PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)
مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم
Available online at: https://www.jrucs.iq
JRUCS
Journal of AL-Rafidain University College for Sciences
AL- Rafidain University College

تقدير معلمات انموذج الانحدار الدائري الحصين JS لبيانات التفاف قرنية العين

هدى هديب عباس	أ.م. سهيل نجم عبود
hoda.hadib201a@coadec.uobaghdad.edu.iq	suhnaj2005@coadec.uobaghdad.edu.iq

قسم الإحصاء- كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد، بغداد، العراق.

المستخلص

في هذا البحث تم استعمال بيانات حقيقية عن العين تم الحصول عليها من مختبر جنة للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية **OCT** للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (100) مريض باستخدام التصوير المقطعي للجزء الأمامي من المدى البصري. والمتغيرين اللذان يمثلان البيانات المدروسة هما المتغير المستقل **(U)** ويمثل الزاوية بالرادين والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية والمتغير الثاني هو المتغير المعتمد **(V)** الذي يمثل زاوية العين بين انحناء القرنية الخلفي للقزحية. وتم اختبار البيانات من حيث احتوائها على قيم شاذة **(Outliers)** باستعمال احصاءة **COVARATIO** وتبين ان البيانات فيها قيم شاذة، وتم تطبيق خمسة طرائق للتقدير انموذج الانحدار الدائري **JS** وهي طريقة المربعات الصغرى الدائرية وطريقة مقدر **M** ومقدر المربعات الصغرى المبتورة الدائرية وطريقة مقدر **MM** وطريقة مقدر **S** وتم التوصل الى افضلية طريقة مقدر **M** على باقي طرائق التقدير في تقدير معلمات انموذج الانحدار الدائري **JS**.

معلومات البحث

تواريخ البحث

تاريخ تقديم البحث: 2022/12/29
تاريخ قبول البحث: 2023/3/3
تاريخ رفع البحث على الموقع: 2023/12/31

الكلمات المفتاحية

الحصانة، الانحدار الدائري، مقدر M الدائري، مقدر المربعات الصغرى، مقدر المربعات الصغرى المبتورة الدائرية الحصينة، مقدر MM، مقدر S، الاحصاء الدائري، البيانات الدائرية، المشاهدات الشاذة، أحصاءة COVARATIO

للمراسلة:

هدى هديب عباس
hoda.hadib201a@coadec.uobaghdad.edu.iq

https://doi.org/10.55562/jrucs.v54i1.594

1. المقدمة

إنَّ ما يشغل الباحث في حقول المعرفة كافة هو طبيعة البيانات فمن النادر جدا أن تكون هذه البيانات مهيأة مباشرة لاستخدام الأساليب الإحصائية المناسبة للتقدير , فعند حصول حالة خرق لإحدى الشروط المطلوبة للتقدير أو عدم الدقة في البيانات فانه يستوجب البحث عن أساليب مختلفة لمعالجة تلك الحالات. ومن البيانات التي تواجهنا في كثير من التطبيقات العملية هي البيانات التي تكون مقاسة بشكل زوايا بالدرجات أو الراديان مثل زوايا كسر العظم وزوايا انحناء قرنية العين وغيرها. لقد زادت التطبيقات على المتغيرات الدائرية في العقدين الماضيين, وتنوعت في العديد من المجالات بما في ذلك علم الأحياء والأرصاد الجوية والطب. وعلى الرغم من أن أنموذج الانحدار الدائري الأول يعود إلى (Gould, 1969) وبعده تم اقتراح أنواع مختلفة من هذه النماذج ؛ لكن لا تزال دراسة القيم المتطرفة وحصانة نماذج الانحدار الدائري غير مدروسة بشكل جيد. اذ استعملت اساليب الكشف عن القيم المتطرفة بناءً على نموذج الانحدار الدائري البسيط من خلال توسيع الطرائق الشائعة من الانحدار الخطي. وقد يحدث في بعض الأحيان عند القيام بعملية التحليل الاحصائي لمجموعة من البيانات أن بعض المشاهدات تنحرف أو تشذ عن الكمية الأكبر من المشاهدات الموجودة معها والتي يطلق على تلك المشاهدات المنحرفة تسمية شواذ (Outliers) والتي في حالة وجودها ضمن البيانات فأن المقدرات التقليدية تخفق في إعطاء تقديرات دقيقة عن معلمات المجتمع الإحصائي الذي سحبت منه تلك البيانات بسبب اختراق الشروط الأساسية لها , لذا فأن استخدام التحليلات الاحصائية لبيانات تحتوي على قيم شاذة يعد مشكلة حقيقية ويجب تجنبها. وفي نفس الوقت تواجهنا بيانات مسجلة بالدرجات او بالزوايا النصف قطرية في مجموعات مختلفة من مجالات البحث العلمي منها اتجاهات الرياح اليومية واتجاهات تيار المحيط واتجاه مستوى كسر العظام. لا يمكن استخدام نماذج الانحدار الاعتيادية معها لذلك لابد من استخدام انموذج يطبق على تلك البيانات الدائرية . فقد تم اقتراح صيغ مختلفة من هذه النماذج الدائرية؛ ولكن لا تزال مشكلة دراسة القيم الشاذة وانموذج الانحدار الدائري الحصين لم تؤخذ بعين الاعتبار لحد الان والتي تعد مشكلة حقيقية عندما

تواجهنا مشكلة وجود قيم شاذة ضمن البيانات المدروسة. تنبأ الباحث (Goud, 1969) بالمتوسط الاتجاهي لمتغير استجابة دائري ومجموعة متغيرات مستقلة خطية وتم بعد اقتراحه العديد من نماذج الانحدار الدائري (Alshqaq, et al, 2021,1). فقد تمكن الباحثان جامالامادكا وسارما (Jammalamadaka & Sarma, 1993) من طرح مفهوم الانحدار الدائري لبيانات تمثل اتجاهات تقاس كزوايا في مستوى مع الإشارة إلى إحساس ثابت بالدوران واتجاه ثابت للصفر، حيث ناقشا بعض الطرائق التجريبية والاختبارات المقاربة لتحديد درجة معادلة الانحدار وطورا بعض الخوارزميات العددية لإيجاد معاملات الانحدار الدائري (Jammalamadaka & Sarma, 1993). في عام (2008) استعمل (Mohamed) وآخرون طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معاملات أنموذج الانحدار الخطي البسيط وأنموذج الانحدار الخطي البسيط عندما تكون المتغيرات دائرية بخطأ عشوائي له توزيع Von-Mises بمتوسط صفر وتباين k . في عام (2013) إقترح (A.H. Abuzaid) وآخرون إحصاءة عددية جديدة سميت متوسط الخطأ الدائري (Mean Circular error). في نفس العام (2013) استعمل (A. Ibrahim) وآخرون طريقة المربعات الصغرى (OLS) لتقدير معلمات انموذج الانحدار الدائري لـ JS واعتمدوا على إحصاءة COVARATIO وطريقة حذف الصف لتحديد واكتشاف القيم الشاذة في أنموذج JS. في عام (2015) استعمل (Rambli) وآخرون إحصاءة COVARATIO لتحديد واكتشاف القيم الشاذة في أنموذج الانحدار الدائري الذي اقترحه كل من (Downs & Mardia, 2002) وتم تقييم اداء الطريقة عن طريق تجارب محاكاة مونت-كاروا. في عام (2017) اقترح (A. Mahmood) وآخرون احصاءة جديدة لتحديد القيم الشاذة المتعددة في أنموذج الانحدار الدائري البسيط تعتمد على حساب المسافة الدائرية الحصينة بين البواقي الدائرية ومعلمة الموقع الدائرية وتم تقييم اداء الطريقة المقترحة باستعمال المحاكاة. في نفس العام (2017) اقترحا (Jha & Biswas) مقدر الامكان الأعظم المبتور الحصين (Robust Maximum Trimmed estimator RMTE) الذي اعتمد على مسافة الـ (جتا) (Cosine Distance) لتقدير انموذج الانحدار الدائري –الدائري (Circular- Circular regression) المقترح من قبل (Kato et al., 2008). في عام (2019) عرف (Alkasadi) وآخرون القيم الشاذة في أنموذج الانحدار الدائري المتعدد (MCRM) الذي اقترح من قبل (Ibrahim, 2013) والذي يدرس العلاقة بين متغيرين دائريين أو اكثر, حيث قاموا بتوسيع احصاءة DFFITS الذي اقترحت من قبل (Belsley, 1980) واختبروا الطريقة باستعمال تجارب محاكاة مونت-كارلوا . في عام (2020) اقترح (.A Mahmood) وآخرون طرائق حصينة لتقديم معلمات أنموذج الانحدار الدائري وهي طريقة الامكان الاعظم الموزونة (Maximum Weighted Likelihood Estimation MWLE) وطريقة الامكان الاعظم المبتورة (Maximum Trimmed Likelihood Estimation MTLE) وتم مقارنة الطريقتين الحصينتين باستعمال محاكاة مونت- كارلوا باستعمال المعايير الاحصائية متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدرات والتباين (Variance) ومقدار التحيز (Bias). في عام (2021) وَسَع (Alshqaq) وآخرون مقدرات M الحصينة (M-Estimation) ومقدرات المربعات الصغرى المبتورة (-Least Trimmed squares LTS) ومقدرات مربعات اقل وسيط (Least-median squares LMS) من أنموذج الانحدار الخطي التقليدي الى أنموذج الانحدار الدائري JS (Jammalamadaka & Sarma, 1993) الذي يتصف بصفاته الجيدة وحساسيته في اكتشاف القيم الشاذة.

