



AL- Rafidain
University College

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم

Available online at: <https://www.jruc.s.edu.iq>

JRUCS

Journal of AL-Rafidain
University College for
Sciences

بناء توزيع احتمالي جديد (Gompertz-Lindely) لتقدير دالة المعولية ودالة المخاطرة

أ.م.د. ريسان عبد الامام زعلان	م.م. منتظر جمعة مهدي
ressan.zalan@uobasrah.edu.iq	montather.jumaa@uobasrah.edu.iq
قسم الإحصاء- كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة البصرة، البصرة، العراق.	
م. محمد موسى محسن	
mohammed.mohsin@uobasrah.edu.iq	
قسم الإحصاء- كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة البصرة، البصرة، العراق.	

المستخلص

تم في هذا البحث بناء توزيع احتمالي مرن جديد هو (جومبرتز- ليندلي (G-L) (Gompertz-Lindely) (D) وهو توزيع ناتج عن تركيب التوزيعين المستمرين جومبرتز و ليندلي وذلك باعتبار (معلمة القياس) لتوزيع جومبرتز متغير عشوائي يتبع توزيع ليندلي ليتم الحصول على التوزيع الاحتمالي الجديد (جومبرتز- ليندلي). وقد تم اشتقاق الخصائص الإحصائية والهيكلية للتوزيع والاشكال التي تأخذها منحنيات دالة كثافته الاحتمالية و دالة المخاطرة وكذلك تم تقدير معلمته باستعمال طريقة الإمكان الأعظم. وليبان كفاءة التوزيع في تمثيل عينة من البيانات فقد تم تطبيقه على عينة من البيانات الحقيقية متمثلة بقترات المعولية على قيد الحياة لحين الفشل وقد تبين ان توزيع (جومبرتز- ليندلي) يلائم هذه البيانات بشكل أفضل مقارنة بالعديد من التوزيعات الكلاسيكية.

معلومات البحث

تواريخ البحث

تاريخ تقديم البحث: 2022/12/31
تاريخ قبول البحث: 2023/3/3
تاريخ رفع البحث على الموقع: 2023/12/31

الكلمات المفتاحية

توزيع جومبرتز، توزيع ليندلي، التوزيع المركب، التوزيعات الاحتمالية، دالة المعولية، دالة المخاطرة.

للمراسلة:

أ.م.د. ريسان عبد الامام زعلان

ressan.zalan@uobasrah.edu.iq

<https://doi.org/10.55562/jruc.s.v54i1.596>

1. المقدمة

إن التوزيعات الإحصائية مهمة ومفيدة جدا في تمثيل ووصف بيانات الظواهر الحقيقية والتنبؤ بها، وقد استعملت التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية على نطاق واسع ولعدة عقود في هذا المجال، بالرغم من وجود عدد كبير من التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية وتطورها واتساع تطبيقاتها في مجالات الحياة المختلفة إلا أنها غير كافية أو قد تكون ضعيفة لتفسير السلوك الحقيقي للبيانات حيث تواجه التوزيع الكلاسيكي مشكلات عديدة من ناحية نمذجتها أو مشكلة سلوك البيانات المعقدة، لذلك انصب اهتمام الباحثون في الآونة الاخيرة على تطوير التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية والانتقال بها الى التوزيعات المركبة أو المحولة أو المعممة أو الموزونة... الخ، من اجل التوصل الى أفضل تمثيل للبيانات الذي يعتبر أهم مرحلة بالنسبة للتحليل الإحصائي وكذلك تقليل نسبة الأخطاء وقد نال هذا النوع من البحوث اهتماما كبيرا ومميزا وذلك لأهمية التوزيعات الاحتمالية و تطبيقاتها في مجالات الحياة الهندسية و الطبية والصناعية... الخ.

ان التوزيع الناتج من تركيب توزيعين أو أكثر يسمى بالتوزيع المركب وعادة ما يشتمل التوزيع المركب على مجموعة من الخصائص لم تكن تتوفر في التوزيعات الكلاسيكية الداخلة في عملية التركيب [1]. كان الاهتمام واضحا ومتزايدا من أجل تطوير عائلات جديدة من التوزيعات المركبة إذ يتم الحصول على التوزيعات المعممة أو الموسعة والموزونة عن طريق التحويلات أو إضافة معلمة أو أكثر إلى التوزيعات الكلاسيكية المعروفة من أجل الحصول على مرونة أكثر للتطبيق العملي لمعرفة السلوك الحقيقي للبيانات وخاصة في توزيعات المعولية على قيد الحياة. وهناك عدة طرائق لتركيب التوزيعات اقترحها الباحثون نذكر منها تعميم مارشال اولكن [2] (M-O) وتعميم توبليون [3] (TL-G) وتقنية تحويل المحول (T-X) [4] وغيرها. وهنا تم استخدام طريقة تركيب خليط المعلمة والتي تعتبر من طرائق التركيب الكلاسيكية التي تم استخدامها في تركيب التوزيعات حيث سيتم تركيب توزيعين مستمرين هما (توزيع جومبرتز) (GD) و (توزيع ليندلي) (LD) باستعمال هذه الطريقة.

2. التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية

2.1. توزيع جومبيرتز (Gompertz Distribution)

يعتبر توزيع جومبيرتز (GD) احد التوزيعات الاحتمالية الكلاسيكية التي تمثل دالة المعولية على قيد الحياة بناء على قوانين معدل الوفيات [5]. حيث يلعب هذا التوزيع دورا مهما في نمذجة الوفيات البشرية ووضع الجداول الاكتوارية، ان أول من قدم هذا التوزيع هو العالم Benjamin Gompertz عام (1825) وقد تم استخدامه كنموذج نمو في الدراسات الديموغرافية ويعتبر توزيع جومبيرتز تعميما للتوزيع الاسي وله العديد من التطبيقات في الحياة خصوصا في الدراسات الطبية والاكتوارية. وان اهم ما يميز هذا التوزيع هو امتلاكه لدالة مخاطرة متزايدة بشكل اسّي [6] ، وان دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع جومبيرتز تكتب بالشكل التالي [7]:

$$f_G(x; \lambda, \mu) = \lambda \mu e^{(1-e^{x\mu})\lambda+x\mu} \quad , x \geq 0 \quad , \lambda, \mu > 0 \quad (1)$$

حيث ان λ تمثل معلمة القياس وان μ تمثل معلمة الشكل للتوزيع. وان دالة التوزيع التراكمية (cdf) تكون بالشكل:

$$F_G(x; \lambda, \mu) = 1 - e^{(1-e^{x\mu})\lambda} \quad (2)$$

وان دالتي المعولية والمخاطرة تكونان بالشكل التالي:

$$R_G(x; \lambda, \mu) = 1 - F(x; \lambda, \mu) \quad (3)$$

$$= e^{(1-e^{x\mu})\lambda}$$

$$h_G(x; \lambda, \mu) = \frac{f_G(x; \lambda, \mu)}{S_G(x; \lambda, \mu)} = \frac{\lambda \mu e^{(1-e^{x\mu})\lambda+x\mu}}{e^{(1-e^{x\mu})\lambda}} \quad (4)$$

$$= \lambda \mu e^{x\mu}$$

2.2. توزيع ليندلي (Lindley Distribution)

يعد توزيع ليندلي احد التوزيعات الاحتمالية المستمرة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين احدهما يتبع توزيع كما (Gamma Distribution) بمعلمة قياس (θ) ومعلمة شكل (2) والآخر يتبع التوزيع الاسي بمعلمة قياس (θ) [8]. ان دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي تكتب وفق الصيغة الآتية:

$$f_L(x; \theta) = \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+x)e^{-\theta x} \quad x > 0, \theta > 0 \quad (5)$$

حيث ان θ تمثل معلمة القياس للتوزيع وان دالة التوزيع التراكمية (cdf) تكون بالشكل:

$$F_L(x; \theta) = 1 - \frac{e^{-x\theta}(1+\theta+x\theta)}{1+\theta} \quad (6)$$

وان دالتي المعولية والمخاطرة تكونان بالشكل التالي:

$$R_L(x; \theta) = \frac{e^{-x\theta}(1+\theta+x\theta)}{1+\theta} \quad (7)$$

$$h_L(x; \theta) = \frac{(1+x)\theta^2}{1+\theta+x\theta} \quad (8)$$

3. توزيع جومبيرتز ليندلي (Gompertz-Lindley Distribution)

هنا نقدم توزيعا مركبا من توزيع جومبيرتز مع توزيع ليندلي من خلال معالجة معلمة القياس λ في توزيع جومبيرتز باعتبارها كمتغير لتوزيع ليندلي $\lambda \sim \text{Lindley}(\theta)$ حيث تكون دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي وللمتغير العشوائي λ بالشكل: ليتم الحصول على توزيع احتمالي جديد اسمناه توزيع جومبيرتز ليندلي (G-LD) وكما يلي:

$$f_{GL}(x; \mu, \theta) = \int_0^{\infty} f_G(x; \alpha, \beta) * f_L(\lambda; \theta) d\lambda \quad (9)$$

وبتعويض المعادلات (1) و (5) في المعادلة (9) ينتج:

$$\begin{aligned}
 f_{GL}(x; \mu, \theta) &= \int_0^{\infty} \lambda \mu e^{(1-e^{x\mu})\lambda+x\mu} * \frac{\theta^2}{1+\theta} (1+\lambda)e^{-\theta\lambda} d\lambda \\
 f_{GL}(x; \mu, \theta) &= \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{1+\theta} \int_0^{\infty} \lambda e^{(1-e^{x\mu})\lambda} * (1+\lambda)e^{-\theta\lambda} d\lambda \\
 f_{GL}(x; \mu, \theta) &= \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{1+\theta} \int_0^{\infty} [\lambda e^{(1-e^{x\mu})\lambda-\theta\lambda} + \lambda^2 e^{(1-e^{x\mu})\lambda-\theta\lambda}] d\lambda \\
 f_{GL}(x; \mu, \theta) &= \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{1+\theta} \left[\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda(\theta+e^{x\mu}-1)} d\lambda + \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda[\theta-(1-e^{x\mu})]} d\lambda \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

بفرض أن: $z = \lambda(\theta + e^{x\mu} - 1)$ فان $\lambda = \frac{z}{(\theta + e^{x\mu} - 1)}$ وبذلك فان $d\lambda = \frac{1}{(\theta + e^{x\mu} - 1)} dz$ وبالتعويض في المعادلة رقم (10) نحصل على:

$$f_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{1+\theta} \left[\int_0^{\infty} \frac{z}{(\theta + e^{x\mu} - 1)^2} e^{-z} dz + \int_0^{\infty} \frac{z^2}{(\theta + e^{x\mu} - 1)^3} e^{-z} dz \right]$$

$$f_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{(1+\theta)(\theta + e^{x\mu} - 1)^2} \left[\int_0^{\infty} z e^{-z} dz + \frac{1}{(\theta + e^{x\mu} - 1)} \int_0^{\infty} z^2 e^{-z} dz \right]$$

