Derivation Numerical Method by Using Mid Point Rule to Evaluate Double Integrations with Singular Partial Derivative Integrands

اشتقاق طريقة عددية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة المشتقات الجزئية

أ.علي حسن محمد   محمد رزاق سلمان
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/جامعة الكوفة

المستخلص

ان الهدف الاساسي من هذا البحث هو اشتقاق قاعدة لحساب قيم التكاملات الثنائية عدديا ذات المكاملات المعتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x,y وكيفية ايجاد حدود التصحيح لها (صيغة الخطأ) وتحسين هذه النتائج باستخدام طريقة تعجيل رومبرك [1] ,[7] من خلال حدود التصحيح هذه , عندما يكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الداخلي x مساوية الى عدد الفترات الجزئية التي تجزأ اليها فترة التكامل على البعد الخارجي y .

وسوف نرمز لهذه الطريقة بالرمز RMM ويمكن الاعتماد عليها كونها قد أعطت دقة عالية في النتائج مقارنة مع القيم التحليلية للتكاملات بعدد فترات جزئية قليلة.

Abstract

The main aim of this research is to derive rule to find values of double integrals, numerically its integrands have singular partial derivatires not on the end of the region of integration by using the mid point rule with the two direction x and y . and the derive the correction error terms and we used Romberg acceleration to improve the results when the number of subintervals on the direction of dimension equal to subintervals on the direction of dimension y . and we will use the symbole ***RMM*** to indicate this method and we can depend on this method because it gave high accuracy on the results with respect to the analytical values of integrations and with little subintervals .

1. المقدمة

ان اهمية موضوع التحليل العددي تكمن في ابتكار طرائق معينة تساهم في ايجاد حلول تقريبية لمسائل في الرياضيات ومنها التكاملات التي تشكل جزءاً مهما من هذا الموضوع , إذ إن هذه الأهمية تكون واضحة أكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون , وإن إيجاد القيمة التقريبية للتكامل جاء نتيجة صعوبات كثيرة منها :

1. استحالة إيجاد القيمة التحليلية للتكامل .
2. عندما تكون عملية إيجاد القيمة التحليلية للتكامل ممكنة ولكن بمشقة و زمن طويل.
3. قد تكون قيمة التكامل التحليلية تقريبية أساسا لاحتوائها على حدود تأخذ قيمها من الجداول(مثل اللوغارتم او معكوس الظل) .
4. قد تكون المسألة هي إيجاد مساحة تحت منحن معرّف بجدول قيم (أي أن الدالة معرفة في نقاط معدودة في فترة التكامل) كما هي الحال عند تحليل نتائج التجارب .

أما عملية إيجاد قيمة للتكامل الثنائي فإنها تشكل مسألة اكثر تعقيدا من مشكلة إيجاد قيمة التكامل الأحادي كون المكامل هنا يعتمد على متغيرين وان مسالة الاستمرارية أوالاعتلال في المكامل أوالاعتلال في المشتقات الجزئية للمكامل تشكل صعوبات كبيرة وكذلك فإننا هنا سنتعامل مع مناطق التكامل (Regions) أو سطوح (Surfaces) وليس مع فترات التكامل كما في حالة التكامل الأحادي .

لهذا فإن إيجاد قيم التكاملات من هذا النوع ليس بالأمر السهل لبعض الحالات وعليه أصبحت الحاجة ملحة لإيجاد قيم تقريبية لهذه التكاملات وتكمن أهمية التكاملات الثنائية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي .

مما دعا كثير من الباحثين إلى العمل في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ هما هانس جار وجاكوبسن [3] عام 1973 ومنهم من عمل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال , دافييز و رابينوتز [5] عام 1975 , وفي عام 1984 عمل محمد

[9] على أيـجاد قيم التكاملات الثـنائية ذات المكاملات المستمرة وذلك باستخدام طرائق مركبة منها طريقة رومبرك (رومبرك) التي استخدم فيها طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x .
وفي عام 2002 قدم محمد [4] بحثاً بيّن فيه طريقة مركبة من تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الداخلي x والخارجي y لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها على البعدين الداخلي و الخارجي x و y واسماها طريقة رومبرك (رومبرك) لكن باسلوب التكاملات الاحادية , وفي عام 2010 قدمت عكار [8] أسلوبا جديدا مغايرا لما استعمله الباحثون السابقون إذ قدمت طريقة عددية لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك باستعمال طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق قاعدة النقطة الوسطى على البعدين x و y عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل على البعد الخارجي إذ إن ($h=\bar{h}$) وأسمتها RMM حيث أن MM ترمز لقاعدة النقطة الوسطى المطبقة على كلا البعدين و R طريقة تعجيل رومبرك , و قدمت ثلاث حالات مع البرهان لإيجاد الصيغة العامة لحدود التصحيح لكل حالة من حالات المكامل (مستمر أو مستمر لكن معتل المشتقات الجزئية أو معتل في احدى او كلتا نهايتي منطقة التكامل) وقد حصلت على نتائج جيدة وبعدد قليل من الفترات الجزئية المستخدمة.
وفي بحثنا هذا سوف نعمل على أيجاد طريقة عددية بأسلوب مشابه لما قدمته عكار[8] لحساب قيم التكاملات الثنائية عندما تكون دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غيراحدى نهايتي منطقة التكامل وانما الاعتلال حصراً في النقطة (x_0,y_n) أو (x_n,y_0) أو الاثنين معا" في آن واحد.

2. التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية

Double Integrals for Continuous Integrands with Singularity in Partial Derivatives

لنفرض التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة :

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = MM(h)+E(h) \qquad \ldots(1)$$

والذي فيه الدالة $f(x,y)$ معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة Undefined في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل وسنناقش كيفية حساب قيمة هذا التكامل بقاعدة النقطة الوسطى وعلى البعدين x و y حيث ان $MM(h)$ تمثل قيمة التكامل بالقاعدة المذكورة و $E(h)$ سلسلة حدود التصحيح (صيغة الخطأ) .

الحالة الأولى :

مبرهنة 1
لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]$ عدا النقطة $(x,y)=(x_0,y_n)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية :

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h, y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+\left[\frac{h^4}{24}\left(D_{yy}+D_{xx}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{h^5}{48}\left(D_{yyy}-D_{xyy}+D_{xxy}-D_{xxx}\right)+\frac{11h^6}{1920}D_{yyyy}+\ldots\right]f(x_1,y_{n-1})$$
$$+A_1h^2+A_2h^4+\ldots$$

حيث $A_1,A_2,\ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط .

البرهان:

التكامل الثنائي المعرف بالصيغة:

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = MM(h)+E(h)$$

يمكن كتابته بالصيغة :

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy = \int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy + \int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy + \int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy + \int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n} f(x,y)dxdy \quad \cdots(2)$$

نلاحظ في التكامل الاول والثالث والرابع (I_1, I_3, I_4) ان الدالة $f(x,y)$ مستمرة وغير معتلة المشتقات الجزئية في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها لذا يمكن حساب قيم هذه التكاملات من خلال الصيغة التي اشتقتها عكار[8] اما بالنسبة للتكامل الثاني (I_2) في المنطقة الجزئية $[x_0, x_n]\times[y_{n-1}, y_n]$ فأن الدالة $f(x,y)$ مستمرة ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة عند النقطة (x_0, y_n) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a functions of two variable موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_0, y_n) سسترى[6] .

وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

$$I_1 = \int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy = \sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_{s-1}}^{y_s}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy = h^2\sum_{s=1}^{n-1} f(x_0+0.5h, y_{s-1}+0.5h) + a_1h^2 + a_2h^4 + \ldots$$
…(3)

التكامل الثاني في المنطقة الجزئية $[x_0, x_1]\times[y_{n-1}, y_n]$ نستخدم متسلسلة تايلر للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (x_1, y_{n-1}) أي أن :

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_1,y_{n-1}) + (y-y_{n-1})f_y(x_1,y_{n-1}) + (x-x_1)f_x(x_1,y_{n-1}) + \frac{(y-y_{n-1})^2}{2!}f_{yy}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{(x-x_1)^2}{2!}f_{xx}(x_1,y_{n-1}) + (x-x_1)(y-y_{n-1})f_{xy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{(y-y_{n-1})^3}{3!}f_{yyy}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{(x-x_1)^3}{3!}f_{xxx}(x_1,y_{n-1}) + \frac{(y-y_{n-1})(x-x_1)^2}{2!}f_{xxy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{(x-x_1)(y-y_{n-1})^2}{2!}f_{xyy}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{(y-y_1)^4}{4!}f_{yyyy}(x_1,y_{n-1}) + \ldots
\end{aligned} \quad \ldots(4)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ موجودة عند النقطة (x_1, y_{n-1}) (لان الدالة في هذه النقطة معرفة ولايوجد فيها اعتلال فعليه يمكن استخدام متسلسلة تايلر لها المذكورة في الصيغة(4)) .

وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة (4) (متسلسلة تايلر) في المنطقة $[x_0, x_1]\times[y_{n-1}, y_n]$ نحصل على :

$$\begin{aligned}
\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy &= h^2 f(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^3}{2}f_y(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^3}{2}f_x(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^4}{3!}f_{yy}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{h^4}{3!}f_{xx}(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^4}{4}f_{xy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^5}{4!}f_{yyy}(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^5}{4!}f_{xxx}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{h^5}{2\times3!}f_{xxy}(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^5}{2\times3!}f_{xyy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^6}{5\times4!}f_{yyyy}(x_1,y_{n-1}) + \ldots
\end{aligned}$$
…(5)

