طريقة لايجاد الدالة المولدة للعزوم للتوزيع الاسي المختلط

الباحث/ منتهى خضير عباس
معهد اعداد المدربين التقنيين/ هيئة التعليم التقني

الخلاصة

لاهمية التوزيع المختلط في التعبيرعن التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المختلطة من النوعين المتقطع والمستمر ، حيث انها تاخذ قيم أحتمالية موجبة عن نقاط معرفة لقيم x وتاخذ دالة او قيم اخرى عندما تقع x ضمن مجال معين (Interval).

وحاولنا اشتقاق صيغة للدالة المولدة للعزوم لبعض التوزيعات المختلطة من برنولي مع الاسي وكذلك التوزيع الهندسي مع الاسي، ومن ثم بيان حالة التكافؤ بينهما، ومن ثم تعميم ذلك ليشمل توزيع ثنائي الحدين مع الاسي، كذلك ثنائي الحدين السالب مع الاسي باعتبار ان التوزيع الاحتمالي لمجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة التي تتبع كل من برنولي بمعلمة P سيكون توزيع ثنائي الحدين بمعالم P , n . وكذلك التوزيع الاحتمالي لمجموعة المتغيرات العشوائية المستقلة التي تتبع كل من التوزيع الهندسي سيكون ثنائي الحدين السالب ، وهكذا سوف نبين ان الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المختلط من ثنائي الحدين - الاسي هي مكافئة للدالة المولدة للعزوم للتوزيع المختلط وثنائي الحدين السالب مع الاسي .

وقد تم التركيز على الدالة المولدة للعزوم (M . G . F) باعتبار ان لكل توزيع (M . G . F) يمكن الاستدلال من نوع التوزيع ومن ثم ايجاد العزوم ومعامل الالتواء والتفلطح وغيرها من المؤشرات الاحصائية المهمة في تقدير معالم التوزيع .

Abstract

In this paper a Mixed probability distribution for the kind of random variables (which are Mixed between continuous and discrete type) have been derived , and we use the technique of Moment generating function . For some Mixed distribution (for Bernoulli with exponential) ,and also from geometric with exponential , and negative Binomial distribution with exponential also in order to obtain the formula for this Mixture kinds of r.v , which are necessary for studying the performance of some failure Models which represents many data , All the derivation necessary for obtaining the distribution are explained in this paper.

المقدمة

ان التوزيع المختلط من توزيع برنولي مع التوزيع الاسي هو مكافئ للتوزيع المختلط من التوزيع الهندسي مع التوزيع الاسي، ولكن بمعالم مختلفة، وكنتيجة لذلك يمكن ايجاد الدالة التجميعية للتوزيع المختلط وكذلك الدالة المولدة للعزوم، وسوف نبين في الجانب النظري كيفية التوصل الى ذلك.

الجانب النظري

لتكن لدينا $X_1, X_2, \ldots X_N$ هي مجموعة متغيرات عشوائية مستقلة ويتبع التوزيع الاسي بمعلمة λ وان دالة التوزيع التجميعية للمتغير X هي :

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad ، \quad x > 0 \ \ldots \ (1)$$

ولنفرض ان

$$S = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_N \quad \ldots \ (2)$$

حيث N متغير عشوائي (ويمثل عدد صحيح) وله دالة احتمالية :

$$P_n = P_r(N = n) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots \ (3)$$

وان الدالة التجميعية الى S هي:

$$F_s(x) = \sum_{x=0}^{\infty} Pn.F_X^n(X) \quad \ldots \quad \ldots(4)$$

لتكن $M_s(t)$, $M_N(t)$, $M_x(t)$ هي الدوال المولدة للعزوم للمتغيرات S, X, N على الترتيب فان:

$$Ms(t) = EN\left[e^{t(X1+X2+\ldots+XN)}\right. \ N=n] \quad \ldots(5)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Pn\left[Mx(t)\right]^n$$

$$Ms(t) = M_N\left(LnMx(t)\right) \quad ,,,(6)$$

وحيث ان X متغير عشوائي يتوزع بمعلمة λ فان الدالة المولدة للعزوم لهذا المتغير[1,2]

$$Mx(t) = Ee^{tx} = \int_0^{\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} e^{tx} \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\mathbf{M_x(t)} = \left[\frac{\lambda}{\lambda - t}\right] \qquad . \quad \ldots(7)$$