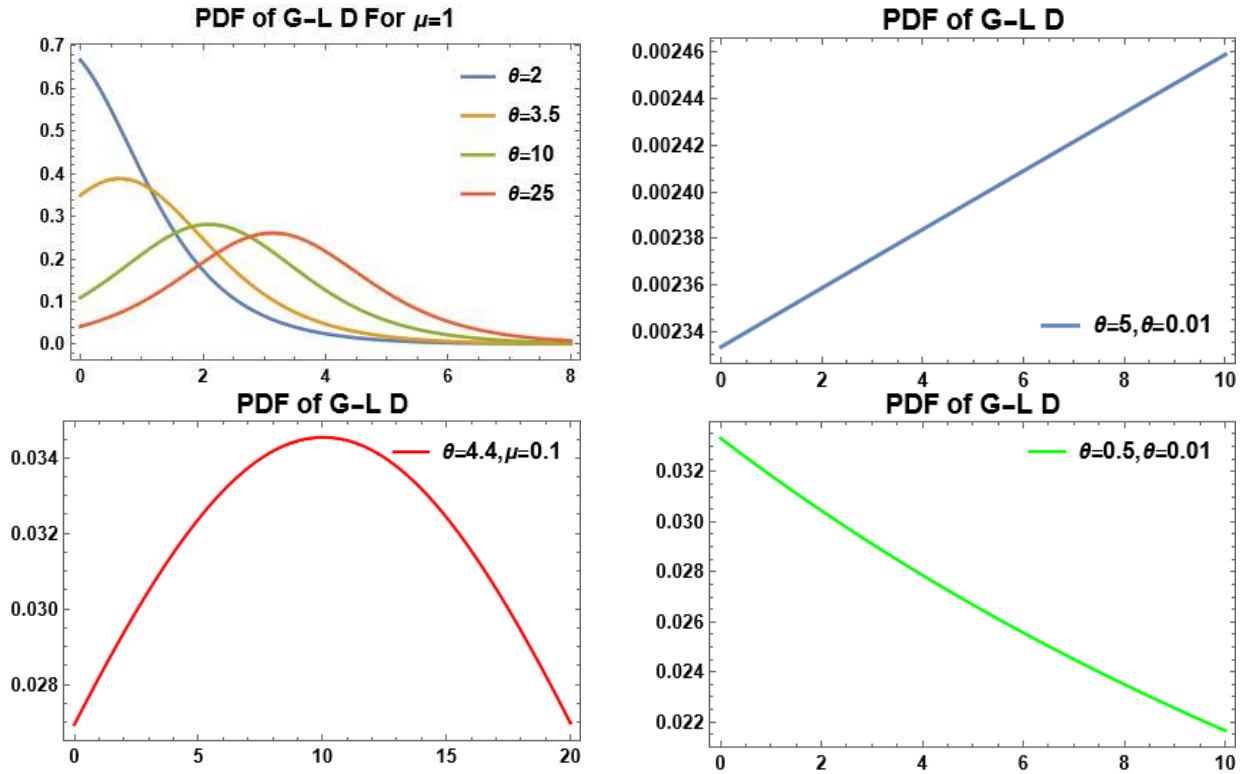
وباستعمال خاصية تكامل كما فان:

$$f_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{(1+\theta)(\theta + e^{x\mu} - 1)^2} \left[1 + \frac{2}{(\theta + e^{x\mu} - 1)} \right]$$

$$f_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu\theta^2 e^{x\mu}}{(1+\theta)(\theta + e^{x\mu} - 1)^2} \left[\frac{(\theta + e^{x\mu} - 1 + 2)}{(\theta + e^{x\mu} - 1)} \right]$$

$$f_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu\theta^2(1 + e^{x\mu} + \theta)e^{x\mu}}{(1+\theta)(-1 + e^{x\mu} + \theta)^3} \quad (11)$$

والمعادلة (11) تمثل دالة الكثافة الاحتمالية (pdf) لتوزيع G-L D. والاشكال التالية توضح دوال توزيع جومبيرتز ليندلي (G-LD) ولقيم مختلفة للمعلمات (μ, θ)



شكل (1): دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع G-L D

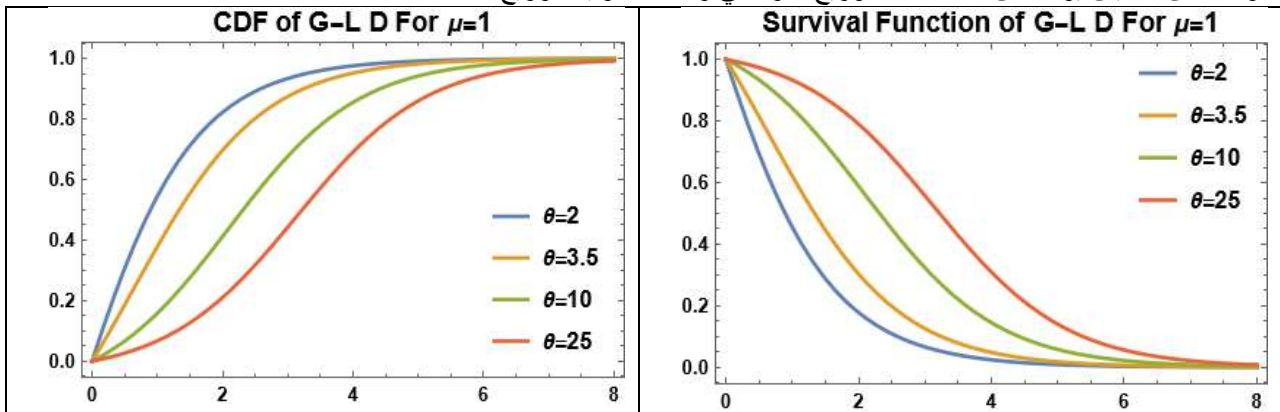
يلاحظ من الشكل (1) ان دالة الكثافة الاحتمالية تأخذ اشكالا متعددة منها الاسي والمتمائل والالتواء نحو اليمين (التواء موجب).