وبالتعويض عن x بـ $x_0+\frac{1}{2}h$ وعن y بـ $y_n-\frac{1}{2}h$ في الصيغة (4) نحصل على :

$$\begin{aligned}
f(x_0+0.5h, y_n-0.5h) &= f(x_1,y_{n-1}) + \frac{h}{2}f_y(x_1,y_{n-1}) - \frac{h}{2}f_x(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^2}{8}f_{xx}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{h^2}{8}f_{yy}(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^2}{4}f_{xy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^3}{8\times3!}f_{yyy}(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^3}{8\times3!}f_{xxx}(x_1,y_{n-1})\\
&+\frac{h^3}{16}f_{xxy}(x_1,y_{n-1}) - \frac{h^3}{16}f_{xyy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^4}{16\times4!}f_{yyyy}(x_1,y_{n-1}) + \ldots
\end{aligned} \quad \ldots(6)$$

ومن الصيغتين (5) , (6) بعد ضرب الصيغة (6) بـ h^2 نحصل على :

$$I_2 = \int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)dxdy = h^2 f(x_0+0.5h, y_n-0.5h) + \frac{h^4}{24}f_{yy}(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^4}{24}f_{xx}(x_1,y_{n-1}) + \frac{h^5}{48}f_{yyy}(x_1,y_{n-1})$$

$$-\frac{h^5}{48}f_{xxx}(x_1,y_{n-1})-\frac{h^5}{48}f_{xyy}(x_1,y_{n-1})+\frac{h^5}{48}f_{xxy}(x_1,y_{n-1})+\frac{11h^6}{1920}f_{yyyy}(x_1,y_{n-1})+\dots \qquad \dots(7)$$

$$I_3=\int_{y_0}^{y_{n-1}}\int_{x_1}^{x_n}f(x,y)dxdy=h^2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_1+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+b_1h^2+b_2h^4+\dots \qquad \dots(8)$$

$$I_4=\int_{y_{n-1}}^{y_n}\int_{x_1}^{x_n}f(x,y)=\int_{y_{n-1}}^{y_n}\sum_{s=1}^{n-1}\int_{x_s}^{x_{s+1}}f(x,y)dxdy=h^2\sum_{s=1}^{n-1}f(x_s+0.5h,y_{n-1}+0.5h)+c_1h^2+c_2h^4+\dots \qquad \dots(9)$$

حيث a_i,b_i,c_i ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط $i=1,2,\dots$. الصيغ (3),(7),(8) و(9) نحصل على :

$$\begin{aligned}I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)dxdy&=h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+\left[\frac{h^4}{24}(D_{yy}+D_{xx})\right.\\&\left.+\frac{h^5}{48}(D_{yyy}-D_{xyy}+D_{xxy}-D_{xxx})+\frac{11h^2}{1920}D_{yyyy}+\dots\right]f(x_1,y_{n-1})\\&+A_1h^2+A_2h^4+\dots\end{aligned} \qquad \dots(10)$$

حيث $A_1,A_2,\dots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط , وان $D_x=\frac{\partial}{\partial x}$, $D_y=\frac{\partial}{\partial y}$, $D_{xx}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}$, $D_{yy}=\frac{\partial^2}{\partial y^2},\dots$ انتهى البرهان.

الحالة الثانية :

مبرهنة 2
لتكن الدالة $f(x,y)$ مستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_n]\times[y_0,y_n]$ عدا النقطة $(x,y)=(x_n,y_0)$ فان القيمة التقريبية للتكامل الثنائي I يمكن حسابها من القاعدة الاتية :

$$\begin{aligned}I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)dxdy&=h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+\left[\frac{h^4}{24}(D_{yy}+D_{xx})\right.\\&\left.+\frac{h^5}{48}(D_{xxx}+D_{xyy}-D_{xxy}-D_{yyy})+\frac{11h^6}{1920}D_{yyyy}+\dots\right]f(x_{n-1},y_1)\\&+A_1h^2+A_2h^4+\dots\end{aligned}$$

حيث $A_1,A_2,\dots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط .

البرهان:
التكامل الثنائي I يمكن كتابته بالصيغة:

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n}f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}}f(x,y)dxdy+\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy+\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n}f(x,y)dxdy \qquad \dots(11)$$

نلاحظ هنا في التكاملات الاول والثاني والرابع (I_1,I_2,I_4) ان دالة التكامل $f(x,y)$ مستمرة وكذلك مشتقاتها الجزئية معرفة في كل نقطة من نقاط مناطق تكاملاتها اما بالنسبة للتكامل الثالث (I_3) في المنطقة الجزئية $[x_{n-1},x_n]\times[y_0,y_1]$ فهو ذومشتقات جزئية معتلة في النقطة (x_n,y_0) لذا نستخدم متسلسلة تايلر للدالة $f(x,y)$ حول النقطة (x_{n-1},y_1).
وسنحسب قيم هذه التكاملات بشكل متسلسل:

$$I_1=\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy=\int_{y_0}^{y_1}\sum_{r=1}^{n-1}\int_{r-1}^{r} f(x.y)dxdy=h^2\sum_{r=1}^{n-1} f(x_r+0.5h,y_0+0.5h)+a_1h^2+a_2h^4+\ldots \qquad \ldots(12)$$

$$I_2=\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x,y)dxdy=h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n-1} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_1+\frac{2j-1}{2}h\right)+b_1h^2+b_2h^4+\ldots \qquad \ldots(13)$$