واذا افترضنا ان N متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع برنولي بمعلمة q فان:

$$P_n = q^n P^{1-n} \qquad n = 0 , 1$$

$$M_N(t) = (qe^t + P)$$

من المعلومات اعلاه نجد ان الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المختلط برنولي – اسي [5 , 3] .

$$Ms(t) = \left(q.\frac{\lambda}{\lambda - t} + p\right) = \frac{\lambda - pt}{\lambda - t} \qquad \ldots(8)$$

وبنفس الاسلوب نجد ان الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المختلط من التوزيع الهندسي – الاسي أذ ان :

$$P_n = Pq^n \qquad n=0 ,1 , 2 , ,,,$$

$$M_N(t) = Ee^{tn} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn}.Pq^n$$

$$= p\sum_{n=0}^{\infty} (qe^t)^n$$

$$= p\left[(qe^t)^0 + (qe^t)^1 + \ldots +\right]$$

$$M_N(t)=\left(\frac{P}{1-qe^t}\right)$$

وبالنسبة للتوزيع المختلط فان :

$$M_s(t)=\left[\frac{p}{1-q\dfrac{\lambda}{\lambda-t}}\right]=\frac{\lambda p-tp}{\lambda p-t} \quad \ldots(9)$$

وعند مقارنة المعادلتين (9) , (8) نجد ان الدالة المولدة للعزوم من التوزيع المختلط برنولي-اسي مكافئة للدالة المولدة للعزوم للتوزيع الهندسي – اسي.
اضافة لما تقدم يمكننا استخدام تعريف الدالة **Fs(x)** من المعادلة (4) لايجاد التوزيع للمتغير **S** تحت افتراض **N** متغير عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحدين السالب بالمعالم **(r , p)** والمعرفة **[4,6]**.

$$P_n=C_n^{r+n-1}P^rq^n \qquad N = 0 ,1,2,\ldots,œ$$

...(10)　　O/W　　O

اما الدالة المولدة للعزوم لهذا التوزيع هي :

$$M_N(t)=Ee^{tx}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{tx}P_n$$

$$=\sum e^{tn}C_n^{r+n-1}.P^rq^n$$

$$=P^r\sum_{n=0}^{\infty}C_n^{r+n-1}(qe^t)^n$$

$$=P^r(1-qe^t)^{-r}=\left(\frac{P}{1-qe^t}\right)^r$$

,,,(11)

تكون الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المختلط من ثنائي السالب مع التوزيع الاسي [5] .

$$M_s(t) = \left(\frac{P}{1 - q\frac{\lambda}{\lambda - t}} \right)^r = \left(\frac{P\lambda - Pt}{P\lambda - t} \right)^r \ldots(12)$$

وبالاستمرار بتعميم النتائج السابقة التي حصلنا عليها لتوزيع برنولي مع الاسي والتوزيع الهندسي مع الاسي لتوزيعين اخرى هما ثنائي الحدين السالب وثنائي الحدين .
وحيث ان N متغير عشوائي متقطع يتبع توزيع ثنائي الحدين بالمعلمة (m,q) [3] .

$$P_n = C_n^m q^n P^{m-n}$$

M = 0 ,1 ,2 ,… ,n 13

وان الدالة المولدة للعزوم للمتغير N هي :

$$M_N(t) = (P + qe^t)^m$$

$$M_N(t) = Ee^{tn} = \sum_{m=0}^{n} e^{tn} P_n$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m e^{tn} q^n P^{m-n}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m (qe^t)^n P^{m-n}$$

$$M_N(t) = (qe^t + P)^m$$

وان P+q =1

وبالنسبة للتوزيع المختلط من ثنائي الحدين مع التوزيع الاسي فان الدالة المولدة للعزوم هي:

$$M_s(t) = (P + q.\frac{\lambda}{\lambda - t})^m$$

$$= \left[\frac{P(\lambda - t) + q\lambda}{\lambda - t}\right]^m = \left(\frac{\lambda - Pt}{\lambda - t}\right)^m \text{...(14)}$$