وان دالة التوزيع التراكمية ودالة المعولية تكتبان بالشكل التالي على التوالي:

$$F_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{(e^{x\mu} - 1)(\theta + \theta^2 + e^{x\mu}(1 + \theta) - 1)}{(1 + \theta)(e^{x\mu} + \theta - 1)^2} \quad (12)$$

$$R_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\theta^2(e^{x\mu} + \theta)}{(1 + \theta)(e^{x\mu} + \theta - 1)^2} \quad (13)$$

والشكلان التاليان يوضحان شكل دالة التوزيع التراكمي ودالة المعولية لتوزيع G-L-D

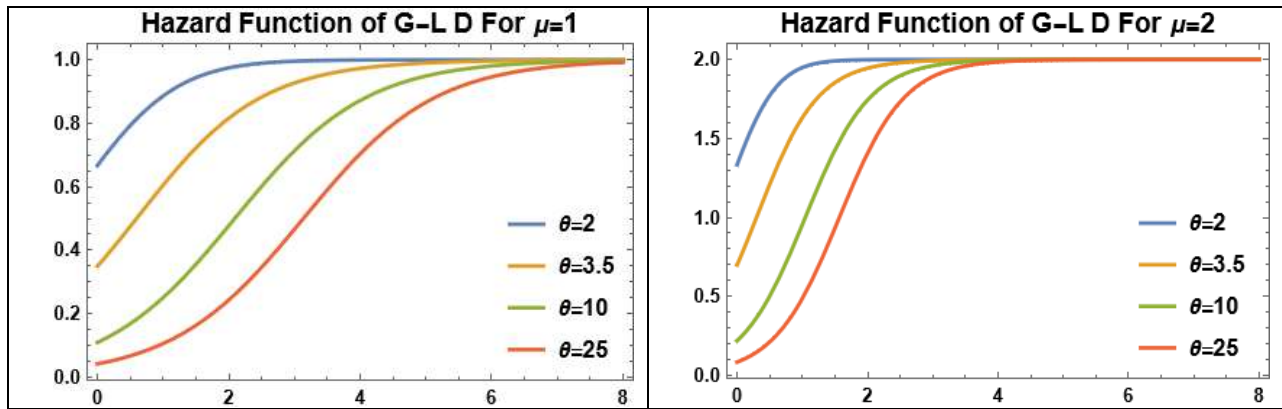


شكل (2) وشكل (3): دالة التوزيع التراكمية ودالة المعولية لتوزيع G-L D

اما دالة المخاطرة للتوزيع فتكتب بالشكل:

$$h_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu e^{x\mu}(1 + e^{x\mu} + \theta)}{(e^{x\mu} + \theta - 1)(e^{x\mu} + \theta)} \quad (14)$$

والشكلان التاليان يوضحان شكل دالة التوزيع التراكمي ودالة المعولية لتوزيع G-L-D



شكل (4): دالة المخاطرة لتوزيع G-L D

كما نلاحظ من الاشكال (4) ان دالة المخاطرة لتوزيع جومبرتز ليندلي بانها متزايدة مع الزمن ولكنها محددة بقيمة المعلمة (μ) ، حيث ان دالة المخاطرة تبدأ بالتزايد لحين الوصول الى قيمة المعلمة (μ) ثم تستقر وتكون ثابتة مع الزمن وهذا أهم ما يميز التوزيع عن توزيع جومبرتز الذي تكون فيه دالة المخاطرة متزايدة مع الزمن.

4. خصائص توزيع جومبرتز ليندلي (G-L D)

4.1. الدالة الكمية

ان الدالة الكمية لتوزيع G-L D تعرف بالشكل التالي:

$$P(X \leq x) = F_{GL}(x; \mu, \theta) = q$$

وبتعويض الدالة التراكمية لتوزيع G-L D :

$$\frac{(e^{x\mu} - 1)(\theta + \theta^2 + e^{x\mu}(1 + \theta) - 1)}{(1 + \theta)(e^{x\mu} + \theta - 1)^2} = q \quad (15)$$

وبحل المعادلة (15) بالنسبة للمتغير العشوائي x ينتج:

$$x_q = \frac{\text{Log}\left[\frac{\theta}{\sqrt{1-q-\theta q}} - \theta + 1\right]}{\mu} \quad (16)$$

وكذلك فان الوسيط (Median) للتوزيع هو:

$$x_{Median} = \frac{\text{Log}\left[\frac{\theta}{\sqrt{\frac{1-\theta}{2}}} - \theta + 1\right]}{\mu} \quad (17)$$

وان دالة توليد الارقام العشوائية تكون بالشكل:

$$x_u = \frac{\text{Log}\left[\frac{\theta}{\sqrt{1-u-\theta u}} - \theta + 1\right]}{\mu} \quad (18)$$

حيث أن u تمثل متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع المنتظم $u \sim \text{Uniform}[0,1]$

4.2. الدالة المولدة للعزوم

$$M_x^t = E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} f_{GL}(x; \mu, \theta) dx = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{\mu\theta^2(1 + e^{x\mu} + \theta)e^{x\mu}}{(1 + \theta)(-1 + e^{x\mu} + \theta)^3} dx$$

$$E(e^{tx}) = \frac{1}{2(1+\theta)\mu} \left(t\theta(2+\theta) + 2(1+\theta)\mu + \frac{1}{\mu} t(1-\theta)^{-2+\frac{t}{\mu}} \theta^2 \left(- \left((-1+\theta)(t+\mu) \text{Beta} \left[1-\theta, 1-\frac{t}{\mu}, 0 \right] \right) + (1+\theta)(t-\mu) \text{Beta} \left[1-\theta, 2-\frac{t}{\mu}, 0 \right] \right) \right) \quad (19)$$

حيث ان $\text{Beta}[\dots]$ تمثل دالة بيتا غير الكاملة. وباشتقاق الصيغة (19) بالنسبة للمتغير t والتعويض عن t بالصفر في المشتقة وحسب درجة العزم يمكن الحصول على اي عزم من عزوم التوزيع اللامركزية m_k^* حيث: k تمثل درجة العزم.