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(x_{n-1},y_1)+(y-y_1)f_y(x_{n-1},y_1)+(x-x_{n-1})f_x(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{(y-y_{n-1})^2}{2!}f_{yy}(x_{n-1},y_1)+\frac{(x-x_{n-1})^2}{2!}f_{xx}(x_{n-1},y_1)+(x-x_{n-1})(y-y_1)f_{xy}(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{(y-y_{n-1})^3}{3!}f_{yyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{(x-x_{n-1})^3}{3!}f_{xxx}(x_{n-1},y_1)+\frac{(y-y_1)(x-x_{n-1})^2}{2!}f_{xxy}(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{(x-x_{n-1})(y-y_1)^2}{2!}f_{xyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{(y-y_1)^4}{4!}f_{yyyy}(x_{n-1},y_1)+\ldots\end{aligned} \qquad \ldots(14)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y)$ موجودة عند (x_{n-1},y_1). (لان الدالة في هذه النقطة معرفة ولايوجد فيها اعتلال فعليه يمكن استخدام متسلسلة تايلر لها المذكورة في الصيغة(4))

وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة (14) (متسلسلة تايلر) في المنطقة $[x_{n-1},x_n]\times[y_0,y_1]$ نحصل على :

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy&=h^2f(x_{n-1},y_1)-\frac{h^3}{2}f_y(x_{n-1},y_1)+\frac{h^3}{2}f_x(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{h^4}{3!}f_{yy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^4}{3!}f_{xx}(x_{n-1},y_1)-\frac{h^4}{4}f_{xy}(x_{n-1},y_1)\\&-\frac{h^5}{4!}f_{yyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^5}{4!}f_{xxx}(x_{n-1},y_1)-\frac{h^5}{2\times3!}f_{xxy}(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{h^5}{2\times3!}f_{xyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^6}{5\times4!}f_{yyyy}(x_{n-1},y_1)+\ldots\end{aligned} \qquad \ldots(15)$$

وبالتعويض عن x بـ $x_n-\frac{1}{2}h$ وعن y بـ $y_0+\frac{1}{2}h$ في الصيغة (14) نحصل على:

$$\begin{aligned}f(x_n-0.5h,y_0+0.5h)&=f(x_{n-1},y_1)-\frac{h}{2}f_y(x_{n-1},y_1)+\frac{h}{2}f_x(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{h^2}{8}f_{yy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^2}{8}f_{xx}(x_{n-1},y_1)-\frac{h^2}{4}f_{xy}(x_{n-1},y_1)\\&-\frac{h^3}{8\times3!}f_{yyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^3}{8\times3!}f_{xxx}(x_{n-1},y_1)\\&-\frac{h^3}{16}f_{xxy}+\frac{h^3}{16}f_{xyy}+\frac{h^4}{16\times4!}f_{yyyy}+\ldots\end{aligned} \qquad \ldots(16)$$

ومن الصيغتين (15) , (16) بعد ضرب الصيغة (16) بـ h^2 نحصل على :

$$\begin{aligned}I_3=\int_{y_0}^{y_1}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy&=h^2f(x_n-0.5h,y_0+0.5h)+\frac{h^4}{24}f_{yy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^4}{24}f_{xx}(x_{n-1},y_1)\\&-\frac{h^5}{48}f_{yyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{h^5}{48}f_{xxx}(x_{n-1},y_1)-\frac{h^5}{48}f_{xxy}(x_{n-1},y_1)\\&+\frac{h^5}{48}f_{xyy}(x_{n-1},y_1)+\frac{11h^6}{1920}f_{yyyy}(x_{n-1},y_1)+\ldots\end{aligned} \qquad \ldots(17)$$

$$I_4=\int_{y_1}^{y_n}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=\sum_{s=1}^{n-1}\int_{y_s}^{y_{s+1}}\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x,y)dxdy=h^2\sum_{s=1}^{n-1} f\left(x_{n-1}+0.5h,y_s+0.5h\right)+c_1h^2+c_2h^4+\ldots \qquad \ldots(18)$$

حيث a_i,b_i,c_i ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط , $i=1,2,\ldots$.

