حول نظرية ليبيك في التقارب المقيد

مالك سعد المهجة
جامعة المثنى / كلية العلوم – قسم الرياضيات وتطبيقات الحاسوب

Abstract.
In 2010 Al-Muhja [1] , introduced paper on Lebesgue integral theorem . In this paper , we discuss the some theorem in constrained approximation by using definitions Lebesgue _ Stieltjes _ i and the pseudo _ Lebesgue _ Stieltjes integral .

الخلاصـــة :
في هذا البحث نُقدم نظرية ليبيك وبعض النظريات في التقارب المقيد باستخدام مفهومي ليبيك – ستيلتجس – i وليبيك – ستيلتجس الكاذب معاً لتوسيع نظرية ايكوروف ونظرية لوزين لاحقاً .

Introduction.
In many directions , use has been made of a Borel measurable family $\mathrm{B}(R)$ *, suth that* R *real number . The main aim of this paper is to introduce a theorem 5.2, by using some definitions Lebesgue _ Stieltjes .*

1. المقدمة :
يهدف البحث الى توسيع نظرية القياس الليبيكي *" وللاختصار تكتب مجموعة قابلة للقياس"* باستخدام بعض مفاهيم ليبيك _ ستيلتجس في التكامل كما جاء في المصادر [1,4,6] للوصول الى حالة أكثر تعميم تساعد فيما بعد الى توسيع نظرية ايكوروف ونظرية لوزين .

1.1. مبرهنة : [5]
لتكن $\{E_n\}$ متتابعة من المجموعات المقيدة القابلة للقياس حيث $E_n \subseteq E_{n+1}$ لكل n . اذا كانت المجموعة $E = \bigcup_n E_n$ مجموعة مقيدة فان المتتابعة العددية $\{\mu(E_n)\}$ متقاربة وان $\mu(E_n) \to \mu(E)$.

لتكن R مجموعة الإعداد الحقيقية ولتكن $\mathrm{B}(R)$ طائفة قابلة للقياس بورل Borel measurable حيث $A \in \mathrm{B}(R)$ مجموعة قابلة للقياس بورل . لاحظ ان اهتمام هذا البحث ينصب في كتابة المبرهنة 5.2 باستخدام مفهومين من مفاهيم ليبيك – ستيلتجس الأربعة .

2.1. تعريف : [1]
لتكن S مجموعة قابلة للقياس ولتكن $f : S \to R$ دالة مقيدة ولتكن $g : S \to R$ دالة غير متناقصة . لكل تجزئة ليبيكية P للمجموعة S نضع

$$\underline{LS} \quad (f, P, g) = \sum_{i=1}^{n} m_i g(\mu(S_i))$$
$$\overline{LS} \quad (f, P, g) = \sum_{i=1}^{n} M_i g(\mu(S_i))$$

حيث أن μ هي دالة القياس للمجموعة S , و ان

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in S_i\}$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in S_i\}$$

بما ان g دالة غير متناقصة فان

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) > 0$$
$$\underline{LS} \quad (f, P, g) \le \overline{LS} \quad (f, P, g)$$

إذا كانت $P_\circ$ تجزئة منعمة للتجزئة P فان

$$\underline{LS}\quad (f,P_\circ,g)\geq \underline{LS}\quad (f,P,g)$$

$$\overline{LS}\quad (f,P_\circ,g)\leq \overline{LS}\quad (f,P,g)$$

إذا كانت P_2,P_1 تجزئتين للمجموعة S فان

$$\underline{LS}\quad (f,P_1,g)\leq \overline{LS}\quad (f,P_2,g)$$

$$\underline{LS}\quad (f,g)=\{\underline{LS}\quad (f,P,g): p\ part\quad of\quad set\quad S\}$$

$$\overline{LS}\quad (f,g)=\{\overline{LS}\quad (f,P,g): p\ part\quad of\quad set\quad S\}$$

$$\underline{\int} fdg\quad =\sup\{\underline{LS}\quad (f,g)\}$$

$$\overline{\int} fdg\quad =\inf\{\overline{LS}\quad (f,g)\}$$

اذا كان $\overline{\int} fdg = \underline{\int} fdg$ فنقول ان f قابلة للتكامل بالنسبة للدالة g .