2. الإحصاء الدائري (Circular Statistics) (Pewsey et al., 2013, 16)

يشير مصطلح الإحصاء الدائري إلى فرع معين من فرع الإحصاء الذي يتعامل مع البيانات التي يمكن تمثيلها كنقاط على محيط دائرة الوحدة (Unit Circle). إذ يطلق على هكذا نوع من البيانات بالبيانات الدائرية (Circular Data) . ومصطلح البيانات الدائرية يستخدم لغرض تمييزها عن البيانات الخطية (Linear Data) المعتاد عليها كثيراً في التحليلات. حيث إن الداعم (Support) للبيانات الدائرية هو دائرة الوحدة، بينما للبيانات الخطية يكون الداعم هو خط الأعداد الحقيقي . تدخل البيانات الدائرية في مختلف التخصصات مثل علم الأحياء، الطب، تحليل الصور، علوم الأرض، الفيزياء، الدراسات السياسية، وعلم الفلك. في الفضاء ثنائي الأبعاد، ويمكن تمثيل أي نقطة إما بإحداثياتها الديكارتية كـ (u ،v) أو بإحداثياتها القطبية كـ (r ،θ) ، حيث r هي المسافة من محيط الدائرة إلى نقطة الأصل. في التحليل الدائري ، يتم التركيز على الاتجاه فقط ، لذلك يتم اعتبار المتجه r بطول الوحدة (أي r = 1). لذلك، يمكن تمثيل أي نقطة على الدائرة كـ ((Cos (θ) ،Sin (θ).ومن الأمثلة على البيانات الدائرية الاتجاهات المقاسة باستخدام أدوات مثل البوصلة أو المنقلة أو ريشة الطقس او الفرجال. فمن المعتاد تسجيل مثل هذه الاتجاهات بالزوايا المعبر عنها بالدرجات (Degrees) أو الراديان (Radians) إما في اتجاه عقارب الساعة أو عكس اتجاه عقارب الساعة من نقطة أصل الدائرة ، والتي يشار إليها باسم الاتجاه الصفري. فالمطلوب هو تحديد موقع النقطة والاتجاه وليس كما في البيانات على الخط الحقيقي ؛ فالقيم الموجودة على يسار نقطة الأصل (0) تكون سالبة والقيم الموجودة على اليمين تكون موجبة. وبالنسبة للبيانات الدائرية ، كل زاوية تعرف كنقطة على محيط دائرة الوحدة، تمامًا كما تحدد كل قيمة لمتغير خطي كنقطة على الخط الحقيقي. ومع زيادة القيمة المطلقة للمتغير الخطي ، نبتعد عن نقطة الأصل. لذلك، في الخط الحقيقي، تكون القيمة 360 قريبة نسبيًا من القيمة 355 ولكنها بعيدة نسبيًا عن نقطة الأصل. ولكن بالنسبة للمتغيرات الدائرية تقابل الزاوية 355 درجة نقطة على محيط دائرة الوحدة قريبة من تلك المقابلة لـ 360 درجة ، فإن الزاويتين 0 و 360 درجة تحددان نفس النقطة بالضبط. هذه الطبيعة الدورية للبيانات الدائرية هي التي تجبرنا على التخلي عن الأساليب الإحصائية التقليدية المصممة للبيانات الخطية وتجعلنا نبحث عن تلك التي تخدم البيانات الدائرية وتأخذ هذه الأساليب في نظر الاعتبار بنية هذه البيانات.

3. البيانات الدائرية (Circular Data) (G Pramesti, 2018, 2-3)

غالباً ما يتم تمثيل القياسات في اي مجال بعدد حقيقي، ولكن في الواقع وفي العديد من المجالات المتنوعة يمكن قياس اي مشاهدة على انها اتجاه (Direction)، على سبيل المثال اتجاه الرياح، اتجاه الطيور المهاجرة كبيانات دائرية يمكن قياسها بالبوصلة او الساعة، ويمكن ايضاً اعتبار عمر الكون واتجاهات الكائنات الحية واتجاه الملوثات اعتبارها مشاهدات اتجاهية ويشار

الى مثل هذه البيانات بالبيانات الاتجاهية (Direction Data)، حيث يمكن تمثيل الاتجاه كنقاط على محيط دائرة الوحدة او متجهات وحدة تربط نقطة الأصل بهذه النقاط. وبالتالي تسمى البيانات ثنائية الابعاد بالبيانات الدائرية (Circular Data) وتسمى المشاهدات في ثلاثة ابعاد بالبيانات الكروية (Spherical Data) . ويمكن تمثيل البيانات الدائرية بالزاوية θ والتي مداها $[0, 2\pi]$ او $[-\pi, \pi]$. والزاوية θ تكون دورية حيث ان $\theta=\theta+2k\pi$. وبجانب البيانات الدائرية فان المتغير العشوائي الذي له قيمة على نصف دائرة الوحدة والتي لها المجال $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ او $[0, \pi]$ والتي تدعى بالبيانات المحورية (Axial) او البيانات النصف دائرية (Semi-Circular Data).

4. المشاهدات الشاذة (Outlier Observations)

يُقصد بالشذوذ في البيانات وجود وتداخل آليات عشوائية مختلفة أحداهما تنتج غالبية البيانات، والأخرى مسؤولة عن حدوث القيم الشاذة. وحتى لو تمكنا من تحديد أنموذج لغالبية البيانات، فليس من الواضح كيفية اختيار اتجاهات الانحرافات عن افتراضات الأنموذج التي تسببها القيم الشاذة. بهذا المعنى، فمن المفترض أن تكون القيم الشاذة في البيانات قيماً غير متوقعة، ولا يمكن للتحليل الكشف عن عملية توليدها العشوائي. ولقد عرف كل من Barnett and Lewis (1994), Davies and Gather (1993), Markatou et al. (1998), and Gather et al. (2003) القيم الشاذة بانها قيم مأخوذة عن ظواهر والتي تتلقى احتمالاً صغيراً في ظل الإنموذج المفترض. (Farcomeni & Gareco, 2015, 4). وتعرف القيمة الشاذة (Outlier) أو القيمة المُلَوثة (Contaminants) بانها نقاط إعتباطية في الطبيعة تمثل مشاهدة او مجموعة من المشاهدات خارجة عن النمط الطبيعي لمجموعة البيانات .(هبة الله : 2005 , 4) وانها نقاط بيانات تكون مبتعدة عن غالبية نقاط البيانات الاخرى (أي أنها مشاهدات لا تنسجم مع بقية بيانات المجموعة لأي متغير من المتغيرات لظاهرة معينة أو لمجموعة من الظواهر) , فقد تكون قيمة هذه المُشاهدة كبيرة أو قد تكون صغيرة واقعة في أحد طرفي مجموعة المُشاهدات المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً، وأن شذوذها قد يكون في حالات كثيرة مسألة طبيعية ملازمة لبعض المتغيرات (الياسري: 2007, 6). وتكون مولدة بطريقة مختلفة عن طريقة توليد المشاهدات الاصلية. وهي المشاهدات التي تظهر بصورة غير متناسقة مع ما تبقى من مجموعة البيانات , Obikee & et.al., 2014) (536. كما عرفها الباحثان (Rousseeum & Leroy) عام (1987) بأنها مشاهدات في الانحدار التي تنحرف عن الجزء الاكبر من البيانات. (Hekimoglu & Erenoglu , 2013, 421) في حين عرف الباحثان (Barnett & Lewis) في عام (1994) القيم الشاذة بأنها (المشاهدات التي تظهر بصورة غير متناسقة مع ما تبقى من مجموعة البيانات) .

