

تقدير معلمات نموذج GARCH لتوزيع Polya مع تطبيق عملي

حسن صباح حافظ / باحث / sbahhassan70@gmail.com

ا.م.د. علي ياسين غني / الجامعة المستنصرية/كلية الادارة والاقتصاد/badrawi66@uomustansiriyah.edu.iq

P: ISSN : 1813-6729

<https://doi.org/10.31272/jae.i142.1035>

E: ISSN : 2707-1359

مقبول للنشر بتاريخ: 2023/9/21

تاريخ أستلام البحث : 2023/8/16

المستخلص: (Abstract)

يهدف البحث الى دراسة السلاسل الزمنية ذات التقلبات العالية (Volatility) والتي تكون فيها مشكلة الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين في حالة التوزيعات المتقطعة أي عندما تكون مشاهداتها قيماً صحيحة (Integer value) ، وقد تم دراسة أنموذج INGARCH عندما تتبع السلسلة توزيع Polya ، حيث تم دراسة الأنموذج نظرياً وعملياً ، ومن ثم تقدير معلمات الأنموذج باستخدام طريقة الامكان الاعظم (MLE) ، وفي الجانب التطبيقي تم استخدام البيانات الخاصة بعدد صفقات مصرف سومر التجاري في سوق العراق للاوراق المالية، حيث تم اختبار وجود تأثير ARCH باستخدام اختباري (- Ljung Box Test) و (ARCH Test) وتبين من الاختبارين ان البيانات تعاني من مشكلة عدم تجانس التباين (ARCH) ، واخيراً تم استنتاج ان الأنموذج الذي يفسر التقلبات في عدد الصفقات الخاصة بمصرف سومر التجاري هو أنموذج INGARCH(2,0) وذلك بالاعتماد على نتائج المعيارين AIC و BIC .

الكلمات المفتاحية: الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين ، طريقة الامكان الاعظم (MLE) ، توزيع Polya .



مجلة الادارة والاقتصاد
مجلد 49 العدد 142 / آذار / 2024
الصفحات : 140 - 149

* بحث مستل من رسالة ماجستير .

1. المقدمة (Introduction)

يعتبر تحليل السلاسل الزمنية من المواضيع الاحصائية المهمة التي تتناول سلوك الظواهر وتفسيرها عبر فترات زمنية معينة . ويمكن اجمال أهداف السلاسل الزمنية هي بالحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة بالعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية ، وبناء أنموذج لتفسير سلوكيات العملية بهدف الحصول على التنبؤات المستقبلية الخاصة بمشاهدات الظاهرة المدروسة . وان تحقيق ذلك يتطلب دراسة تحليلية شاملة لتلك النماذج بالاعتماد على الأساليب الاحصائية والرياضية . ويبدأ تحليل السلسلة الزمنية بأول خطوة وهي مرحلة تشخيص الأنموذج الملائم للبيانات (Identification) ، تتبعها مرحلة تقدير المعلمات الخاصة بالأنموذج (Estimation) ومن ثم فحص مدى الملائمة (Diagnostic checking) واخرها هي مرحلة التنبؤ المستقبلي (Forecasting) . وقد دخل موضوع السلاسل الزمنية مجالات واسعة في حياتنا وعلى وجه الخصوص المجالات الاقتصادية والصناعية والتجارية وبالتحديد المالية منها تحت عنوان السلاسل الزمنية المالية (Financial time series) ، اذ شهد أواخر القرن الماضي تطوراً سريعاً في مجال سوق الأوراق المالية (Stock Exchange) أو ما يعرف حالياً بالبورصة ، وهنا بدأ الاهتمام بدراسة السلاسل الزمنية المالية، والتي يمتاز غالبيتها بحالة عدم الثبات او التقلبات (Volatility) التي تكون مصاحبة للعديد منها ، مما جعل من استخدام نماذج السلاسل الزمنية الخطية الاعتيادية مثل نماذج بوكس جينكز (Box-jenkins) غير ممكن ، لذا بدأ الاهتمام بدراسة نماذج اخرى لتطابق هكذا نوع من البيانات وحدث هذا في عام 1982 حيث قدم العالم (Engle)⁽³⁾ لأول مرة أنموذج (Autoregressive Conditional Heteroscedastic) نماذج الانحدار الذاتي المشروط بوجود عدم تجانس التباين ARCH ، حيث يعني مصطلح الانحدار الذاتي ان العملية تعتمد على الماضي ومصطلح عدم تجانس التباين المشروط بالمعلومات السابقة يعني ان التباين المشروط بالمعلومات المتوفرة يعتمد على القيم السابقة للعملية ، وبعده في سنة 1987 قدم العالم (Bollerslev)⁽²⁾ أنموذج GARCH المعمم .

واستمر الباحثون في تطبيق العديد التوزيعات المستمرة على أنماذج GARCH وتقديم طرائق تقديرها وتطبيقها على البيانات الحقيقية ، وفي مطلع القرن الحادي والعشرون بدأت نماذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين بالتوسع ، اذ قدم بعض الباحثين نماذج جديدة تستخدم للتوزيعات المتقطعة تسمى INTEGER-VALUED GARCH (الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين للأعداد الصحيحة) وتكتب اختصاراً INGARCH وقدموا طرائق تقديرها وخصائصها . ان معظم الابحاث التي تناولت نماذج (INGARCH) كانت تستخدم توزيعين هما توزيع بواسون⁽⁴⁾ (Poisson) وتوزيع ثنائي الحد السالب⁽⁸⁾ (Negative Binomial) لذلك كان من الضروري إيجاد نماذج جديدة تتبع توزيعات مختلفة .