سنقدم تكامل ليبيك _ ستيلتجس بأسلوب أكثر عمومية , راجع [6,4,1] . سوف نعتمد المصدر [1] في كتابة التعريف التالي .

3.1. تعريف :

لتكن S مجموعة قابلة للقياس ولتكن $f:S\to R$ دالة مقيدة ولتكن $g_i:S\to R$ و $i\in I$ دوال غير متناقصة . لكل تجزئة ليبيكية P للمجموعة S تصبح

$$\underline{LS}\quad (f,P,\underline{g})=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i\in I} m_j\left[g_i(\mu(S_j))\right]$$

$$=\prod_{i\in I} m_1 g_i(\mu(S_1))+\prod_{i\in I} m_2 g_i(\mu(S_2))+........+\prod_{i\in I} m_n g_i(\mu(S_n))$$

$$\overline{LS}\quad (f,P,\underline{g})=\sum_{j=1}^{n}\prod_{i\in I} M_j\left[g_i(\mu(S_j))\right]$$

$$=\prod_{i\in I} M_1 g_i(\mu(S_1))+\prod_{i\in I} M_2 g_i(\mu(S_2))+........+\prod_{i\in I} M_n g_i(\mu(S_n))$$

بحيث ان

$$m_j=\inf\{f(x):x\in S_j\}\ \text{و}\ M_j=\sup\{f(x):x\in S_j\}$$

وان $\underline{g}=g_1,g_2,......$

بما ان g_i دوال غير متناقصة فان

$$g_i(x_j)-g_i(x_{j-1})>0$$

$$\underline{LS}\quad (f,P,\underline{g})\leq \overline{LS}\quad (f,P,\underline{g})$$

$$\underline{LS}\quad (f,\underline{g})=\{\underline{LS}\quad (f,P,\underline{g}): P\ part\quad of\quad set\quad S\}$$

$$\overline{LS}\quad (f,\underline{g})=\{\overline{LS}\quad (f,P,\underline{g}): P\ part\quad of\quad set\quad S\}$$

$$\prod_{i\in I}\underline{\int}_i f\,\underline{dg}=\sup\{\underline{LS}\quad (f,\underline{g})\}$$

$$\prod_{i\in I}\overline{\int}_i f\,\underline{dg}=\inf\{\overline{LS}\quad (f,\underline{g})\}$$

$$\Rightarrow \prod_{i\in I}\underline{\int}_i fdg\leq \prod_{i\in I}\overline{\int}_i fdg$$

وعند المساواة نقول ان الدالة f قابلة للتكامل $\int_i$ بالنسبة الى g_i لكل $i\in I$.

4.1. تعريف : [6]
ليكن $(I,\oplus,\mathrm{O})$ شبه حلقة للفترة الجزئية $[-\infty,\infty] \subseteq I$ ولتكن $\phi \neq S \subseteq \Omega$ بحيث S يُمثل جبر $-\sigma$ تسمى P احتمالية كاذبة $P: S \to I$ اذا تحققت الشروط :

1. $P(\phi)=0$ و $P(\Omega)=1$.
2. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigoplus_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ لكل A_i مجموعات منفصلة في S و $i \in N$.

ويقال ان الثلاثي (Ω, S, P) هو فضاء الاحتمالية الكاذب . ونعرف الضرب الداخلي للاحتمالية p بالصيغة $p = \varphi \circ P$ فان الثلاثي (Ω, S, p) يسمى فضاء الاحتمالية .

5.1. تعريف : [6]
ليكن (Ω, S, P) فضاء الاحتمالية الكاذب و p هو الضرب الداخلي للاحتمالية . ولتكن الدالة $f: \Omega \to R$ متغير عشوائي فان تكامل ليبيك الكاذب لدالة f هو $\int^{\oplus} f\, dP = \varphi^{-1}\left(\int \varphi \circ f\ dp\right)$.