4.3 الوسط

باشتقاق الصيغة (19) بالنسبة للمتغير t والاستعاضة عن t بالصفر يتم الحصول على الوسط الحسابي للتوزيع والذي يكون بالصيغة التالية:-

$$E(x) = \frac{\theta(1-\theta + \theta^2 \text{Log}[\theta])}{(\theta-1)^2(1+\theta)\mu} \quad (20)$$

4.4 العزوم المركزية

$$\mu_k = E(x - E(x))^k$$

باستعمال قاعدة مفكوك نيوتن:

$$(x - y)^k = \sum_{j=0}^k C_j^k (-1)^j x^{k-j} y^j$$

فان:

$$m_k = E(x - E(x))^k = E(x - m_1^*)^k = \sum_{j=0}^k C_j^k (-1)^j x^{k-j} m_1^{*j} \quad (21)$$

5. مقدرات الامكان الاعظم

تعتبر طريقة الامكان الاعظم من الطرائق الشائعة الاستعمال لتقدير معالم دوال التوزيعات الاحتمالية، ويفترض هذا الاسلوب في التقدير بان المعلمة المراد تقديرها هي قيمة ثابتة (Fixed value) غير معلومة بمعنى ان التقدير سيعتمد على بيانات العينة للمشاهدات فقط لذلك سنكون بحاجة الى دالة الامكان الاعظم للمتغير العشوائي المستعمل ويتم تقدير المعالم من خلال مساواة مشتقة دالة الامكان بالنسبة للمعلمة المراد تقديرها بالصفر، ومما ميز طريقه الامكان الاعظم امتلاكها لخاصية عدم التغير او الثبات (Invariant).

ولتقدير معالم توزيع جومبيرتز ليندلي باعتبار الدالة $f(x_i|\mu, \theta)$ دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع كالاتي

$$L = f(x_1, x_2, \dots, x_n|\mu, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{GL}(x_i|\mu, \theta)$$

$$\prod_{i=1}^n f_{GL}(x_i|\mu, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\mu\theta^2(1 + e^{x_i\mu} + \theta)e^{x_i\mu}}{(1+\theta)(-1 + e^{x_i\mu} + \theta)^3}$$

$$\ln L = n(2\text{Log}[\theta] - \text{Log}[1+\theta] + \text{Log}[\mu]) - 3 \sum_{i=1}^n \text{Log}[-1 + e^{\mu x_i} + \theta] \quad (22)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \text{Log}[1 + e^{\mu x_i} + \theta] + \mu \sum_{i=1}^n x_i$$

وللحصول على دالة الامكان في نهايته العظمى يتم اشتقاق الصيغة (22) بالنسبة الى المعالم المجهولة كالاتي:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{n}{\hat{\mu}} + \sum_{i=1}^n x_i - 3 \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\mu}x_i} x_i}{-1 + e^{\hat{\mu}x_i} + \theta} + \sum_{i=1}^n \frac{e^{\hat{\mu}x_i} x_i}{1 + e^{\hat{\mu}x_i} + \theta} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n(2 + \hat{\theta})}{\theta(1 + \hat{\theta})} - 3 \sum_{i=1}^n \frac{1}{-1 + e^{\mu x_i} + \hat{\theta}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + e^{\mu x_i} + \hat{\theta}} \quad (24)$$

وبمساواة المعادلات (23) و(24) للصفر وحل تلك المعادلات بالاعتماد على احد الطرق العددية لإيجاد المقدرات حيث تم تطبيق طريقة نيوتن رافسون Newton's Raphson method لإيجاد حلول لمنظومة المعادلات اعلاه نحصل على مقدرات المعلمات المطلوبة $(\hat{\mu}, \hat{\theta})$ والخاصة بطريقة الإمكان الأعظم. وباستعمال خاصية الثبات (Invariant) لمقدرات طريقة الإمكان الأعظم يمكن الحصول على مقدر دالة المخاطرة باستعمال طريقة الإمكان الأعظم من خلال تعويض النتائج التي يتم الحصول عليها من مقدرات الإمكان الأعظم للمعلمات $(\hat{\mu}, \hat{\theta})$ الخاصة بتوزيع جومبيرتر ليندلي كما في المعادلات التالية:

$$\hat{R}_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\hat{\theta}^2 (e^{x\hat{\mu}} + \hat{\theta})}{(1 + \hat{\theta})(e^{x\hat{\mu}} + \hat{\theta} - 1)^2} \quad (25)$$

$$\hat{h}_{GL}(x; \mu, \theta) = \frac{\mu e^{x\hat{\mu}} (1 + e^{x\hat{\mu}} + \hat{\theta})}{(e^{x\hat{\mu}} + \hat{\theta} - 1)(e^{x\hat{\mu}} + \hat{\theta})} \quad (26)$$

6. تطبيق توزيع G-L D

في هذا القسم نستخدم مجموعة بيانات حقيقية لبيان أن توزيع G-L D يعتبر نموذجاً أفضل من توزيع جومبيرتر GD وتوزيع ليندلي LD المنفردين .

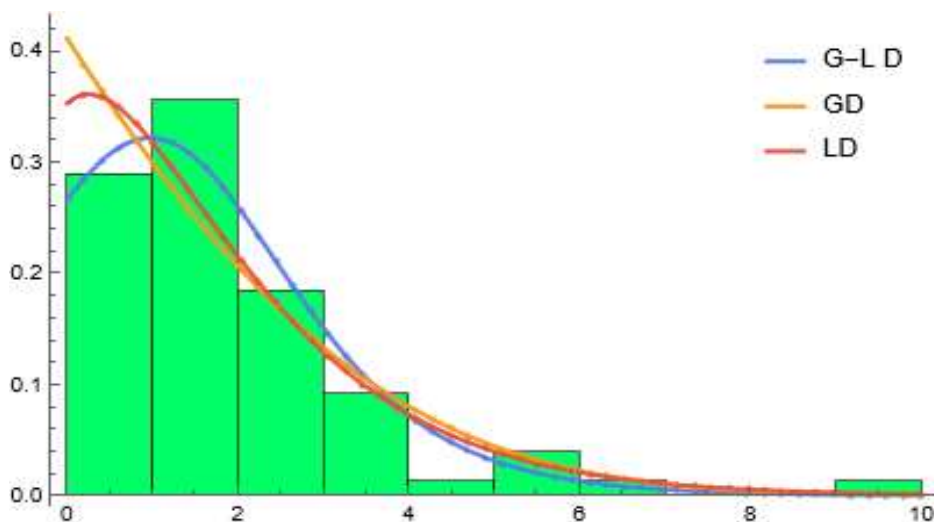
البيانات في الجدول (1) ادناه تمثل مدة بقاء لوح الأيبوكسي المعرض للضغط الثابت المستمر عند مستوى اجهاد 90% لحين الفشل أو الكسر، حيث تم الاستعانة بالمصدر [7] بالنسبة للبيانات.