وعند مقارنة المعادلتين (14) , (12) نجد ان الدالة المولدة للعزوم للتوزيع المختلط من ثنائي الحدين – الاسي مكافئة للدالة المولدة للعزوم لتوزيع ثنائي الحدين السالب – الاسي بشرط ان تكون m عدد صحيح (علما بان توزيع ثنائي الحدين السالب عندما تكون m عدد صحيح تسمى ايضا بتوزيع باسكال) ونسبة لهذا التكافؤ بين المعادلتين (14) , (12) .
يمكننا استخدام الدالة الاحتمالية التالية Fs(x) عند حل المتغير s بالنسبة لتوزيع ثنائي الحدين السالب وخاصة عندما تكون m عدد صحيح والدالة Fs(x) هي:

$$F_s(x) = 1 - \sum_{n=1}^{m} C_n^m q^n . P^{m-n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(P\lambda x)^j . e^{-P\lambda}}{j!} \qquad x > 0 \text{...(15)}$$

وعندما m=1 فان:

$$F_s(x) = 1 - qe^{-P\lambda x} \text{...(16)}$$

وهي تمثل الدالة الاحتمالية التجميعية للتوزيع المختلط من التوزيع الهندسي – الاسي [7 , 5].

الاستنتاجات

1. وجد ان التوزيع المختلط من ثنائي الحدين السالب مع الاسي مكافئ للتوزيع المختلط من ثنائي الحدين مع الاسي وذلك لان (M.G.F.) للتوزيعين كانت مكافئه.
2. وجد ان الدالة المولدة للعزوم (M.G.F.) للتوزيع المختلط برنولي – آسي مكافئه للدالة للدالة مولدة العزوم (M.G.F.) للتوزيع الهندسي – آسي.
3. لكل توزيع توجد دالة مولدة العزوم واذا كانت الدالة المولدة للعزوم (M.G.F.) معلومة يمكن عندئذ الاستدلال على نوع التوزيع الاحتمالي الذي له (M.G.F.) معلومة.
4. يمكن حساب الاحتمالات لنموذج المختلط من ثنائي الحدين السالب مع الاسي بصورة مضبوطة وسهلة وذلك عندما تكون m عدد صحيح.
5. تبين ان الدالة المولدة للعزوم تساهم في حساب العزوم (الاول، الثاني، الثالث) ويمكن حساب متوسط الحسابي، التباين، معامل الاختلاف والتفلطح باعتبارها مؤشرات أحصائية تساهم في قياس التشتت والتشتت النسبي من خلال معامل الاختلاف باعتبارها احد المؤشرات التي تستخدم في مقارنة تجانس مجموعتين من البيانات.

التوصيات

1. يمكن استخدام احدى طرق التحليل العددي لحساب الخطأ المتضمن في حالة التداحل Interpolation.وذلك في تقريب خطأ الدالة $Fs(x|m)$, $Fs(x)$ عن طريق التداخل الخطي بين $Fs(x|[m+1])$, $Fs(x|[m])$.
2. بامكان استخدام معادلة الفرق الثاني في تقريب المشتقة الثانية الغير المعلومة مثل $\Delta^2{}_s\, Fs(x|[m])$
3. اشتقاق الدالةالمولدة للعزوم للتوزيع المختلط لثنائي الحدين مع التوزيعات الاخرى، ويعتبر مؤشر جيد لاستفادة من الدوال الاحتمالية في حساب الاحتمالات.

المصادر

1- نوري، وليد عبد ، البياتي، هلال عبود، الاحصاء الرياضي، بغداد ،1980.

2- شبيجل موراي، شوم – الاحصاء والاحتمال، ترجمة عبد القادر حمدو، بيروت، انترناشيونال، 2001 .

3-Hald, A. , '' Statistical Theory of Sampling Inspection by Attributes '' , Academics Press ,Inc. , 1981.

4- Larson , H.g. , '' Introduction to Probability Theory and Statistics Interfaces '',John Wiley and Sons Inc., U,S.A. ,3rded.,1982

5- Harry , H. panjer & Gordon E. Will rot , '' Finite Sum Evaluation of Negative Binomial – Exponential Model '' ,Astin Bulletin 12 , University of Waterloo ,Outario,Canads,, ,1981 .

6- Rebel, V.H., Attar , T.G. , ''Introduction to Mathematical Statistical '' , 3rded. , Macmillan , Co. Inc. , London , 1970 .

7- http://www. Google .com // usm .main .edu/ ~ ettaha/ at461.pdf 2003 .