ليكن ξ متغير عشوائي قابل للتكامل ولتكن θ دالة توزيع بحيث ان μ_θ دالة قابلة لقياس ليبيك – ستيلتجس [4] . في نظرية الاحتمالية تسمى القيمة المتوسطة للدالة $f: R \to R$ القابلة للقياس بحيث f متغير عشوائي في فضاء الاحتمالية $(R, \mathrm{B}(R), \mu_\theta)$ تسمى تكامل ليبيك – ستيلتجس لدالة f بالنسبة الى θ ويرمز لهُ بالرمز $\int f\, d\mu_\theta$ او بالرمز $\int f\, d\theta$.

6.1. تعريف : [6]
ليكن (Ω, S, P) فضاء الاحتمالية الكاذب ولتكن $\xi: \Omega \to R$ متغير عشوائي فان دالة التوزيع الكاذبة $\theta_\varphi : R \to R$ للمتغير العشوائي ξ تُعرف بالصيغة :

$$\theta_\varphi(x) = P(\xi < x) = P(\{\omega : \xi(\omega) < x\}) \ ; \quad \forall\ x \in R$$

ويسمى التكامل $\int^{\oplus} f\, d\theta_\varphi = \varphi^{-1}\left(\int \varphi \circ f\ d\theta\right)$ بتكامل ليبيك – ستيلتجس الكاذب .

7.1. مبرهنة : [6]
ليكن (Ω, S, P) فضاء الاحتمالية الكاذب ولتكن $\theta: R \to R$ دالة التوزيع للمتغير العشوائي ξ فان دالة التوزيع الكاذبة $\theta_\varphi : R \to R$ للمتغير العشوائي ξ يُعبر عنها بالصيغة $\theta_\varphi = \varphi^{-1} \circ \theta$.

8.1. تعريف : [6]
لتكن $\theta_\varphi : R \to R$ دالة التوزيع الكاذبة للمتغير العشوائي ξ ولتكن $\theta: R \to R$ دالة التوزيع فان قياس ليبيك – ستيلتجس الكاذب $\mu_\theta^\varphi : \mathrm{B}(R) \to R$ يُعرف بالصيغة $\mu_\theta^\varphi = \varphi^{-1} \circ \mu_\theta$ وللاختصار تكتب *"القياس الكاذب"* .

2. بعض المبرهنات والحقائق المساعدة.
سنُقدم في هذا البند الحقائق التي تم التوصل إليها في نظرية ليبيك في التقارب المقيد مؤخراً [راجع مصادر البحث] .

1.2. مبرهنة : [1]
لتكن S مجموعة مقيدة وقابلة للقياس ولتكن $< f_n >$ متتابعة من الدوال المقيدة القابلة للتكامل على المجموعة S بالنسبة للدالة g_i غير المتناقصة . اذا كانت هذه المتتابعة تقترب الى الدالة f بانتظام على S . فان f قابلة للتكامل بالنسبة الى g_i غير المتناقصة وان $\lim \prod_{i\in I} \int_S {}_i f_n \underline{dg} = \prod_{i \in I} \int_S {}_i f \underline{dg}$.

2.2. تعريف : [3]
لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال المعرفة على S . يقال ان $\{f_n\}$ متتابعة مقيدة بانتظام اذا وجد $M > 0$ بحيث $|f_n(x)| < M$ لكل $x \in S$ ولكل $n \in N$.

3.2. تعريف : [3]
لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال يقال ان المتتابعة $\{f_n\}$ تقترب الى الدالة f بقيود على المجموعة S اذا كانت المتتابعة $\{f_n\}$ مقيدة بانتظام على S وكانت المتتابعة العددية $\{f_n(x)\}$ تقترب الى $f(x)$ لكل $x \in S$.

4.2. مبرهنة : [1]
إذا كانت S مجموعة مقيدة في R وكانت $f : S \to R$ دالة مقيدة وقابلة للقياس . لتكن g_i دالة غير متناقصة في S , فان الدالة f قابلة للتكامل بالنسبة الى g_i لكل $i \in I$.