5. أصناف المشاهدات الشاذة (Classes of Outlier Observations)

في عام (2015) صنف كل من الباحثين (Lukman , et al.) القيم الشاذة الى ثلاث فئات قيم شاذة في المحور V (قيم شاذة رأسية او عامودية). وقيم شاذة في كلا الاتجاهين (محور المتغير التوضيحي , محور المتغير التابع V). و قيم شاذة في محور المتغير التوضيحي U تسمى (نقاط الرفع أو نقاط الانعطاف العالية) (HLPs) وقد سميت بهذا الاسم لأنها تعطف او تميل خط أنموذج الانحدار نحوها وبالتالي تسبب مشاكل اكثر خطورة من القيم الشاذة العامودية في المحور V.
(Lukman , et al., 2015, 55)

6. أنموذج الانحدار الدائري

JS (Jammalamadaka & Sarma Circular regression model)

اقترح (Jammalamadaka and Sarma, 1993) أنموذج انحدار دائري لمتغيرين عشوائيين دائريين U وV للتنبؤ بـ V بواسطة U في سياق التوقع الشرطي لـلمتجه e^{iv} بمعلومية u وكالآتي:

$$E(e^{iv}|u) = \rho(u)e^{i\mu(u)} = g_1(u) + ig_2(u), \quad (1)$$

إذ أن:

$$e^{iv} = \cos(v) + i\sin(v) \quad (2)$$

$\mu(u)$ يمثل المتوسط الشرطي الاتجاهي لـ V بمعلومية U.

$\rho(u)$ معلمة الكثافة الشرطية (Conditional concentration parameter) للدوال الدورية $g_1(u), ig_2(u)$ والتي تكتب كالآتي :

$$E(\cos(v|u)) = g_1(u) \quad (3)$$

$$E(\sin(v|u)) = g_2(u) \quad (4)$$

بعد ذلك يمكن التنبؤ بـ V إذ أن:

$$\mu(u) = \hat{v} = \arctan * \frac{g_2(u)}{g_1(u)} = \begin{cases} \arctan \frac{g_2(u)}{g_1(u)} & \text{if } g_1(u) > 0 \\ \pi + \arctan \frac{g_2(u)}{g_1(u)} & \text{if } g_1(u) < 0 \\ \text{undefined} \quad \text{if } g_1(u) = g_2(u) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

وباعتبار ان $g_1(u)$ و $g_2(u)$ دوال دورية (Periodic Function) ضمن الفترة 2π. لذلك يتم تقريب هذه الدوال باستعمال دوال مناسبة لذلك سيكون التقريب باستعمال متعددة حدود مثلثية لدرجة مناسبة m وبموجب أنموذجي شبيهين بأنموذج الانحدار:

$$V_{1j} = g_1(u) = \cos(v_j) \simeq \sum_{k=0}^{m} \left(A_k \cos(ku_j) + B_k \sin(ku_j)\right) + \varepsilon_{1j} \tag{6}$$

$$V_{2j} = g_2(u) = \sin(v_j) \simeq \sum_{k=0}^{m} \left(C_k \cos(ku_j) + D_k \sin(ku_j)\right) + \varepsilon_{2j} \tag{7}$$

لـ $j = 1, \dots, n$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ هو متجه الاخطاء العشوائية الذي له توزيع طبيعي ثنائي (Bivariate Normal distribution) بمتجه متوسطات يساوي صفر ومصفوفة تباين مجهولة Σ , وان (A_k, B_k, C_k, D_k) هي معلمات الانموذجين, اذ أن k= 0,1,2,…..,m.

ويمكن تقدير الاخطاء القياسية (Standard errors) ومصفوفة التباين المجهولة Σ بافتراض أن $B_0 = D_0 = 0$ لضمان امكانية تعريف الانموذج.

(Alshqaq2, et al., 2021, 2) (S. IBRAHIM et al., 2013) (Jammalamadaka and Sarma, 1993)

7. تقدير المربعات الصغرى الدائرية (Circular Least Squares Estimation)

ليكن $(u_1, v_1), \dots, (u_n, v_n)$، عينة عشوائية دائرية بحجم n، فالمعادلة (1) يمكن ان تلخص كالآتي:

$$V^{(1)} = (V_{11}, \dots, V_{1n})' \tag{8}$$

$$V^{(2)} = (V_{21}, \dots, V_{2n})' \tag{9}$$

$$\varepsilon^{(1)} = (\varepsilon_{11}, \dots, \varepsilon_{1n})' \tag{10}$$

$$\varepsilon^{(2)} = (\varepsilon_{21}, \dots, \varepsilon_{2n})' \tag{11}$$

$$U_{nx(2m+1)} = \begin{bmatrix} 1 & cosu_1 & cosmu_1 & sinu_1 & \vdots & sinmu_1 \\ 1 & cosu_2 & cosmu_2 & sinu_2 & \vdots & sinmu_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & cosu_n & cosmu_n & sinu_n & \vdots & sinmu_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

ولغرض التبسيط سيتم تسمية متجه المعلمات للأنموذجين (6) و (7) كالآتي:

$$\lambda^{(1)} = (A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots \dots . B_m)' \tag{13}$$

$$\lambda^{(2)} = (C_0, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots \dots . D_m)' \tag{14}$$

لذلك فان المعادلتين (13) و (14) يمكن ان تكتبا بصيغة المصفوفات كالآتي:

$$V^{(1)} = U\lambda^{(1)} + \varepsilon^{(1)} \tag{15}$$

$$V^{(2)} = U\lambda^{(2)} + \varepsilon^{(2)} \tag{16}$$

فان تقديرات المربعات الصغرى يكون كالآتي:

$$\hat{\lambda}^{(1)} = \min \sum_{i=1}^{n} (V_j^{(1)} - U\lambda^{(1)})^2 \tag{17}$$

$$\hat{\lambda}^{(2)} = \min \sum_{j=1}^{n} (V_j^{(2)} - U\lambda^{(2)})^2 \tag{18}$$

ومن المعادلتين (17) و (18) نحصل على تقديرات المربعات الصغرى الدائرية باشتقاق الصيغتين نسبة للمعلمات المراد تقديرها ومساواة المشتقة الاولى بالصفر ينتج الآتي:

$$\hat{\lambda}^{(1)} = (U'U)^{-1}U'\,V^{(1)} \tag{19}$$

$$\hat{\lambda}^{(2)} = (U'U)^{-1}U'V^{(2)} \tag{20}$$

8. الحصانة في انموذج انحدار JS (Robustness in JS model)

تعد مشكلة وجود القيم الشاذة من المشاكل الشائعة في التحليل الاحصائي، والتي تعرف بانها المشاهدات التي تختلف كثيراً عن باقي المشاهدات في مجموعة البيانات. اذ وجد (Ibrahim et al. , 2013) الحصانة في انموذج انحدار JS واستنتج بان انموذج JS حساس لوجود الشواذ ومن المحتمل ان يؤدي الى تأثيرات فعالة على تقديرات المربعات الصغرى لأنموذج JS . (Ibrahim et al. , 2013, 2275)، فلذلك يمكن دراسة الحصانة في أنموذج الانحدار الدائري JS من اتجاهين :

أ. القيم الشاذة العمودية الدائرية (Circular Vertical Outliers)

وهي القيم الشاذة في المتغير المعتمد V ، فاذا تم استبدال V_{1j} بـ $V^*_{1j} = Z_1V_{1j}$ و V_{2j} بـ $V^*_{2j} = Z_2V_{2j}$ والذي يؤدي الى:

$$V_{1j} = {Z_1}^{-1}{V^*}_{1j} \tag{21}$$

$$V_{2j} = {Z_2}^{-1}{V^*}_{2j} \tag{22}$$

فإن الانحدار الدائري في المعادلة (1) يمكن ان يكتب كالآتي:

$$ {Z_1}^{-1}{V^*}_{1j} = \cos(v_j) = \sum_{k=0}^{m} \left(A_k\cos(ku_j) + B_k\sin(ku_j)\right) + \varepsilon_{1j} \tag{23}$$

$$ {Z_2}^{-1}{V^*}_{2j} = \sin(v_j) = \sum_{k=0}^{m} \left(D_k\cos(ku_j) + C_k\sin(ku_j)\right) + \varepsilon_{2j} \tag{24}$$