وبجمع الصيغ (12), (13),(17) و(18) نحصل على :

$$I=\int_{y_0}^{y_n}\int_{x_0}^{x_n} f(x,y)dxdy=h^2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_0+\frac{2i-1}{2}h,y_0+\frac{2j-1}{2}h\right)+\left[\frac{h^4}{24}\left(D_{yy}+D_{xx}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{h^5}{48}\left(D_{xxx}+D_{xyy}-D_{xxy}-D_{yyy}\right)+\frac{11h^6}{1920}D_{yyyy}+\ldots\right]f\left(x_{n-1},y_1\right)$$
$$+A_1h^2+A_2h^4+\ldots \qquad \ldots(19)$$

حيث $A_1,A_2,\ldots$ ثوابت . انتهى البرهان.

لذا فان صيغة الخطأ باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين عندما $m=n$ $\left(h=\bar{h}\right)$ في حالة الاعتلال في النقطة $\left(x_0,y_n\right)$ أو $\left(x_n,y_0\right)$ تكتب بالشكل الآتي :

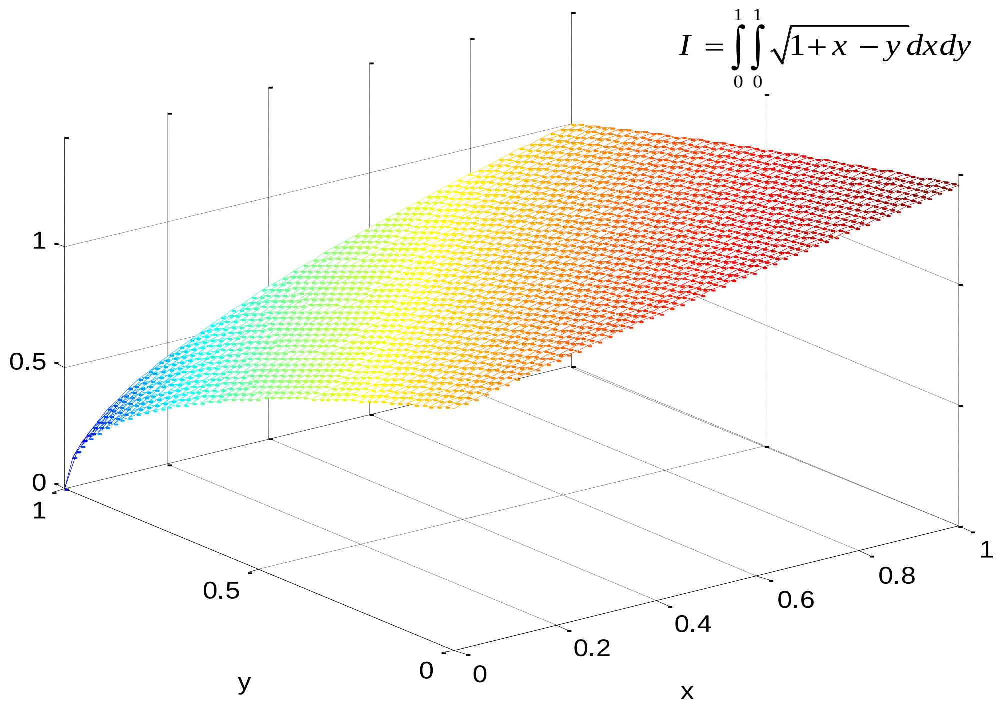
$$I-MM(h)=m_1f_1(h)+m_2f_2(h)+\ldots+A_1h^2+A_2h^4+\ldots \qquad \ldots(20)$$

إذ إن $A_1,A_2,\ldots$ و m_i ثوابت و $i=1,2,\ldots$ وان f_i دوال تعتمد على h فقط ونستخرجها من الصيغتين (10)و(19) .

4.الأمثلة

مثال 1 $\quad I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+x-y}\,dxdy=0.975161133197907$

المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,1) (لانه عند تعويض النقطة(0,1) في المشتقة الاولى للدالة $f(x,y)=\sqrt{1+x-y}$ فان الناتج يكون غير معرف) كما موضح بالرسم البياني له (الشكل رقم 1) وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل (مقربة الى اربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة) وقيمته في برنامج الماتلاب نلاحظ انها متطابقة تماما" لغاية المرتبة الرابعة عشر بعد الفاصلة عندما n=m=64 وعلى كلا البعدين بعد استخدام تعجيل رومبرك [2],[3] بحدود تصحيح (2,2.5,4,6,8,10,…) بينما كانت القيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين كما مبين في الجدول رقم (1) ويمثل هذا تطبيقا" للحالة الاولى (المبرهنة 1). علما" ان الوقت المستغرق في برنامج الماتلاب للحساب كان(4.702 ثانية).