سنكتُب النظرية التالية باستخدام تعريف ليبيك _ ستيلتجس _i والتي تسمى نظرية ليبيك في التقارب المقيد .
5.2. مبرهنة : [1]
لتكن S مجموعة مقيدة قابلة للقياس ولتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال القابلة للقياس على S و g_i غير متناقصة في S . أذا كانت $\{f_n\}$ تقترب إلى f بقيود . فان $LS\prod_{i\in I}\int_S {}_i f_n \underline{dg} \to LS\prod_{i\in I}\int_S {}_i f \underline{dg}$.

6.2. مبرهنة : [6]
ليكن ξ متغير عشوائي ولتكن θ_φ دالة التوزيع الكاذبة فان لكل $A \in \mathrm{B}(R)$ تحقق الشرط الاتي :
$P(\xi^{-1}(A)) = \mu_\theta^\varphi(A)$.

3. التقارب المقيد.
سوف نقدم في هذا البند تعميم للمبرهنة 5.2 وسنبدأ أولاً بالمبرهنة التالية .

1.3. مبرهنة :
لتكن $\theta_\varphi : R \to R$ دالة التوزيع الكاذبة للمتغير العشوائي ξ فانه توجد دالة وحيدة $\mu_{\theta^\otimes}^\varphi : \mathrm{B}(R) \to R$ قابلة للقياس الكاذب بحيث ان $\mu_{\theta^\otimes}^\varphi([a,b)) = \theta_\varphi^\otimes(b) - \theta_\varphi^\otimes(a)$ لكل $a,b \in R$ و $a < b$.
البرهان :
ليكن $a,b \in R$ و $a < b$ وباستخدام تعريف 8.1 فان

$$\begin{aligned}
\mu_{\theta^\otimes}^\varphi([a,b)) &= \varphi^{-1}\left(\mu_{\theta^\otimes}([a,b))\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\underbrace{\mu_\theta \otimes \mu_\theta \otimes \ldots \otimes \mu_\theta}_{i\ \ timese}([a,b))\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\underbrace{\theta \otimes \theta \otimes \ldots \otimes \theta}_{i\ \ timese}(b) - \underbrace{\theta \otimes \theta \otimes \ldots \otimes \theta}_{i\ \ timese}(a)\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\varphi\left[\underbrace{\theta_\varphi \otimes \theta_\varphi \otimes \ldots \otimes \theta_\varphi}_{i\ \ timese}(b) - \underbrace{\theta_\varphi \otimes \theta_\varphi \otimes \ldots \otimes \theta_\varphi}_{i\ \ timese}(a)\right]\right) \\
&= \varphi^{-1}\left(\varphi\left[\theta_\varphi^\otimes(b) - \theta_\varphi^\otimes(a)\right]\right) \\
&= \theta_\varphi^\otimes(b)\, \Theta\, \theta_\varphi^\otimes(a)
\end{aligned}$$

الآن سنبرهن وحدانية الدالة $\mu_{\theta^\otimes}^\varphi$.

لتكن $\mu_{\theta^\otimes}^\varphi : \mathrm{B}(R) \to R$ و $\upsilon_{\theta^\otimes}^\varphi : \mathrm{B}(R) \to R$ دوال قابلة للقياس الكاذب بحيث $\mu_{\theta^\otimes}^\varphi = \upsilon_{\theta^\otimes}^\varphi$ على J

$J = \{[a,b) : a < b\ ;\ a,b \in R\}$

بما ان $\mu_{\theta^\otimes}^\varphi = \upsilon_{\theta^\otimes}^\varphi$ اذن $\varphi \circ \mu_{\theta^\otimes}^\varphi = \varphi \circ \upsilon_{\theta^\otimes}^\varphi$

$$\therefore \quad \varphi \circ \mu_{\theta^\otimes}^\varphi(A) = \varphi \circ \upsilon_{\theta^\otimes}^\varphi(A)\ ,\ \ \forall\ A \in \mathrm{B}(R)$$

وعليه لكل $A\in \mathrm{B}(R)$

$$\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A)=\varphi^{-1}\left(\varphi\circ\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A)\right)=\varphi^{-1}\left(\varphi\circ\upsilon_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A)\right)=\upsilon_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A)$$

اذن $\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}=\upsilon_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}$ على $\mathrm{B}(R)$.

