-y)^{\frac{3}{2}}-(1-y)^{\frac{3}{2}}\right]dy=\frac{4}{15}\left[(1-y)^{\frac{5}{2}}-(1-y)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1=0.975161133197907$$

الشكل رقم (2)

$$I=\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

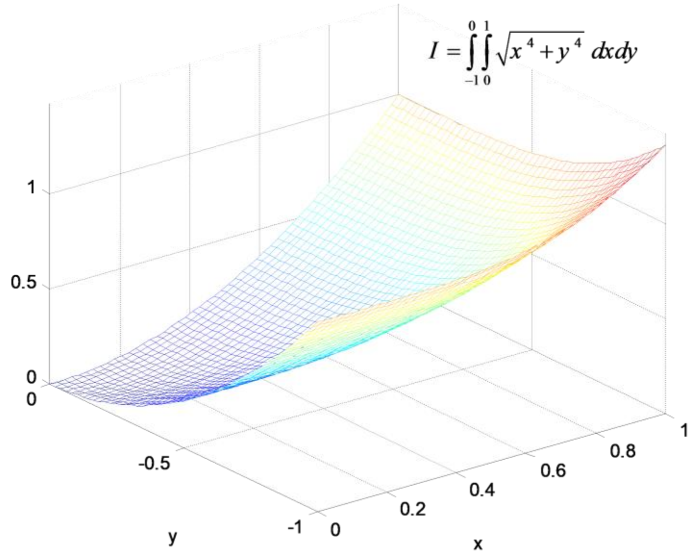


2- إن مكامل التكامل $I=\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ معرف لكل $(x,y)\in[-1,0]\times[0,1]$ والمبين في الشكل(2) لكن معتل المشتقات الجزئية عندما $(x,y)=(0,0)$ وإن قيمته التحليلية 0.43931732073627 مقربة الى أربعة عشر مرتبة عشرية. وبتطبيق القاعدة TT تكون القيمة صحيحة لأربعة مراتب عشرية عندما n=128 وبعد استعمال تعجيل رومبرك على النتائج المحصل عليها بطريقة RTT وباعتماد حدود التصحيح المستخرجة من القاعدة (16) وهي(2,4,4,6,8,10,12,...) حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة الحقيقية مقربة لأربعة عشر مرتبة عشرية عندما n=128 وكما مدونة في جدول(2).

الوقت المستغرق فى حساب النتائج(32.173438seconds)

n=m	TT	2	4	4	6	8	10	12
1	0.60355339059327							
2	0.48015806818724	0.43902629405190						
4	0.44947299610255	0.43924463874098	0.43925919505358					
8	0.44185059576460	0.43930979565195	0.43931413944602	0.43931780240551				
16	0.43995015279412	0.43931667180395	0.43931713021409	0.43931732959863	0.43931732209376			
32	0.43947549004213	0.43931726912481	0.43931730894620	0.43931732086167	0.43931732072299	0.43931732071761		
64	0.43935686012659	0.43931731682141	0.43931732000118	0.43931732073818	0.43931732073622	0.43931732073627	0.43931732073629	
128	0.43932720536805	0.43931732044854	0.43931732069035	0.43931732073629	0.43931732073626	0.43931732073627	0.43931732073627	0.43931732073627
الجدول (2) يبين قيمة التكامل $I=\int_{0}^{1}\int_{-1}^{0}x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ بطريقة RTT								0.43931732073627

الشكل رقم (3)



3- إن مكامل التكامل $I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \sqrt{x^4 + y^4}\, dxdy$ معرف لكل $(x,y) \in [0,1]\times[-1,0]$ والمبين في الشكل(3) لكن معتل المشتقات الجزئية عندما $(x,y) = (0,0)$ وإن قيمته التحليلية غير معروفة. وبتطبيق القاعدة TT حصلنا على حدود التصحيح (2,4,6,8,....) بالرغم من وجود الإعتلال في المشتقة في النقطة (0,0) وكانت قيمة التكامل في الجدول(3) ثابتة أفقياً(لأربعة عشر مرتبة عشرية) ولخمسة أعمدة عندما (k=6,8,10,12,14) باستخدام الطريقة RTT عندما n=128 أي أنها صحيحة على الأقل لأربعة عشرة مرتبة عشرية هذا يعني أن التقارب هو بشكل صحيح نحو القيمة التحليلية حتى وإن كانت قيمة التكامل غير معروفة لذا يمكن القول بأن قيمة التكامل هي 0.54471470661241 مقربة لأربعة عشر مراتب عشرية.