شكل رقم (1)

توضيح دالة المكامل هنا معتلة المشتقات الجزئية في النقطة (0,1) لان:

$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,dxdy$$

$$let\ f(x,y) = \sqrt{1+x-y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1+x-y}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(0,1)\ is\ undefined$$

ولايجاد قيمة التكامل اعلاه تحليلياً

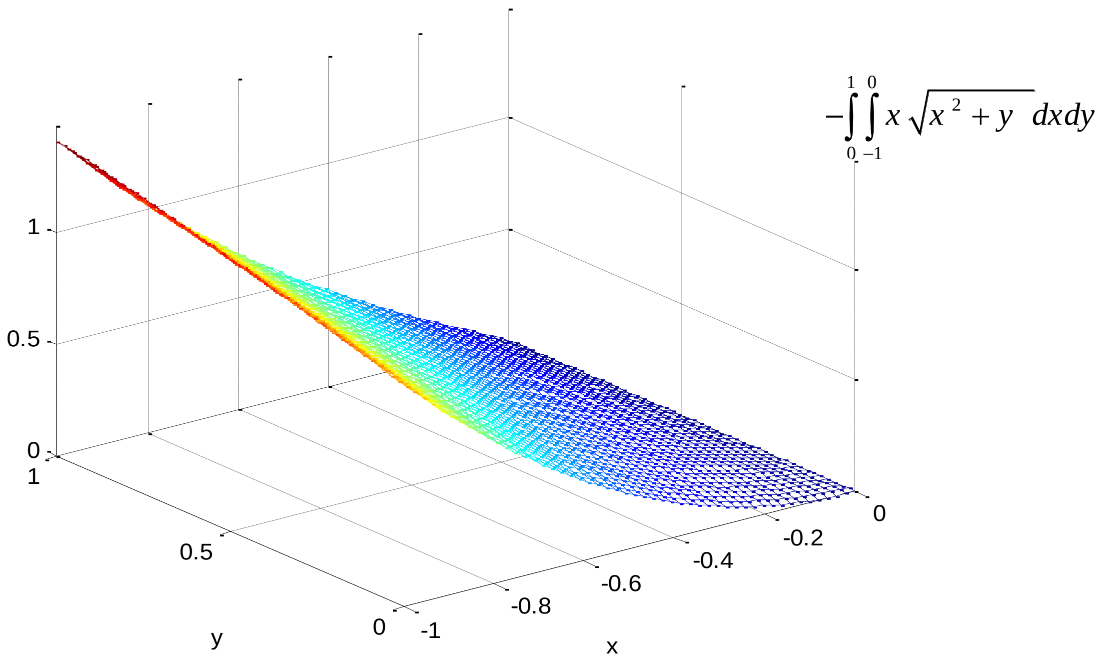
$$I = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,dxdy$$

$$(i)\ \int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,dx = \frac{2}{3}[1+x-y]^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}\left[(2-y)^{\frac{3}{2}} - (1-y)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$(ii)\ \int_0^1 \frac{2}{3}\left[(2-y)^{\frac{3}{2}} - (1-y)^{\frac{3}{2}}\right]dy = \frac{4}{15}\left[(1-y)^{\frac{5}{2}} - (1-y)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = 0.975161133197907$$

مثال 2 $I = -\int_0^1 \int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+y}\,dxdy \approx 0.48758056659899$

المكامل هنا مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0) كما موضح بالرسم البياني له (شكل رقم 2) وعند المقارنة بين القيمة التحليلية للتكامل(مقربة الى اربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة) وقيمته في برنامج الماتلاب نلاحظ انها متطابقة تماما" لغاية المرتبة الثالثة عشر بعد الفاصلة عندما n=m=256 وعلى كلا البعدين بعد استخدام تعجيل رومبرك [2],[3] بحدود تصحيح (2,2.5,3.5,4,4.5,…) بينما كانت القيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين كما مبين في الجدول رقم (2) ويمثل هذا تطبيقا" للحالة الثانية (المبرهنة 2).علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(6.42 ثانية).