اذ ان $\mathbf{Z_1}$ و $\mathbf{Z_2}$ المتغيرات الدائرية التي تحتوي قيما شاذة، وان مقدرات المربعات في ظل وجود القيم الشاذة يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\hat{\lambda}^{(1)}\left(U, {V^*}_{1j}\right) = {Z_1}^{-1}\hat{\lambda}^{(1)}(U, V_{1j}) \tag{25}$$

$$\hat{\lambda}^{(2)}\left(U, {V^*}_{2j}\right) = {Z_2}^{-1}\hat{\lambda}^{(2)}(U, V_{2j}) \tag{26}$$

ب. نقاط الانعطاف الدائرية (Circular Leverage Points)

وهي القيم الشاذة في المتغير المستقل U , فاذا تم استبدال U ب $U^* = ZU$ فان:

$$\hat{\lambda}^{(1)}\left(U^*, V_{1j}\right) = {Z_1}^{-1}\hat{\lambda}^{(1)}(U, V_{1j}) \tag{27}$$

$$\hat{\lambda}^{(2)}\left(U^*, V_{2j}\right) = {Z_1}^{-1}\hat{\lambda}^{(1)}(U, V_{2j}) \tag{28}$$

(Alshqaq2, et al., 2021,3) (Alshqaq, 2021, 2-3)

9. تقدير M الحصين الدائري (Circular Robust M-estimation)

قدم الباحث (Huber, 1964) مقدرات أطلق عيها مقدرات الامكان الأعظم النوعية (Maximum Likelihood Type estimators) ويرمز لها بـ (M)، تعتمد فكرتها على تصغير دالة في البواقي بدلاً من تصغير البواقي نفسه. ومن المعروف أن فكرة طريقة المربعات الصغرى (OLS) تعتمد على تصغير مجموع مربعات الخطأ (البواقي) اقل ما يُمكن أي:

$$\min_{\hat{\lambda}^{(p)}} \sum_{i=1}^{n} \left(V_j - U\lambda^{(p)}\right)^2 \quad ; p = 1, 2 \tag{29}$$

ولكن طريقة M-estimate الحصينة تقوم بتصغير دالة الهدف بدلاً من تقليل مجموعة مربعات الخطأ لدالة الهدف حيث انها تعتمد على تصغير دالة الهدف الآتية:

$$\min_{\hat{\lambda}^{(p)}} \sum_{i=1}^{n} P\left(V_j - U\lambda^{(p)}\right)^2 \quad ; p = 1, 2 \tag{30}$$

إذ أن P دالة محدبة متماثلة (Symmetric Convex Function) غير متناقصة حدودها [0, ∞) مستمرة وقابلة للاشتقاق نحصل منها على مقدرات حصينة اذ تكون اقل حساسية للقيم الشاذة من مجموع المربعات. إذ ان P المنطقية والمعقولة يجب ان تمتلك الخصائص الآتية:

$p(e) \geq 0$
$p(0) = 0$
$p(e) = p(-e)$
$p(e) = p(e')$ لكل $|e| \leq |e'|$

اذ أنه يمكن الحصول على مقدرات معلمات إنموذج الانحدار الدائري بتصغير المعادلتين:

$$\hat{\lambda}^{(1)}\left(U^*, V_{1j}\right) = min \sum_{i=1}^{n} P\left({V^{(1)}}_j - U\lambda^{(1)}\right)^2 \tag{31}$$

$$\hat{\lambda}^{(2)}\left(U^*, V_{2j}\right) = min \sum_{i=1}^{n} P\left({V^{(2)}}_j - U\lambda^{(2)}\right)^2 \tag{32}$$

بأخذ المشتقة الجزئية بالنسبة للمعلمات ومساواتها للصفر وكما يأتي:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \psi\left(V_j - U\lambda^{(p)}\right)^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \psi\left(V_j - U\lambda^{(p)}\right)^2 = 0 \end{cases} \tag{33}$$

إذ أن ψ تمثل المشتقة الجزئية للدالة $\psi = P'$ بالنسبة للمعلمات. وأن المعادلة (33) يمكن ان نحصل منها على مقدرات المربعات الصغرى.

وتعد دالة Huber او Biweight من الدوال المستخدمة بشكل واسع في طريقة M الحصينة والتي يمكن ان تعرف من خلال مصفوفة الوزن $W = diag(w)$, اذ أن $w = \frac{\psi(\varepsilon)}{\varepsilon}$ ، فان المعادلة (2-88) يمكن اعادة صياغتها كالآتي:

$$\begin{cases} W^{(1)}\left(V^{(1)} - U\lambda^{(1)}\right) = 0 \\ W^{(2)}\left(V^{(2)} - U\lambda^{(2)}\right) = 0 \end{cases} \tag{34}$$

اذ ان:

$$\begin{cases} W^{(1)} = \dfrac{\psi\left(V^{(1)} - U\lambda^{(1)}\right)}{\left(V^{(1)} - U\lambda^{(1)}\right)} \\ W^{(2)} = \dfrac{\psi\left(V^{(2)} - U\lambda^{(2)}\right)}{\left(V^{(2)} - U\lambda^{(2)}\right)} \end{cases} \tag{35}$$

فيمكن كتابة المعادلة (35) كالآتي:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} W^{(1)}(V^{(1)} - U\lambda^{(1)})U \\ \sum_{i=1}^{n} W^{(2)}(V^{(2)} - U\lambda^{(2)})U \end{cases} \tag{36}$$

ويمكن دمج المعادلات في (36) في المصفوفة المفردة الآتية:

$$U^T W^{(1)} U \lambda^{(1)} = U^T W^{(1)} U V^{(1)} \qquad (37)$$

$$U^T W^{(2)} U \lambda^{(2)} = U^T W^{(2)} U V^{(2)} \qquad (38)$$

هذا يعني ان المقدرات الحصينة لأنموذج الانحدار الدائري JS يمكن الحصول عليها كالآتي:

$$\hat{\lambda}^{(1)} = \left(U^T W^{(1)} U\right)^{-1} \; U^T W^{(1)} V^{(1)} \qquad (39)$$

$$\hat{\lambda}^{(2)} = \left(U^T W^{(2)} U\right)^{-1} \; U^T W^{(2)} V^{(2)} \qquad (40)$$

اذ ان $W^{(1)}$ و $W^{(2)}$ هي مصفوفة الاوزان ببعد nxn .

اقترح الباحث Huber عند العدد الصحيح M=1.345 دالة الهدف الآتية:

$$\hat{\lambda}^{(2)} = \left(U^T W^{(2)} U\right)^{-1} \; U^T W^{(2)} V^{(2)}$$

$$P(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon^2 & for\ |\varepsilon| \leq M \\ 2M|\varepsilon| - M^2 & for\ |\varepsilon| > M \end{cases} \qquad (41)$$

اذن فان ψ تعطى كالآتي:

$$\psi(\varepsilon) = \begin{cases} 2\varepsilon & for\ |\varepsilon| \leq M \\ 2M\mathrm{sgn}(\varepsilon) & for\ |\varepsilon| > M \end{cases} \qquad (42)$$

فان دالة الوزن تعطى كالآتي:

$$W(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & for\ |\varepsilon| \leq M \\ \dfrac{M}{|\varepsilon|} & for\ |\varepsilon| > M \end{cases} \qquad (43)$$

وبسبب تزايد الاهتمام بطريقة مقدرات M خلال العقود الماضية دفع الكثير من الباحثين والإحصائيين بالاهتمام بأسلوب التقديرات الحصينة أمثال (Hample, Hinich, Talwar, and Rews) إلى اقتراح كثير من الدوال $\psi_i(.)$. بحيث تعطي مقدر غير شديد الحساسية Non Sensitivity وغير متأثر بالشواذ .