سنُقدم المبرهنة التالية التي تُمثل مفهوم جديد لتكاملات ليبيك .

2.3. مبرهنة :

ليكن ξ متغير عشوائي قابل للتكامل ولتكن θ_{φ} دالة التوزيع الكاذبة بحيث $\theta=\varphi\circ\theta_{\varphi}$. اذا كانت $f:R\to R$ دالة مقيدة قابلة للقياس الكاذب فان تكامل ليبيك – ستيلتجس – i الكاذب لدالة f بالنسبة θ_{φ} يكون بالصيغة

$$\prod_{i\in I}\int_{R}^{\oplus}{}_{i}\, f\,\underline{d\theta_{\varphi}}=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\int_{R}{}_{i}\,\varphi\circ f\,\underline{d\theta}\right)$$

ولكل $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال القابلة للقياس الكاذب بحيث ان $\{f_n\}$ تقترب إلى f فان

$$\prod_{i\in I}\int_{R}^{\oplus}{}_{i}\, f_n\,\underline{d\theta_{\varphi}}\to\prod_{i\in I}\int_{R}^{\oplus}{}_{i}\, f\,\underline{d\theta_{\varphi}}\ .$$

البرهان :

لتكن الدالة f متغير عشوائي في فضاء الاحتمالية الكاذب $\left(R,\mathrm{B}(R),\mu_{\theta}^{\varphi}\right)$.

$$\prod_{i\in I}\int_{R}^{\oplus}{}_{i}\, f\,\underline{d\theta_{\varphi}}=\prod_{i\in I}\bigoplus_{j=1}^{n}\left(\alpha_j\otimes\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A_j)\right)$$

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A_j)\right)\right) \qquad (3.3)$$

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}\varphi\left[\varphi^{-1}\left(\varphi(\alpha_j).\varphi\left(\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A_j)\right)\right)\right]\right)$$

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi(\alpha_j).\varphi\left(\mu_{\theta^{\otimes}}^{\varphi}(A_j)\right)\right)\right)$$

وباستخدام مبرهنة 6.2 و مبرهنة 1.3

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi(\alpha_j).\varphi\left(\otimes P\left(\xi^{-1}(A_j)\right)\right)\right)\right)$$

وباستخدام تعريف 4.1

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi(\alpha_j).\left[\otimes p\left(\xi^{-1}(A_j)\right)\right]\right)\right)$$

وباستخدام برهان مبرهنة 1.3

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\sum_{j=1}^{n}\left(\varphi(\alpha_j).\mu_{\theta^{\otimes}}(A_j)\right)\right)$$

$$=\varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\int_{R}{}_{i}\,\varphi\circ f\,\underline{d\theta}\right) \qquad (4.3)$$

الان سنبرهن تقارب المتتابعة $\{f_n\}$.

لتكن $\{f_n\}$ متتابعة من الدوال القابلة للقياس الكاذب بحيث $f_n\geq 0$ وان $f_n\to f$.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\prod_{i\in I}\int_{R}^{\oplus}{}_{i}\, f_n\,\underline{d\theta_{\varphi}}=\varphi^{-1}\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{i\in I}\int_{R}{}_{i}\,\varphi\circ f_n\,\underline{d\theta}\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\int_R {}_i \lim_{n\to\infty} \varphi\circ f_n \,\underline{d\theta}\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\int_R {}_i \varphi\circ f\,\underline{d\theta}\right)$$

وباستخدام 4.3 فان

$$= \prod_{i\in I}\int_R^{\oplus} {}_i f\,\underline{d\theta_\varphi} \quad .$$

ألان يُمكن كتابة المبرهنة التالية التي تُـمثل توسيع للمبرهنة 1.1 والتي تُـعد (حسب علمنا) نقطة انطلاق لكتابة نظرية ايكوروف ونظرية لوزين لاحقاً بالأسلوب الجديد .