جدول (1): مدة بقاء لوح الأيبوكسي المعرض للضغط المستمر لحين الفشل بالساعات

i	t _i	i	t _i	i	t _i	i	t _i	i	t _i	i	t _i	i	t _i
1	0.0251	12	0.0886	23	0.0891	34	0.2501	45	0.3113	56	0.3451	67	0.4763
2	0.5650	13	0.5671	24	0.6566	35	0.6748	46	0.6751	57	0.6753	68	0.7696
3	0.8375	14	0.8391	25	0.8425	36	0.8645	47	0.8851	58	0.9113	69	0.9120
4	0.9836	15	1.0483	26	1.0596	37	1.0773	48	1.1733	59	1.2570	70	1.2766
5	1.2985	16	1.3211	27	1.3503	38	1.3551	49	1.4595	60	1.4880	71	1.5728
6	1.5733	17	1.7083	28	1.7263	39	1.7460	50	1.7630	61	1.7746	72	1.8275
7	1.8375	18	1.8503	29	1.8808	40	1.8878	51	1.8881	62	1.9316	73	1.9558
8	2.0048	19	2.0408	30	2.0903	41	2.1093	52	2.1330	63	2.2100	74	2.2460
9	2.2878	20	2.3203	31	2.3470	42	2.3513	53	2.4951	64	2.5260	75	2.9911
10	3.0256	21	3.2678	32	3.4045	43	3.4846	54	3.7433	65	3.7455	76	3.9143
11	4.8073	22	5.4005	33	5.4435	44	5.5295	55	6.5541	66	9.0960.		

جدول (2): يبين تقديرات المعلمات لتوزيع G-L D وتوزيعات المقارنة

Distribution	$\hat{\mu}$	$\hat{\theta}$	$\hat{\lambda}$
G-LD	0.896569	4.05076	-
GD	0.121567	-	3.38531
LD	-	0.794783	-



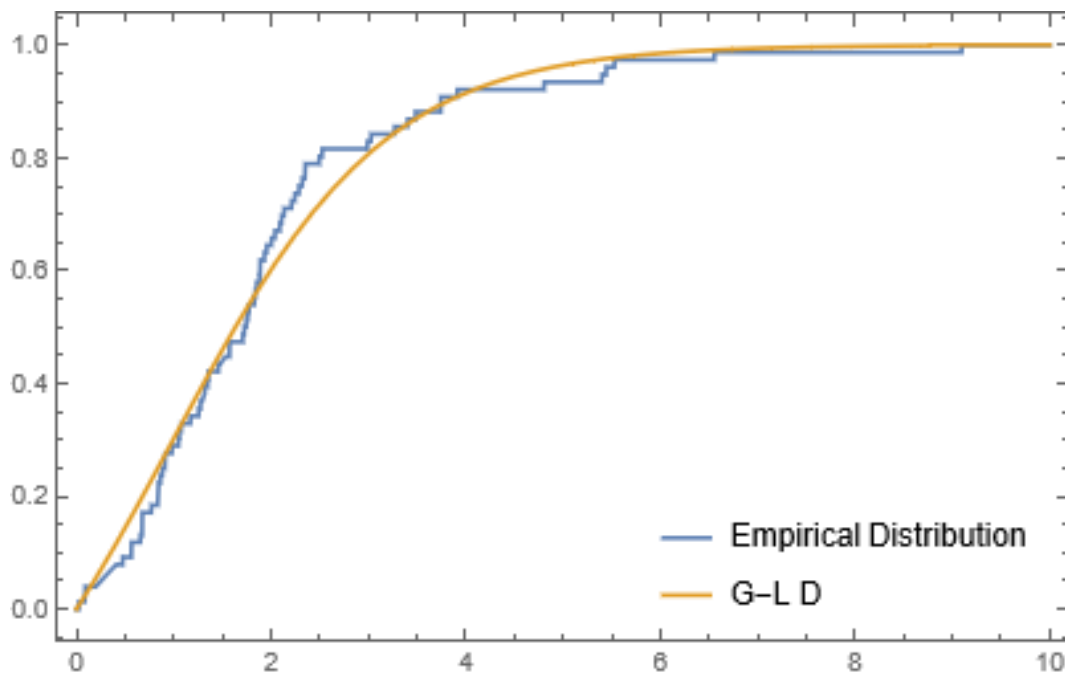
شكل (5): دالة pdf لتوزيع G-L D مقارنة بتوزيع GD و LD للبيانات الحقيقية