10. مقدر المربعات الصغرى المبتورة الحصينة الدائرية

(Circular Robust Least Trimmed Squares estimator)

اقترحت هذه الطريقة من الباحث (Rousseew) عام (1984 م)، أن مقدر (RLTS) يحقق نقطة انهيار عالية (BP =0.5)، كونه لا يتأثر بوجود القيم الشاذة، أن المقدر الناتج من هذه الطريقة يدعى بمقدر المربعات الصغرى المبتورة ويرمز له بالرمز(LTS) ويتم حسابه وفقاً للصيغة الآتية:

$$\hat{\lambda}_{(p)LTS} = {}^{\arg\min}{}_{\lambda} \; Q_{LTS}\ (\lambda) \qquad (44)$$

وان:

$$Q_{LTS}\left(\lambda_{(p)}\right) = \sum_{i=1}^{h} {r_j}^2 \qquad (45)$$

h : ثابت وشروطه ($\frac{n}{2} < h < n$) . وان $r_{(1)}^2 \leq r_{(2)}^2 \leq \cdots \leq r_{(n)}^2$ وان:

$$r = 1,2,..,p\ ; \quad p = 1,2$$

تمثل مربعات البواقي الاتجاهية المرتبة من اقل قيمة الى اعلى قيمة اذ أن:

$$r_i^2 = \frac{\left({V^{(p)}}_j - U\lambda^{(p)}\right)^2}{1 + \hat{\lambda}_{(p)}{}'\hat{\lambda}_{(p)}} \quad , \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (46)$$

(A. S. Shvedov , 2016, 11)

ان h هو عدد النقاط البيانات الجيدة (غير المشذبه) والتي تكون مستبعدة في المجموع، وأن المقدر يعطي تقديرا حصينا من خلال تعريف $n-h$ من النقاط والتي يكون لها أكبر البواقي كالشواذ، مما يسمح باستبعاد هذه النقاط من مجموعة البيانات بشكل كامل اعتماد على قيمة h التي تكون قريبة جدًا من نقاط البيانات الجيدة وذلك لان أعلى عدد من النقاط الجيدة يستعمل في التقدير, وفي هذه الحالة فأن مقدر (RLTS) سوف يعطي افضل تقدير ممكن.

(Rousseeuw & Driessen, 2006, 31-33) (Chen, 2015, 5-6)

11. مقدر أم أم الحصين الدائري (Circular Robust MM-Estimator)

أُقترح هذا المقدر من قبل الباحث (Yohai) عام (1987) ويعد واحداً من أكثر الطرائق شيوعاً التي تستخدم في مجال التقدير الحصين، أن هذا المقدر يمتلك العديد من الخصائص الجيدة منها أن لها كفاءة عالية في حالة التوزيع الطبيعي للأخطاء مع نقطة الانهيار العالية، وان سبب تسميته بهذا الاسم (RMM) كونه يستخدم اكثر من عملية لمقدرRM، أن مقدر(RMM) ممكن أيجاده وفقاً للخطوات التالية:

1. تحديد مقدر أولي ذو نقطة انهيار عالية، وليس ضرورياً أن يكون كفوء، نرمز له بالرمز $(\hat{\lambda}_{(p)s})$ وباستعماله يتم حساب البواقي الاولية وفقاً للصيغة التالية:

$$r_i(\hat{\lambda}_{(p)s}) = V_i - U_i'\hat{\lambda}_{(p)s} \qquad , \quad 1 < i < n \tag{47}$$

2. يتم حساب مقدرM القياسي (S_n) للبواقي الاولية $r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})$ وفق معادلة M التقديرية للمعلمات وبالشكل الآتي:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p\left(\frac{r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})}{S}\right) = 0.5 \tag{48}$$

$$S_n = S\left(r_1(\hat{\lambda}_{(p)s}), \ldots, r_n(\hat{\lambda}_{(p)s})\right) \tag{49}$$

3. مقدر(RMM) يعرف كمقدر M لـ $\hat{\lambda}_p$ باستعمال دالة (re-descending score):

$$\psi_1(u) = \frac{\partial\, p_1\left(r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})\right)}{\partial r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})} \tag{50}$$

عليه فأن مقدر(RMM) والذي نرمز له بالرمز $\hat{\lambda}_{(p)MM}$ ناتج من حل المعادلة الآتية:

$$\sum_{i=1}^{n} U_{ij}\psi_1\left(\frac{V_i - U_i'\lambda_p}{S_n}\right) = 0 \qquad , \qquad i,j = 1,2,\ldots,n \tag{51}$$

أن تقدير القياس S_n يتم أيجاده في الخطوة (2) .

اذ أن:

$$r_i(\lambda_p) = V_i - U_i'\lambda_p \tag{52}$$

(Lukman, et.al., 2015, 58)

12. مقدر S الحصين الدائري (Circular Robust S-Estimator)

اقترح الباحث (Yohal, 1987) مقدرات مرتبطة بمعلمة القياس $(\hat{\sigma}_{MAD})$ الخاصة بمقدرات (M) سميت هذه المقدرات بمقدرات S . تعتمد عملية التقدير بموجب هذه الطريقة على البواقي القياسية لطريقة M , وانها تمتلك نفس الخصائص التقاربية لمقدرات M . في هذه الطريقة يتم استعمال الانحراف المعياري للبواقي للتغلب على الضعف الناتج من استعمال الوسيط. اذ ان تقديرات لمعاملات انموذج الانحدار الدائري تحقق دالة الهدف الآتية:

$$\hat{\hat{\lambda}}_S = \min_{\hat{\lambda}^{(p)}} \hat{\sigma}_{MAD}\left(r_1(\hat{\lambda}_{(p)s}), \ldots, r_n(\hat{\lambda}_{(p)s})\right) \; ; i = 1,2,\ldots,n \tag{53}$$

بتحديد اقل قيمة حصينة مقدرة للانحراف المعياري للبواقي $(\hat{\sigma}_{MAD})$ والتي تحقق دالة الهدف:

$$F = \min\left(\sum_{i=1}^{n} \rho\,\frac{(V_i - U\lambda^{(p)})}{\hat{\sigma}_s}\right) \qquad ; p = 1,2 \tag{54}$$

اذ ان:

$$\hat{\sigma}_s = \sqrt{\frac{1}{n\tau}\sum_{i=1}^{n} w_i {r^2}_n(\hat{\lambda}_{(p)s})} \qquad \text{For iteration} > 1 \tag{55}$$

اذ ان:

$$\tau = 0.199$$

$$w_i = w_\sigma(u_i) = \frac{\rho(u_i)}{u_i} \tag{56}$$

بقيمة ابتدائية للانحراف المعياري للبواقي وتحسب وفق الصيغة الآتية:

$$\widehat{\sigma}_s = \frac{\text{median}|r_i(\hat{\lambda}_{(p)s}) - \text{median}r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})|}{0.6745} \qquad (57)$$

والحل لدالة الهدف بالمعادلة (57) اي الحصول على تقديرات s لمعاملات انموذج الانحدار الدائري نحصل عليه من خلال التفاضل الجزئي بالنسبة لتلك المعلمات ومساواتها بالصفر وكالآتي:

$$\sum_{i=1}^{n} \psi U \frac{(V_i - U\lambda^{(p)})}{\widehat{\sigma}_s} = 0 \qquad , p=1,2 \qquad (58)$$

اذ أن ψ هي مشتقة الدالة ρ والمعرفة بالصيغة:

$$\psi = \begin{cases} \frac{r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})}{\sigma_s}\left(1 - \left(\frac{\frac{r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})}{\sigma_s}}{c}\right)\right)^2 & ,|r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})| \leq c \\ 0 & |r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})| > c \end{cases} \qquad \text{Tukey'sBisquare} \qquad (59)$$

$$\psi = \begin{cases} \frac{r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})}{\sigma_s} & |r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})| < c \\ c\sin\left(\frac{r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})}{\sigma_s}\right) & |r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})| \geq c \end{cases} \quad , \qquad \text{Huber} \qquad (60)$$

ولإيجاد قيم المعلمات المقدرة من مجموعة المعادلات (2-109) يتم الاعتماد على طريقة (IRLS) باعتماد الأوزان (w_i) المبينة بالصيغة التالية والتي تمثل دالة (Tukey'sBisquare) :

$$w_i = \begin{cases} \begin{cases} 1 & r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})| \leq c \\ \frac{c}{|r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})|} & r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})| > c \end{cases} & ,\text{for iteration} = 1 \\ \frac{\rho}{\left(\frac{r_i(\hat{\lambda}_{(p)s})}{\sigma_s}\right)^2} & ,\text{for iteration} > 1 \end{cases} \qquad (61)$$

(Ahmed et al., 2020) (ALMETWALLY and ALMONGY, 2018, 57-58) (Susanti et al., 2014, 7-8)

13. احصاءة نسبة التباين لاكتشاف القيم الشاذة (COVRATIO Statistic Outlier Discover)

تستعمل احصاءة (COVRATIO) في تحديد القيم الشاذة في انموذج الانحدار الخطي ولكن طورت هذه الاحصاءة لغرض اكتشاف القيم الشاذة في انموذج الانحدار الدائري.