5.3. مبرهنة :

ليكن ξ متغير عشوائي قابل للتكامل ولتكن θ_φ دالة التوزيع الكاذبة . اذا كانت $\{E_n\}_{n\in N}$ متتابعة من الدوال القابلة للقياس الكاذب بحيث ان $f : R\to R$ دالة قابلة للقياس الكاذب على $\lim_{k\to\infty} E_k = E$ فان $\lim_{k\to\infty}\prod_{i\in I}\int_{E_k}^{\oplus} {}_i f\,\underline{d\theta_\varphi} = \prod_{i\in I}\int_E^{\oplus} {}_i f\,\underline{d\theta_\varphi}$.

البرهان :

لتكن A_j مجموعة قابلة للقياس الكاذب بحيث $A_j \in \mathrm{B}(E)$

$$\therefore \quad \lim_{k\to\infty}\prod_{i\in I}\int_{E_k}^{\oplus} {}_i f\,\underline{d\theta_\varphi} = \lim_{k\to\infty}\prod_{i\in I}\bigoplus_{j=1}^{n}\left(\alpha_j\otimes\mu^{\varphi}_{\theta^{\otimes}}(E_k\cap A_j)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\lim_{k\to\infty}\prod_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\mu^{\varphi}_{\theta^{\otimes}}(E_k\cap A_j)\right)\right)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\lim_{k\to\infty}\mu^{\varphi}_{\theta^{\otimes}}(E_k\cap A_j)\right)\right)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\mu^{\varphi}_{\theta^{\otimes}}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\cap A_j\right)\right)\right)\right)$$

وباستخدام تعريف 8.1

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\left(\varphi^{-1}\left[\mu_{\theta^{\otimes}}\left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)\cap A_j\right)\right]\right)\right)\right)\right)$$

وباستخدام مبرهنة 1.3

$$= \varphi^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\left[\varphi^{-1}\left(\underbrace{\mu_\theta\otimes\mu_\theta\otimes\ldots\otimes\mu_\theta}_{i\ \ timese}(E\cap A_j)\right)\right]\right)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\prod_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\left[\varphi^{-1}\left(\mu_{\theta^{\otimes}}(E\cap A_j)\right)\right]\right)\right)$$

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\left(\sum_{j=1}^{n}\varphi\left(\alpha_j\otimes\mu^{\varphi}_{\theta^{\otimes}}(E\cap A_j)\right)\right)\right)$$

وباستخدام 4.3 فان

$$= \varphi^{-1}\left(\prod_{i\in I}\int_E {}_i\varphi\circ f\,\underline{d\theta}\right)$$

$$= \prod_{i\in I}\int_E^{\oplus} {}_i f\,\underline{d\theta_\varphi} \quad .$$

المصادر

[1] المهجة , مالك سعد , ***تطوير نظرية ليبيك في التكامل*** , مجلة القادسية لعلوم الحاسبات والرياضيات , المجلد 2 , العدد 1 , 96-111 , 2010 .
[2] روبرت ج. بارتل ,***العناصر لتحليل حقيقي*** , جامعة الينوى. أربانا. شامبين. مركز الكتب الأردني , الطبعة الثالثة , 1975 .
[3] نعوم , عادل غسان , ***مقدمة في التحليل الرياضي*** , جامعة بغداد – كلية العلوم , 1981 .

[4] Asli. Deniz and U. **, *Lebesgue _ Stieltjes Measure on Time Scales* ,** Turk J. Math. , Vol. 33 , 27-40 , 2009 .
[5] Burill C. W. and Kundsen J. R. **, *Real Variables* ,** Holt, Rinehart and Winston , Inc. New York , 1969 .
[6] Kata. L. **, *On the Pseudo _ Lebesgue _ Stieltjes Integral* ,** Novi Sad J. Math. , Vol. 36 , No. 2 , 125-136 , 2009 .