الوقت المستغرق في حساب النتائج (43.501979 seconds)

n=m	TT	k=2	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12	k=14
1	0.85355339059327							
2	0.62197079689774	0.54477659899923						
4	0.56403024628459	0.54471672941354	0.54471273810783					
8	0.54954318484236	0.54471416436161	0.54471399335815	0.54471401328276				
16	0.54592179665878	0.54471466726425	0.54471470079110	0.54471471202019	0.54471471476034			
32	0.54501647721951	0.54471470407308	0.54471470652700	0.54471470661805	0.54471470659686	0.54471470658889		
64	0.54479014914423	0.54471470645247	0.54471470661110	0.54471470661243	0.54471470661241	0.54471470661243	0.54471470661243	
128	0.54473356723785	0.54471470660239	0.54471470661239	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241

الجدول (2) يبين قيمة التكامل $I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \sqrt{x^4 + y^4}\, dxdy$ بطريقةRTT

المصادر

[1] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , theTechnical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973 .
[2] Mohammed A. H. ,"Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7, No.3 , pp. 21-28 , 2002 .
[3] Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration ", an article accepted by scientific conference of Morocco ,2009
[4] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " ,BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .
[5] الشريفي، فؤاد حمزة عبد، "اشتقاق طرائق مركبة من قاعدتي شبه المنحرف وسمبسون لحساب التكاملات الثنائية عددياً وصيغ الخطأ لها وتحسين النتائج باستعمال طرائق تعجيلية"، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة2012.
[6] ضياء ، عذراء محمد ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة ، 2009 .
[7] الطائي، علية شاني،"بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة"، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة،2005.
[8] عكار ، بتول حاتم ، " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " ، رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010
[9] الكرمي، ندى أحمد محمد طه، "اشتقاق طرائق مركبة من قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى لحساب التكاملات الثنائية عددياً وصيغ الخطأ لها وتحسين النتائج باستعمال طرائق تعجيلية"، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة2012.
[10] فرانك آيرز ، " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجروهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988 .
[11] محمد ، علي حسن ، " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة البصرة ، 1984.
[12] موسى، صفاء مهدي ، "تحسين نتائج حساب التكاملات الثنائية عددياً من خلال استخدام طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون"، رسالة ماجستير مقدمة الى جامعة الكوفة2011.

البرامج المستخدمة

البرنامج (1)

هو ملف لكتابة الدالة $f\left(x,y\right)$ وفيه

```
function F= f(x,y);
F= log(x+y);
```

البرنامج (2)

هو ملف لرسم مخطط الدالة $f\left(x,y\right)$ في المنطقة $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$

```
clc
clear
syms x y
ezmesh( log(x+y),[a,b,c,d],70)
```

البرنامج (2)

لايجاد قيمة التكامل الثنائي للدالة $w\left(x,y\right)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]$ بتطبيق الطريقة RTT .

```
tic
clear all
clc
a=-1;b=0;c=0;d=1;eps=10^(-14);
%find double integral of function g(x,y)on the [a,b]*[c,d]
%using RTT
D(1)=2;D(2)=4;D(3)=6;D(4)=8;D(5)=10;D(6)=12;D(7)=14;D(8)=16;D(9)=18;
n=1;h=(b-a)/n;h1=(d-c)/n;
s(1,1)=1;
s(1,2)=h*h1*(g(a,c)+g(a,d)+g(b,c)+g(b,d))/4;
for i=2:10
n=2^(i-1);s(i,2)=0;
s(i,2)=s(i,2)+g(a,c)+g(a,d)+g(b,c)+g(b,d);
h1=(d-c)/n;
for j=1:n-1
 s(i,2)=s(i,2)+2*g(a,c+j*h1)+2*g(b,c+j*h1);
end
h=(b-a)/n;
for k=1:n-1
s(i,2)=s(i,2)+2*(g(a+k*h,c)+g(a+k*h,d));
for r=1:n-1
 s(i,2)=s(i,2)+4*g(a+k*h,c+r*h1);
 s(i,1)=n;
end
end
s(i,2)=s(i,2)*h*h1/4;
 for l=3:i+1
  clc
 s(i,l)=(s(i,l-1)*2^D(l-2)-s(i-1,l-1))/((2^D(l-2))-1);
 end
  if abs(s(i,i+1)-s(i,i))<=eps;
  sprintf('%5.0f%2.13f',n,s(i,i+1))
   break
   else
   end
  end
xlswrite('E:/(TT-ex12).xls',s,1,'A2')
toc
```