بيلسلي وآخرون (1980) استخدموا منهجية حذف الصف للتأكد في تأثير حذف صف واحد في كل مرة على المعاملات المقدرة والقيم المجهزة والبواقي ومصفوفة التغاير لنماذج الانحدار الخطي. حيث اهتموا بالتأثيرات المقابلة على مصفوفة التغاير لنموذج الانحدار الدائري. وذلك للأخذ بنظر الاعتبار تأثير حذف صف واحد من بيانات الانحدار الدائري على نسبة مصفوفة التغاير المقدرة باستخدام جميع المشاهدات المتاحة مقسوماً على مصفوفة التغاير المقدرة عند حذف المشاهدة j اذ ان بهذه الاحصاءة يتم استعمال المسافة بين البيانات الدائرية للكشف عن القيم الشاذة في البيانات الدائرية. فاذا كان $|COV|$ يمثل محدد مصفوفة التغاير لمجموعة البيانات الكاملة التي تضم القيم الشاذة وان $|COV_{-i}|$ يمثل محدد مصفوفة التغاير لمجموعة البيانات بعد استبعاد الصف i فان إحصاءة نسبة التباين COVARATIO تكتب كالآتي: (Belsley, ea al., 1980)

$$\text{COVARATIO} = \frac{|\text{COV}|}{|\text{COV}_{-i}|} \qquad (62)$$

فاذا كانت هذه النسبة قريبة للواحد فان ذلك مؤشر على عدم معنوية الفرق بين مصفوفتي التغاير , بعبارة أخرى ان المشاهدة i^{th} تتفق مع المشاهدات الاخرى ولا تعتبر قيمة شاذة. واذا كانت اي مشاهدة بـ $|\text{COVARATIO}_{(-j)} - 1|$ يكون اكبر من او قريب

من (6/n) سوف يتم تجاوزها وتعيين بانها قيمة شاذة . اذ ان n حجم العينة. وتم تطوير هذه الاحصاءة من قبل (Abuzaid et al., 2) لتلائم حالة الانحدار الدائري. فاذا كانت مصفوفة التغاير لانموذج الانحدار الدائري البسيط هي:

$$COV = \frac{1}{\widehat{K}A(\widehat{K})[n\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2]} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 & -\sum_{i=1}^{n} x_i \\ -\sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{bmatrix} \tag{63}$$

فان محدد مصفوفة التغاير هو:

$$|COV| = \frac{1}{\widehat{K}A(\widehat{K})} \tag{64}$$

اذ ان :

$$\widehat{K} = A^{-1}\sum_{i=1}^{n} \cos(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) \tag{65}$$

$$A(\widehat{K}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \cos(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i) \tag{66}$$

A هي دالة بسل (Bessel function) المعدلة من النوع الاول من الدرجة صفر
وان:

$$A^{-1}(k) = \frac{9 - 8k + 3k^2}{8(1-k)} \tag{67}$$

فان احصاءة COVRATIO للمشاهدة i^{th} هي :

$$\text{COVARATIO} = \frac{|\text{COV}|}{|\text{COV}_{-i}|} = \frac{\widehat{K}(-i)A(\widehat{K}(-i))}{\widehat{K}A(\widehat{K})|} \tag{68}$$

فان اي مشاهدة i^{th} بـ $|\text{COVARATIO}_{(-j)} - 1|$ تتجاوز القطع المحدد فانها تعتبر قيمة شاذة.

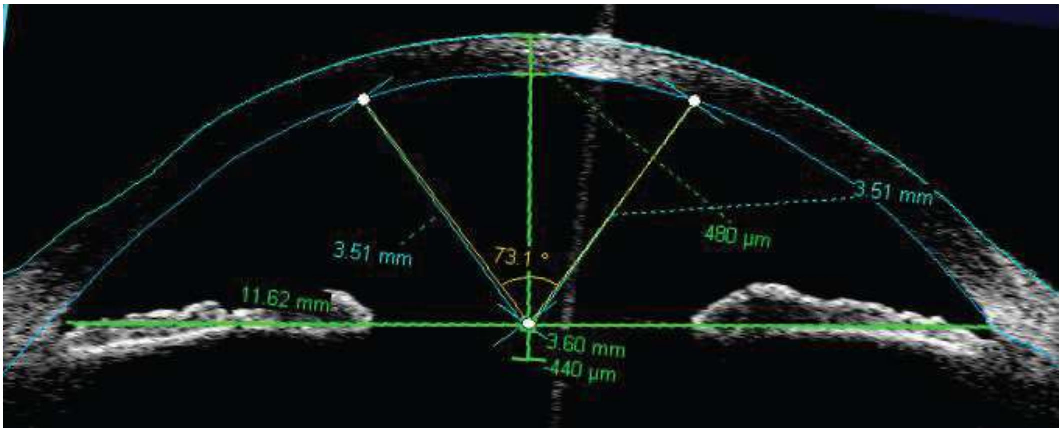
(Alshqaq, et al, 2021,2275) (Ibrahim, S., 2013) (Rousseeuw & Leroy, 2005)

14. الجانب التطبيقي (Applied Side)

تم في هذا الفصل استعمال بيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر جنة للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون في بغداد باستعمال جهاز مفروس الشبكية OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد المقدسة والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (100) مريض باستخدام التصوير المقطعي للجزء الأمامي من المدى البصري وتم فحص القيم الشاذة في البيانات واستعملت طرائق التقدير التي تم عرضها في الجانب النظري من هذه الرسالة وتم تقدير معلمات انموذج الانحدار الدائري JS بموجب طرائق التقدير المستعملة في هذه الرسالة.

14.1. البيانات الحقيقية (Real Data)

أخذت مجموعة بيانات عن العين تم الحصول عليها من مختبر جنة للفحوصات التشخيصية المتقدمة لأمراض العيون باستعمال جهاز مفروس الشبكية OCT للتصوير المقطعي ثلاثي الابعاد والتي تم التقاط صور للجزء الخلفي من عيون (100) مريضًا باستخدام التصوير المقطعي للجزء الأمامي من المدى البصري . والمتغيرين اللذان يمثلان البيانات المدروسة هما المتغير المستقل (u) ويمثل الزاوية بالرادين والتي تقيس الانحناء الخلفي للقرنية الناتجة من تقاطع المحور الهندسي للعين (الخط الأفقي) مع الخط المصنوع بين النتوءات الصلبة الأنفية والزمنية (الخط العمودي). بحيث عندما نرسم نصف القطر إلى السطح الخلفي للقرنية بأطوال تتراوح بين [3.49،3.51] ملم فان الزاوية الممتدة بنصف القطر هي انحناء القرنية الخلفي كما مبين في الشكل (1). من المتوقع أن تكون للزاوية قيمة أعلى عندما تكون القرنية محدبة بشكل أكبر. والمتغير الثاني هو المتغير المعتمد (v) الذي يمثل زاوية العين (بين انحناء القرنية الخلفي للقزحية) والجدول (1) يمثل البيانات التطبيقية .