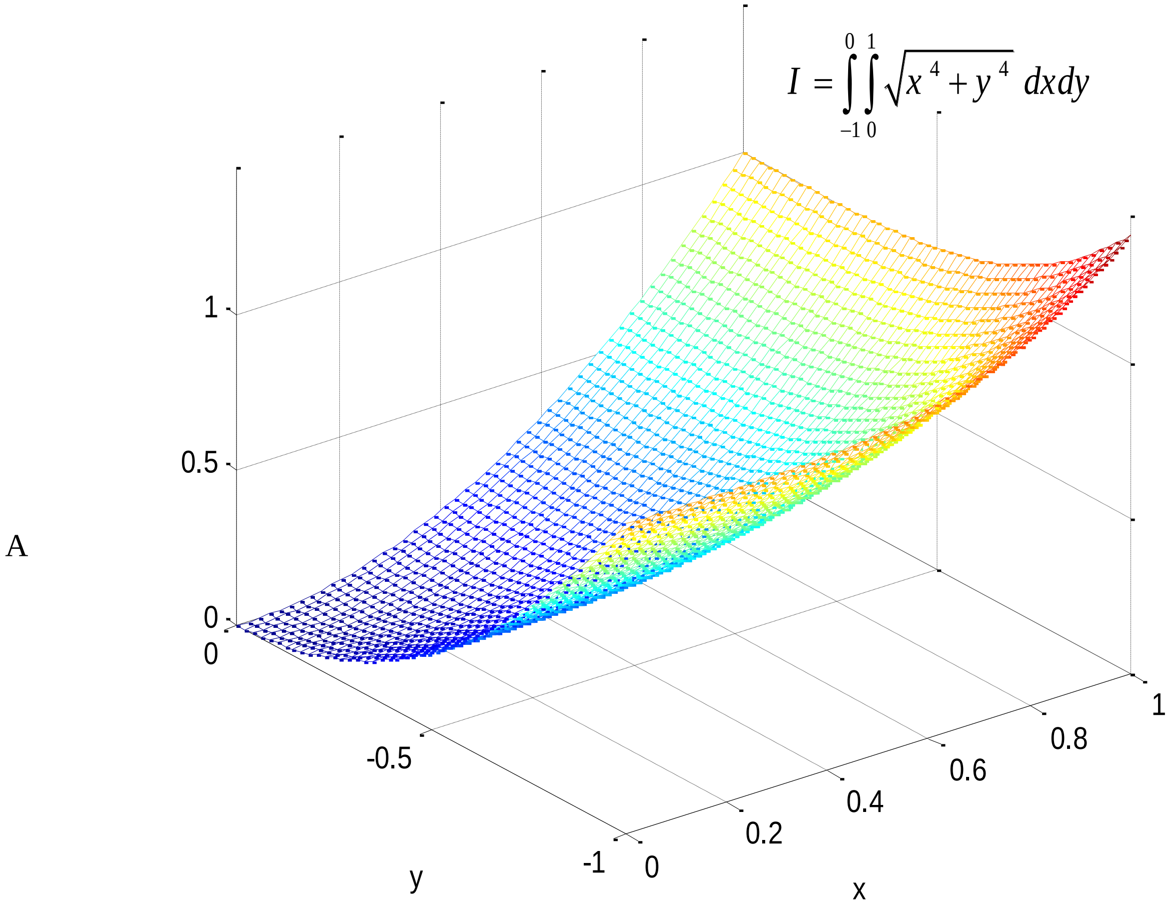


شكل رقم(2)

مثال 3

$$I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \sqrt{x^4 + y^4}\, dxdy$$

التكامل هنا من التكاملات التي ليس لها حلا" تحليليا" (الرسم البياني له موضح بالشكل رقم 3) كذلك المكامل مستمر لكنه معتل المشتقات الجزئية في النقطة (0,0) وهنا تكمن فائدة هذه الطريقة في ايجاد قيم تقريبية لهذا النوع من التكاملات من خلال ملاحظة تكرار القيمة في الاعمدة الثلاثة الاخيرة في الجدول (برنامج الماتلاب) عندما n=m=64 بعد استخدام تعجيل رومبرك [2],[3] بحدود تصحيح (2,4,6,8,10,12,…) بالرغم من وجود الاعتلال في المشتقة عند النقطة (0,0) بينما كانت القيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية باستخدام قاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين مقارنة مع هذه النتيجة كما مبين في الجدول رقم(3) .ويمثل هذا تطبيقا" للحالة الاولى (المبرهنة 1).علما" ان الوقت الذي استغرقه برنامج الماتلاب للحساب كان(4.56 ثانية).



شكل رقم(3)

n=m	MM	K=2	K=2.5	K=4	K=6	K=8	K=10
1	1.000000000000000						
2	0.982962913144534	0.977283884192712					
4	0.977422321143223	0.975575457142786	0.975208594243843				
8	0.975783506367566	0.975237234775680	0.975164605840140	0.975161673279893			
16	0.975326957146770	0.975174774073172	0.975161361434691	0.975161145140995	0.975161136757837		
32	0.975204406656240	0.975163556492730	0.975161147660535	0.975161133408925	0.975161133222701	0.975161133194866	
64	0.975172273409132	0.975161562326763	0.975161134105080	0.975161133201383	0.975161133198088	0.975161133197895	0.975161133197907
قيمة التكامل مقربة لاربعة عشر مرتبة عشرية $I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{1+x-y}\,dxdy \approx 0.975161133197907$							

جدول رقم(1)

n=m	MM	K=2	K=2.5	K=3.5	K=4	K=4.5	K=5.5	K=6	K=6.5
1	0.43301270189222								
2	0.47509375256599	0.48912076945725							
4	0.48457053638524	0.48772946432498	0.48743069930943						
8	0.48684215323603	0.48759935885297	0.48757142036380	0.48758506444288					
16	0.48739820148685	0.48758355090379	0.48758015634851	0.48758100337504	0.48758073263719				
32	0.48753536221080	0.48758108245212	0.48758055238364	0.48758059078255	0.48758056327638	0.48758055544554			
64	0.48756933393666	0.48758065784528	0.48758056666639	0.48758056805122	0.48758056653580	0.48758056668650	0.48758056694051		
128	0.48757777058749	0.48758058280444	0.48758056669037	0.48758056669270	0.48758056660213	0.48758056660520	0.48758056660336	0.48758056659801	
256	0.48757986975309	0.48758056947496	0.48758056661263	0.48758056660509	0.48758056659925	0.48758056659911	0.48758056659898	0.48758056659891	0.48758056659892
قيمة التكامل مقربة لاربعة عشر مرتبة عشرية $I=-\int_0^1\int_{-1}^0 x\sqrt{x^2+y}\,dxdy \approx 0.48758056659899$									