جدول (3): يبين افضلية توزيع G-L D وتوزيعات المقارنة حسب معايير المقارنة

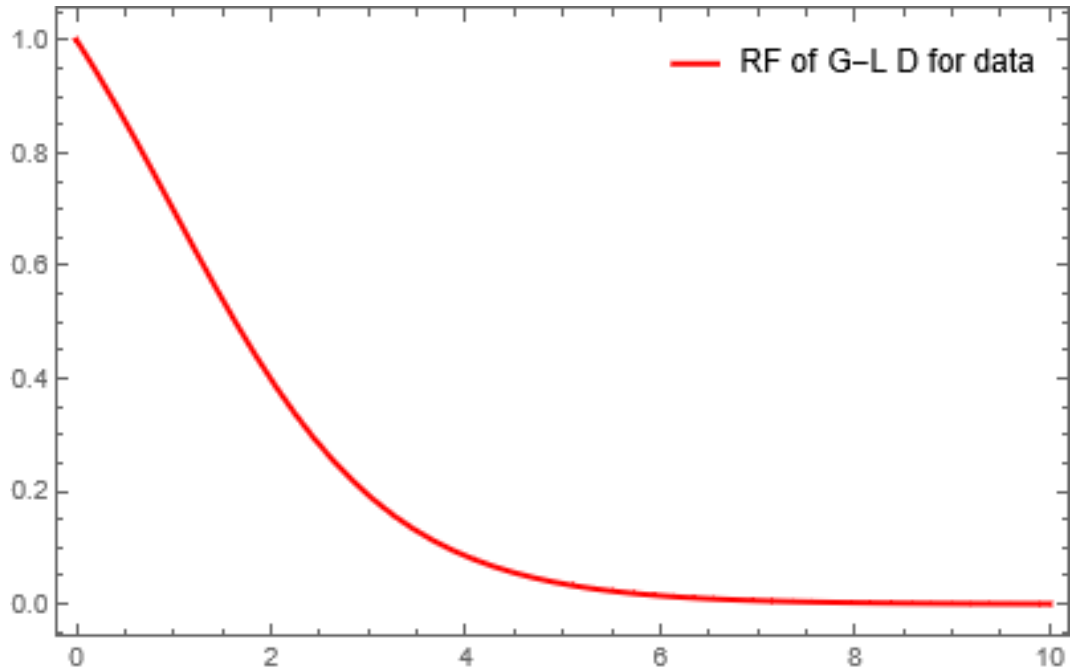
Dist.	Log Likelihood	AIC	AICc	BIC
G-L D	122.335	248.671	248.835	253.332
GD	125.374	254.749	254.913	259.41
LD	123.675	249.35	249.404	251.681

جدول (4): اختبارات حسن ملائمة البيانات لتوزيع G-L D

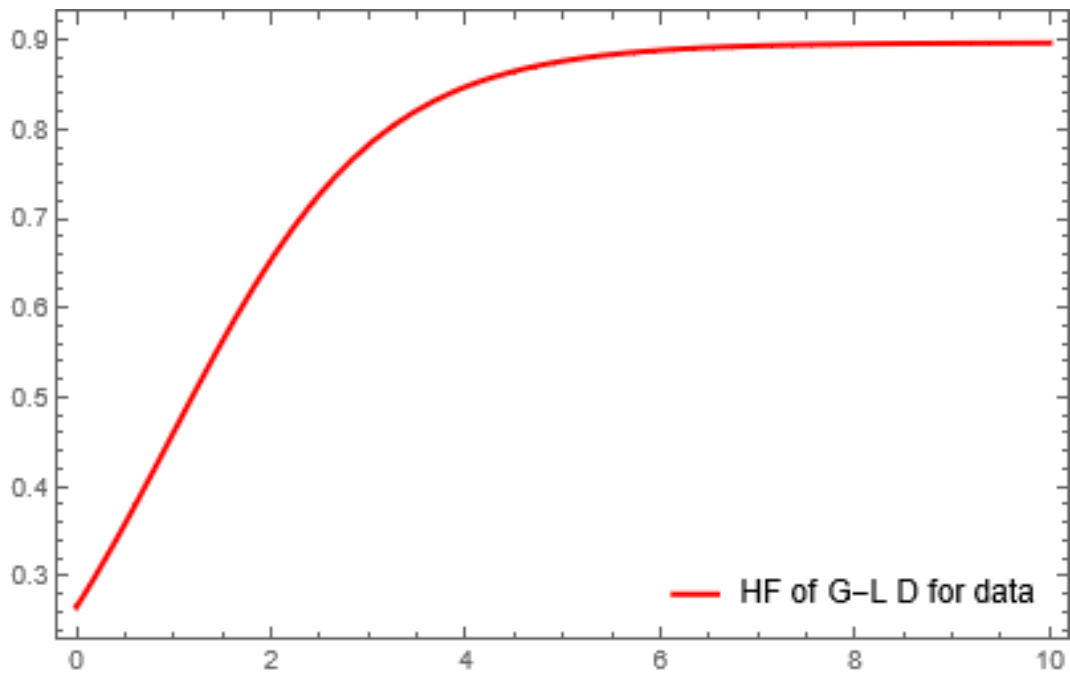
Test	Statistic	P-Value
Cramér-von Mises	0.121477	0.489469
Kolmogorov-Smirnov	0.102915	0.37127
Anderson-Darling	0.894093	0.417257
Pearson χ^2	13.3684	0.269929



شكل (7): دالة التوزيع التجريبي للبيانات مقارنة بدالة توزيع G-L D المقدر



شكل (8): دالة المعولية المقدرة لتوزيع $G-L D$ للبيانات الحقيقية



شكل (8): دالة المخاطرة المقدرة لتوزيع $G-L D$ للبيانات الحقيقية

جدول (5): مقدرات دالة التوزيع التراكمي ودالة المعولية ودالة المخاطرة للبيانات الحقيقية

t	CDF	RF	HF	t	CDF	RF	HF
0.0251	0.006687	0.993313	0.269475	1.746	0.532458	0.467542	0.60945
0.0886	0.023883	0.976117	0.280587	1.763	0.53729	0.46271	0.612546
0.0891	0.02402	0.97598	0.280675	1.7746	0.540571	0.459429	0.614649
0.2501	0.06932	0.930681	0.309971	1.8275	0.555381	0.444619	0.62413
0.3113	0.087129	0.912871	0.321498	1.8375	0.558152	0.441848	0.625902
0.3451	0.097094	0.902906	0.327948	1.8503	0.561684	0.438316	0.62816
0.4763	0.136561	0.863439	0.353509	1.8808	0.570036	0.429964	0.633499

تتمة جدول (5).