شكل (1): قياس انحناء القرنية الخلفي (Rambli et al., 2015, 4)

جدول (1): زوايا انحناء القرنية الخلفي وزاوية العين (بين انحناء القرنية الخلفي للقزحية) لعيون (100) مريض

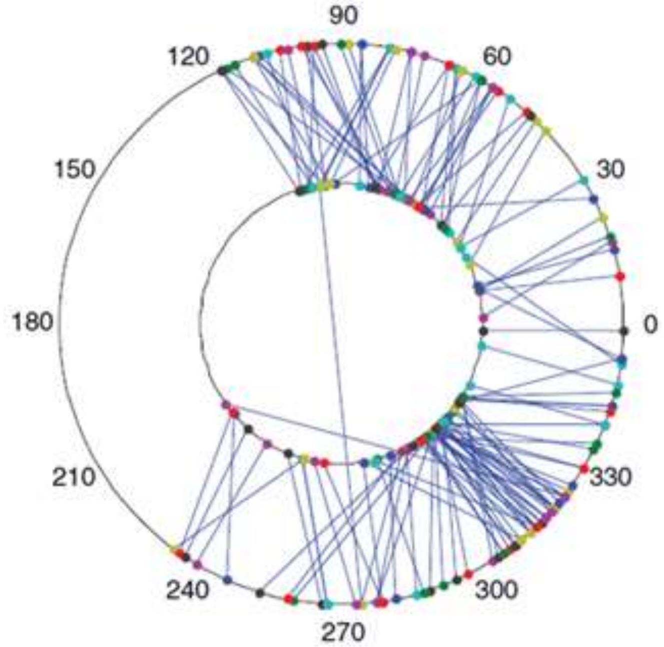
id	u	v	id	u	v	id	u	v
1	3.55	110.44	35	34.33	10.33	68	45.66	16.78
2	104.32	17.92	36	45.54	40.43	69	32.68	28.77
3	72.44	13.87	37	78.45	30.32	70	46.21	67.33
4	104.51	70.11	38	345.66	223.67	71	34.55	91.33
5	98.44	34.99	39	80.44	22.9	72	23.76	56.86
6	93.89	44.88	40	11.44	50.55	73	130.22	56.77
7	63.88	19.66	41	20.66	54.33	74	11.22	33.55
8	66.89	110.34	42	10.55	29.88	75	45.68	79.76
9	40.78	22.98	43	19.14	27.89	76	61.67	56.77
10	45.55	18.45	44	90.11	18.76	77	70.54	45.88
11	57.99	100.55	45	100.11	88.77	78	45.66	33.56
12	22.77	16.78	46	29.55	17.88	79	34.55	33.66
13	38.9	28.77	47	19.12	10.67	80	17.8	19.14
14	23.44	12.54	48	14.77	77.67	81	30.45	22.11
15	20.11	48.3	49	22.13	27.89	82	22.19	22.11
16	29.44	30.55	50	22.11	25.45	83	54.8	17.54
17	18.99	99.42	51	20.11	101.23	84	13.56	33.65
18	40.56	66.5	52	77.1	90.11	85	45.54	40.43
19	44.67	89.5	53	49.88	34.55	86	54.33	58.99
20	59.99	66.56	54	58.99	78.43	87	29.88	5.77
21	91.33	13.56	55	5.77	66.22	88	27.89	34.56
22	54.8	17.54	56	34.56	64.66	89	357.43	29.55
23	56.56	11.81	57	27.78	80.44	90	19.2	19.12
24	33.88	100.45	58	60.42	66.78	91	10.33	14.77
25	30.45	90.44	59	67.66	55.67	92	34.55	20.11
26	22.19	30.44	60	47.55	80.34	93	27.89	29.44
27	40.33	10.45	61	37.87	36.77	94	25.45	44.55
28	33.66	33.66	62	39.76	78.66	95	25.45	44.55
29	60.45	18.02	63	44.55	56.88	96	34.33	10.33
30	99.2	17.8	64	39.55	12.33	97	19.2	19.12
31	40.4	12.5	65	0.66	32.11	98	29.18	27.89
32	44.7	10.44	66	69.33	12.55	99	78.43	80.34
33	34.23	9.43	67	47.32	100.5	100	22.31	80.34
34	33.65	19.2						

14.2. اكتشاف القيم الشاذة في البيانات الحقيقية (Outliers in Real Data)

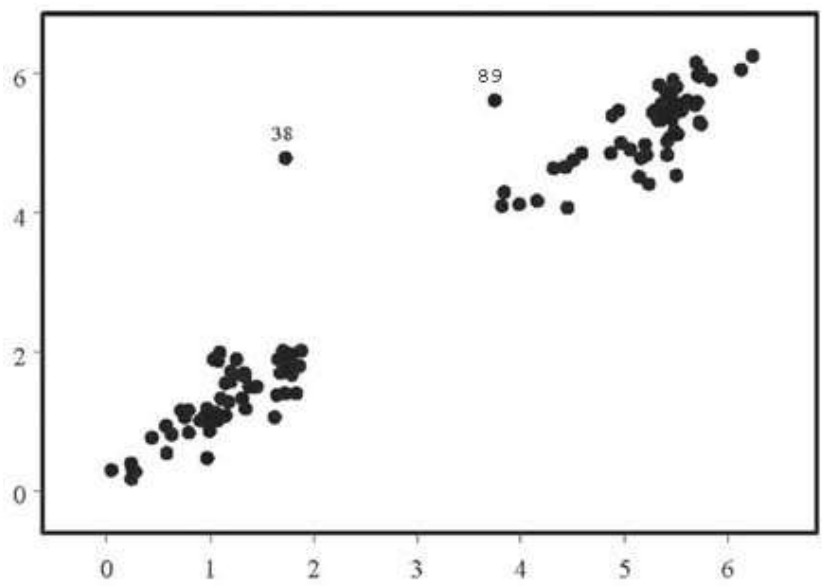
تم تطبيق إحصاءة (COVRATIO) لاكتشاف أي من المشاهدات مؤثرة بصورة فعالة في بيانات العين.
ان محدد مصفوفة التغاير لمجموعة البيانات الكاملة

|COV | =0.0088

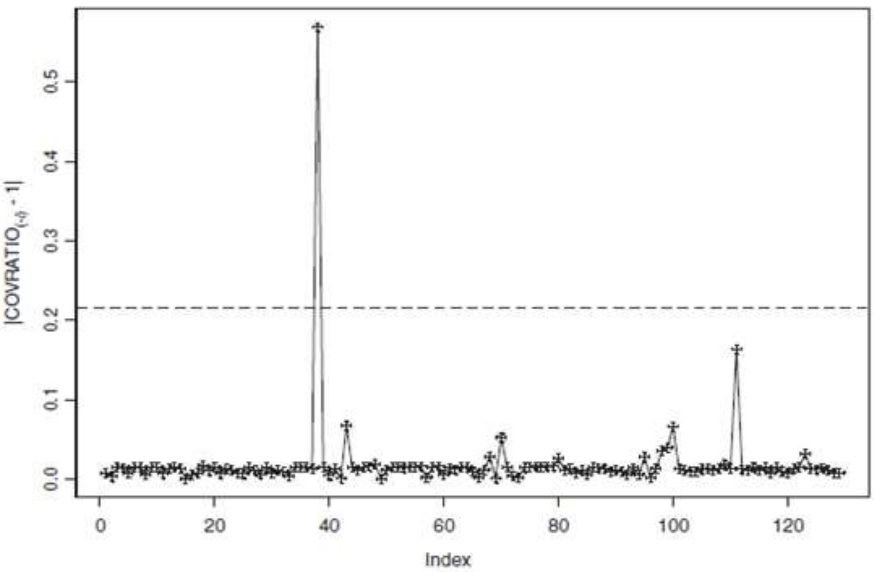
والقيم المقابلة لـ | 1– (–j) COVRATIO | تم احتسابها، اذ نجد أن المشاهدة (38) والمشاهدة رقم (89) في نقاط الرفع العالية مهمات للغاية وتختلفان عن القيم الأخرى ويتضح ذلك من خلال الشكل (2) الذي يمثل الشكل المخطط الدائري للبيانات الحقيقية حيث نلاحظ ان هنالك فقط زوجين من المشاهدات يكونان على خط مستقيم وتعبران الدائرة الداخلية للمخطط الدائري بحيث يقطع احد الخطين الدائرة الداخلية بالكامل وهي المشاهدة رقم (38) بينما يقطع الآخر في وتر قصير لايعبر الدائرة الداخلية للمخطط الدائري وهي المشاهدة رقم (89) وهذا مؤشر اولي الى ان هاتين المشاهدتين من المشاهدات الفعالة والمؤثرة على الحالة المرضية للمريض.



شكل (2): المخطط الدائري (Spoke plot) للبيانات الحقيقية



شكل (3): الشكل الانتشاري (Scatter Plot) للبيانات الحقيقية



شكل (4): قيم احصاءة نسبة التباين للبيانات الحقيقية

14.3. ملائمة انموذج الانحدار الدائري JS للبيانات الحقيقية:

تم ملائمة انموذج الانحدار الدائري لبيانات العين الحقيقية والجدول (2) يوضح النتائج التي تم التوصل اليها.