جدول رقم(2)

n=m	MM	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10	K=12
1	0.35355339059327						
2	0.50395165468759	0.55408440938570					
4	0.53492573297065	0.54525042573166	0.54466149348806				
8	0.54229229234725	0.54474781213945	0.54471430456664	0.54471514283772			
16	0.54411065102254	0.54471677058097	0.54471470114374	0.54471470743862	0.54471470573117		
32	0.54456378940434	0.54471483553161	0.54471470652832	0.54471470661379	0.54471470661055	0.54471470661141	
64	0.54467698335256	0.54471471466863	0.54471470661110	0.54471470661242	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241
$I = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{1} \sqrt{x^4 + y^4}\; dxdy$							

جدول رقم (3)

6.المناقشة :

يتضح من خلال نتائج جداول هذا البحث انه عند حساب القيم التقريبية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل بقاعدة النقطة الوسطى على كلا البعدين y, x وعندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة على البعد الخارجي قد اعطت هذه القاعدة (قاعدة MM) قيماً" صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات وباستعمال عدد من الفترات الجزئية من دون استخدام تعجيل رومبرك عليها ,على سبيل المثال في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية عندما n=m=64 وفي التكامل الثاني القيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية عندما n=m=256 وفي التكامل الثالث كانت القيمة صحيحة لثلاث مراتب عشرية عندما n=m=64 .

إلا إنه عند استعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة أعطت نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية مقارنة مع قيم التكاملات التحليلية أذ كانت مطابقة للقيمة التحليلية في التكامل الأول (14 مرتبة بعد الفاصلة) عندما $m = n = 64$ وفي التكامل الثاني (13مرتبة بعد الفاصلة) عندما $m=n=256$, وفي التكامل الثالث عندما $m = n = 64$ كانت النتيجة دقيقة لاربعة عشر مرتبة بعد الفاصلة وبذلك يمكن الاعتماد على طريقة RMM في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة ولكنها معتلة المشتقات الجزئية في غير احدى نهايتي منطقة التكامل.

المصادر

[1] Fox L.," Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 ,pp. 87-93 , 1967.

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands "Siamreview. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , The Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973

[4] Mohammed A. H. , "Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7, No.3, pp. 21-28 , 2002

[5] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , Blasdell Puplishing Company, pp. 1-2 ,599,113, chapter 5,1975.

[6] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi, pp 5-7 , 2008.

[7] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[8] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستيرمقدمة إلى جامعة الكوفة . 2010

[9] محمد , علي حسن , " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير مقدمة إلى جامعة البصرة , 1984.

برامج الماتلاب المستخدمة لحساب التكاملات الثنائية المعتلة المشتقات الجزئية

البرنامج (1)

هو ملف لكتابة الدالة $f\ (x,y)$ وفيه

function F= $f\,(x,y)$;

F= $\log(x+y)$;

البرنامج (2)

هو ملف لرسم مخطط الدالة $f\ (x,y)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]$

```
clc
clear
syms x y
ezmesh(log(x+y),[a,b,c,d],70)
```

البرنامج (2)

لايجاد قيمة التكامل الثنائي للدالة $w\ (x,y)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]$ بتطبيق الطريقة RMM .

```
tic
clear all
clc
a=0;b=1;c=-1;d=0;eps=10^(-18);
%find integral of function g(x)on the [a,b]
%using RM
D=[1,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20,22,24,26];
n=1;h=(b-a)/n;h1=(d-c)/n;
s(1,1)=1;
s(1,2)=h*h1*g(a+0.5*h,c+0.5*h1);
for i=2:12
 n=2^(i-1);s(i,2)=0;
 h1=(d-c)/n;
 for k=1:n
 h=(b-a)/n;
 for j=1:n
 s(i,2)=s(i,2)+h*h1*g(a+h*(2*j-1)/2,c+h1*(2*k-1)/2);
 s(i,1)=n;
 end
 end
 for l=3:i+1
  clc
  s(i,l)=(s(i,l-1)*2^D(l-2)-s(i-1,l-1))/((2^D(l-2))-1)
  end
   if abs(s(i,i+1)-s(i,i))<=eps;
   sprintf('%5.0f%2.13f',n,s(i,i+1))
   break
   else
   end
   end
xlswrite('E:/(Exma.8t8).xls',s,1,'A2')
toc
```