t	CDF	RF	HF	T	CDF	RF	HF
0.565	0.163869	0.836131	0.371203	1.8878	0.571941	0.428059	0.634715
0.5671	0.164521	0.835479	0.371626	1.8881	0.572022	0.427978	0.634767
0.6566	0.192507	0.807493	0.389764	1.9316	0.583746	0.416254	0.64225
0.6748	0.198242	0.801758	0.393481	1.9558	0.590186	0.409814	0.646357
0.6751	0.198336	0.801664	0.393543	2.0048	0.603042	0.396958	0.654546
0.6753	0.198399	0.801601	0.393584	2.0408	0.612328	0.387672	0.660454
0.7696	0.22831	0.77169	0.412973	2.0903	0.624871	0.375129	0.668423
0.8375	0.250006	0.749994	0.427037	2.1093	0.629616	0.370384	0.671434
0.8391	0.250519	0.749481	0.427369	2.133	0.635479	0.364521	0.675152
0.8425	0.251608	0.748392	0.428075	2.21	0.654103	0.345897	0.686944
0.8645	0.25866	0.74134	0.432646	2.246	0.662585	0.337415	0.692303
0.8851	0.26527	0.73473	0.43693	2.2878	0.672251	0.327749	0.698402
0.9113	0.273685	0.726315	0.442384	2.3203	0.679631	0.320369	0.703053
0.912	0.27391	0.72609	0.44253	2.347	0.685604	0.314396	0.706813
0.9836	0.296931	0.703069	0.457448	2.3513	0.686559	0.313441	0.707414
1.0483	0.317733	0.682267	0.470924	2.4951	0.717273	0.282727	0.726683
1.0596	0.321363	0.678637	0.473275	2.526	0.723568	0.276432	0.730619
1.0773	0.327046	0.672954	0.476955	2.9911	0.805635	0.194365	0.781442
1.1733	0.357778	0.642222	0.49685	3.0256	0.810815	0.189185	0.784616
1.257	0.384382	0.615618	0.514059	3.2678	0.843951	0.156049	0.804807
1.2766	0.390578	0.609422	0.518064	3.4045	0.860304	0.139696	0.814695
1.2985	0.397482	0.602518	0.522527	3.4846	0.869157	0.130843	0.820026
1.3211	0.404587	0.595413	0.527117	3.7433	0.894381	0.105619	0.835123
1.3503	0.413732	0.586268	0.533025	3.7455	0.894575	0.105425	0.835238
1.3551	0.415231	0.584769	0.533993	3.9143	0.908504	0.091496	0.843512
1.4595	0.447543	0.552457	0.554844	4.8073	0.957538	0.042462	0.872247
1.488	0.456254	0.543746	0.560459	5.4005	0.974771	0.025229	0.882186
1.5728	0.481855	0.518145	0.576946	5.4435	0.975711	0.02429	0.882725
1.5733	0.482005	0.517995	0.577042	5.5295	0.977487	0.022513	0.883744
1.7083	0.521654	0.478346	0.60252	6.5541	0.990938	0.009062	0.891427
1.7263	0.526828	0.473172	0.605839	9.096	1	0.000933	0.896041

المصادر

- [1] Zhou, M., & Carin, L. (2013). "Negative binomial process count and mixture modeling". IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 37(2), 307-320.
- [2] Meintanis, S. G. (2007). "Test of fit for Marshall–Olkin distributions with applications". Journal of Statistical Planning and inference, 137(12), 3954-3963.
- [3] Sangsanit, Y., & Bodhisuwan, W. (2016). "The Topp-Leone generator of distributions: properties and inferences". Songklanakarin Journal of Science & Technology, 38(5).
- [4] Aljarrah, M. A., Lee, C., & Famoye, F. (2014). "On generating TX family of distributions using quantile functions". Journal of Statistical Distributions and Applications, 1, 1-17.
- [5] Gompertz, B. (1825). XXIV. "On the nature of the function expressive of the law of human mortality, and on a new mode of determining the value of life contingencies". In

- a letter to Francis Baily, Esq. FRS &c. Philosophical transactions of the Royal Society of London, (115), 513-583.
- [6] Willemse, W. J., & Koppelaar, H. (2000). "Knowledge elicitation of Gompertz'law of mortality". Scandinavian actuarial journal, 2000(2), 168-179.
- [7] Abdul-Moniem, I. B., & Seham, M. (2015). "Transmuted gompertz distribution". Comput Appl Math J, 1(3), 88-96.
- [8] Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). "Lindley distribution and its application". Mathematics and computers in simulation, 78(4), 493-506.



AL- Rafidain
University College

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

**Journal of AL-Rafidain
University College for Sciences**

Available online at: <https://www.jrucs.iq>

JRUCS

Journal of AL-Rafidain
University College for
Sciences

Constructing A New Probability Distribution (Gompertz-Lindely) to Estimate the Reliability Function and the Risk Function

Assist. Prof. Dr. Rissan A. Zalan	Muntather J. Mehdi
ressan.zalan@uobasrah.edu.iq	montather.jumaa@uobasrah.edu.iq
Statistics Department, College of Administration and Economics, Basrah University, Basrah, Iraq	
Mohammed M. Mohsin	
mohammed.mohsin@uobasrah.edu.iq	
Statistics Department, College of Administration and Economics, Basrah University, Basrah, Iraq	

Article Information

Article History:

Received: December, 31, 2022

Accepted: March, 3, 2023

Available Online: December, 31, 2023

Keywords:

Gompertz Distribution, Lindely Distribution, Compound distribution, probability distribution, Reliability function, Risk function.

Correspondence:

Assist. Prof Dr. Rissan A. Zalan

ressan.zalan@uobasrah.edu.iq

<https://doi.org/10.55562/jrucs.v54i1.596>

Abstract

In this paper, a new elastic probability distribution was formed by Gompertz-Lindley, a distribution resulting from the combination of the two continuous distributions, Gompertz and Lindley, as measurement parameters for the Gompertz distribution. A random variable then follows the Lindley distribution to produce the probability distribution. Gompertz-Lindley probability distribution is the result of a random variable that follows the Lindley distribution for the Gompertz distribution. The statistical and structural properties of the distribution and the shapes taken by the curves of the probability density function and the risk function were derived, as well as their parameters, which were estimated using the Maximum Likelihood Method. Applying it to a sample of real data represented by continuous survival periods until death served to show how effective distribution is at representing a sample of data. Compared to several traditional distributions, it has been demonstrated that the Gompertz-Lindley distribution fits the data the best.