جدول (2): نتائج تقديرات معلمات الانموذج الدائري JS بموجب كل طريقة

	التقديرات				
	تقدير المربعات الصغرى الدائرية	تقدير M الحصين الدائري	تقدير المربعات الصغرى المبتورة الحصينة الدائرية	تقدير MM الحصين الدائري	تقدير S الحصين الدائري
Parameter	CLS	CRM	CRLTS	CRMM	CRS
$\widehat{A}_0$	1.09901	1.05339	1.25781	1.11689	1.44677
$\widehat{A}_1$	-0.21332	-0.21153	-0.47785	-0.51668	-0.26888
$\widehat{B}_1$	-0.98977	-0.88534	-0.66778	-0.48689	-0.85544
$\widehat{C}_0$	0.07988	0.05918	-0.15918	0.15585	0. 50944
$\widehat{C}_1$	0.25786	0.23483	-0.67378	0.24467	0.55666
$\widehat{D}_1$	0.67811	0.63674	0.32577	0.43678	0.45679
SSE	6.78911	3.77832	4.78024	4.99666	4.68888

15. مناقشة النتائج

نلاحظ من جدول (2) طريقة المربعات الصغرى الدائرية حققت اعلى مجموع مربعات خطأ بلغ (6.78911) وان طريقة (M) الدائرية الحصينة الدائرية حققت اقل مجموع مربعات الدائرية بلغ (3.77832) فبذلك تفوقت على باقي طرائق التقدير في ملائمة انموذج الانحدار الدائري JS. وان الانموذج الملائم للدوال $g_1(u)$ و $g_2(u)$ لطريقة CRM هو :

$\hat{g}_1(u)$ =1.05339-0.21153 cos(u)-0.88534sin(u)

$\hat{g}_2(u)$ =0.05918+0.23483 cos(u)+ 0.63674sin(u)

وان الأنموذج الملائم هو :

$$E\left(e^{iv}|u\right) = \rho(u)e^{i\mu(u)} = g_1(u) + ig_2(u), \quad (2)$$

وان:

$$\mu(u) = \widehat{V}_j = \arctan * \frac{0.05918 + 0.23483\cos(u) + 0.63674\sin(u)}{1.05339 - 0.21153\cos(u(-0.88534\sin(u)} \quad ; j = 1,2,\dots,100$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\frac{1}{100}\sum_{j=1}^{100}\hat{\rho}^2(u_j)} = \sqrt{\frac{1}{100}}\left[g^2{}_1(u)\right] + g^2{}_2(u) = 0.8755$$

16. الاستنتاجات

من خلال ما تم التوصل اليه من نتائج توصلنا الى افضلية طريقة M على باقي طرائق التقدير عند نقاط الرفع العالية S الدائرية الحصينة ومن ثم طريقة المربعات الصغرى المبتورة الدائرية ومن ثم طريقة MM وكانت طريقة المربعات الصغرى الدائرية اخر طريقة من بين الطرائق من حيث الدقة .

المصادر

[1] الياسري، تهاني مهدي عباس، (2007)، "مقارنة مقدرات بيز الحصين مع مقدرات أخرى لتقدير دالة المعولية التقريبية لتوزيع ويبل"، اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد.

[2] الصراف، مصطفى نزار؛ الراوي، اسماء غالب؛ اسماعيل، غفران كمال،(2016)، التقدير الاحصائي، مكتب الجزيرة للطباعة والنشر، بغداد، الطبعة الأولى.

[3] Ahmed D. Ahmed; Baydaa I. Abdulwahhab ; Ebtisam K. Abdulah, (2020), "A comparison among Different Methods for Estimating Regression Parameters with Autocorrelation Problem under Exponentially Distributed Error", Baghdad Science Journal, 17(3(Suppl.)

[4] Alshqaq, S. Saleh, (2021), "On the least trimmed squares estimators for JS circular regression model", Kuwait J. Sci., Vol.48 (3), July.2021, pp(1-13)

[5] Arthur P., Markus N., and Graeme D. Ruxton, (2013), Circular Statistics in R, Oxford and New York: Oxford University Press.

[6] Ehab M. Almetwally, Hisham M. Almongy, (2018), "Comparison Between M-Estimation, S-Estimation, And Mm Estimation Methods Of Robust Estimation With Application And Simulation", Journal of Mathematical Archive-9(11).

[7] A. S. Shvedov, (2016), “Simple proof of robustness for the least trimmed squares estimator in linear regression models”, Problemy Upravleniya, Issue 5, Pages 10–13.

[8] Farcomeni, A.; Greco, L. (2015), Robust methods for data reduction, 1st edition, Chapman & Hall/CRC Press.

[9] Ferreira, Sergio L.C.; Caires , Adriana O. ; da S. Borges, Thaise; M.D.S. Lima Ariana, O.B. Silva, Laiana and N.L. dos Santos Walter, (2017), "Robustness evaluation in analytical methods optimized using experimental designs", Microchemical Journal 131.

[10] Hekimoglu, S., and Erenoglu,R. Z. (2013) “A New GM-Estimate With High Breakdown Point” Acta Geod Geophys, No. 48.

[11] Ibrahim, S., Rambli, A., Hussin, A.G., Mohamed, I., (2013). “Outlier detection in a circular regression model using COVRATIO statistic”, Commun. Stat.-Simul. Comput. 42 (10).

[12] Lukman, A. F., Osowole , O. I. & Ayinde, K., (2015) “Two Stage Robust Ridge Method in a Linear Regression Model” Journal of Modern Applied Statistical Methods, Vol. (14), No.(2).

[13] Rusiecki M. Andrzej, (2009), “Robust Learning Algorithm with LTS Error Function", Encyclopedia of Artificial Intelligence, DOI: 10.4018/978-1-59904-849-9.ch204

[14] Sarma, Y., Jammalamadaka, S., 1993. Circular regression. In: Matusita, K. (Ed.), Statistical Theory and Data Analysis. VSP, Utrecht, pp. 109128109–109128128.

[15] S. Alshqaq, Ali H. Abuzaid, Abdullah A. Ahmadini, (2021) ,“Robust Estimators for Circular Regression Models”, Journal of King Saud University – Science, Vol. (33), No. (7).

[16] Susanti, Yuliana §, Hasih Pratiwi, Sri Sulistijowati H., Twenty Liana, (2014), "M Estimation, S Estimation, and MM Estimation in Robust Regression", International Journal of Pure and Applied Mathematics Vol. (91), No. (3).

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences (2023); Issue 54; 222 – 236

PISSN: (1681-6870); EISSN: (2790-2293)

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences

Available online at: https://www.jrucs.iq

AL- Rafidain University College

JRUCS

Journal of AL-Rafidain University College for Sciences

Parameter Estimation of the JS Robust Circular Regression Model for Corneal Convolution Data

Huda H. Abbas	Assist. Prof. Suhail N. Abood
hoda.hadib201a@coadec.uobaghdad.edu.iq	suhnaj2005@coadec.uobaghdad.edu.iq

Statistics Department, College of Administration and Economics, Baghdad University, Baghdad, Iraq

Article Information

Article History:
Received: December, 29, 2022
Accepted: March, 3, 2023
Available Online: December, 31, 2023

Keywords:
robustness, circular regression, circular M estimator, least squares estimator, robust circular truncated least squares estimator, MM estimator, S estimator, circular statistics, circular data, anomalous observations, COVARATIO statistics

Correspondence:
Huda H. Abbas
.hadib201a@coadec.uobaghdad.edu.iq

https://doi.org/10.55562/jrucs.v54i1.594

Abstract

In this research, we used real data about the eye obtained from the Jannah Laboratory for advanced diagnostic examinations of eye diseases using a retinal incision OCT device for three-dimensional computed tomography, in which pictures were taken of the back part of the eyes of (100) patients using computed tomography of the front part of the visual range. The two variables that represent the studied data are the independent variable (U), which represents the angle in radians, which measures the posterior curvature of the cornea, and the second variable is the dependent variable (V), which represents the angle of the eye between the posterior curvature of the cornea and the iris. The data was tested to contain outliers using the COVARATIO statistic, and it was found that the data contained outliers. Five estimation methods were applied, the JS circular regression model, namely the circular least squares method, the M estimator method, the circular truncated least squares estimator, the MM estimator method, and the S estimator method. The superiority of the M estimator method over other estimation methods in estimating the parameters of the JS circular regression model was reached.