2. هدف البحث

يهدف هذا البحث الى دراسة السلاسل الزمنية ذات التقلبات العالية (Volatility) التي تكون فيها مشكلة الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين في حالة توزيع Polya التي تخضع لأنموذج (INGARCH) وتقدير معالماتها .

3. نماذج الانحدار الذاتي المعمم مشروط بعدم تجانس التباين (GARCH(m,n))⁽¹¹⁾

اقترح العالم⁽²⁾ (Bollerslev) سنة 1987 أنموذج (GARCH) هو الحالة العامة لنموذج ARCH حيث يسمح أنموذج (GARCH) بتوفر هيكل إزاحة أكثر مرونة من أنموذج ARCH ، فالتباين الشرطي لأنموذج (ARCH) يتمثل بدالة خطية من الأخطاء التربيعية السابقة (e_{t-i}^2) ، بينما في أنموذج (GARCH) يمكن تمثيل التباين المشروط بواسطة الأخطاء التربيعية السابقة (e_{t-i}^2) والتباينات الشرطية المزاحة (σ_{t-i}^2) .

ان اسم أنموذج (GARCH) يمكن ان يحلل الى حدين يضم الأول الانحدار الذاتي (Autoregressive) والذي يعني اعتمادية العملية على ماضيها (القيم السابقة) ، اما الحد الاخر فهو يمثل عدم ثبات التباين المشروط (Conditional Heteroscedastic) والذي يقصد به التقلبات غير المنتظمة للتباين المشروط (Volatility) .

وان $n \geq 1, m \geq 1$ حيث تمثل m مدة التأخر الخاصة بمربعات الأخطاء و n مدة التأخر الخاصة بالتباين الشرطي ، ويمكن تعريف الأنموذج بالمعادلات الاتية :

$$Z_t = \mu + e_t \quad \text{mean equation} \quad (1)$$

$$e_t = \sigma_t \varepsilon_t \quad \varepsilon_t \sim \text{iid } N(0,1) \quad (2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \dots + \alpha_p e_{t-m}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \dots + \beta_q \sigma_{t-n}^2 \quad (3)$$

وعندما يكون $m = n = 1$ يكون لدينا نموذج GARCH من الدرجة الأولى كما يلي :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (4)$$

وتعرف المعادلة (3) بمعادلة التباين المشروط او معادلة التقلبات (Volatility Equation) إذ إن $(\alpha_0 > 0)$ و $(\alpha_i \geq 0 \beta_j \geq 0 \text{ for } i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n)$ تمثل معاملات الأنموذج (Parameters) مع الإشارة الى ان $\alpha_i = 0$ عندما $i > m$ وان $\beta_j = 0$ عندما $j > n$.

ويمكن ملاحظة ان معادلة التقلبات لأنموذج (GARCH) مفسرة بدلالة المتوسط α_0 وكذلك بدلالة مربعات الأخطاء المتأخرة e_{t-i}^2 والذي يعرف بحد (ARCH) والذي يمثل التدبذب في الفترات السابقة بالإضافة الى التباين الشرطي المتأخر σ_{t-j}^2 ويعرف بحد (GARCH).

ان الشرط الضروري لتكون معادلة التقلبات (3) مستقرة هو ان يكون مجموع المعلمات (α_i, β_j) اقل من الواحد أي $\sum_{i=1}^m \alpha_i + \sum_{j=1}^n \beta_j < 1$

وفي حالة الاقتراب كثيراً من الواحد دل ذلك على ان صدمات التقلبات (Volatility shocks) اكثر ثباتاً. يمكن كتابة معادلة التباين المشروط لأنماذج (GARCH) بشكل اخر وذلك بفرض ان:

$$\begin{aligned} L_t &= e_t^2 - \sigma_t^2 \\ \sigma_t^2 &= e_t^2 - L_t \end{aligned} \quad (5)$$

وبالتعويض في معادلة (3) نحصل على:

$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i e_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^n \beta_j e_{t-j}^2 + L_t - \sum_{j=1}^n \beta_j L_{t-j} \quad (6)$$

$$e_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^r (\alpha_i + \beta_i) e_{t-i}^2 + L_t - \sum_{j=1}^n \beta_j L_{t-j} \quad (7)$$

اذ ان $r = \max(m, n)$

وان التباين غير المشروط للخطأ يكون وفق الصيغة الاتية

$$\text{Var}(e_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j} \quad (8)$$

4. أنموذج INGARCH (m,n) باستخدام توزيع Polya⁽¹⁾

توزيع Polya ويسمى ايضاً توزيع (Polya - Eggenberger) وهو توزيع احتمالي متقطع موجب بمعلمتين (a, θ) له تطبيقات في مجالات متنوعة مثل علم الوراثة والتأمين ونمذجة الاوبئة، حيث يستخدم التوزيع اشكال متعددة حسب قيم المعلمتين.

ليكن X_t متغيراً عشوائياً يتبع توزيع بوليا المشروط بالمعلومات السابقة (f_{t-1}) بالمعلمتين (a, θ_t) حيث ان $(a, \theta_t > 0)$ وعلى فرض ثبات قيمة المعلمة a فان دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة بالمعلومات السابقة تكون كما يأتي.

$$P(X_t = x_t | f_{t-1}) = C_{x_t}^{x_t + a - 1} \frac{\theta_t^{x_t}}{(1 + \theta_t)^{a + x_t}}, \quad x_t = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

وعلى فرض ان $R_t = a\theta_t$ فيكون المتوسط والتباين المشروط بالمعلومات السابقة كما يلي

$$E(X_t | f_{t-1}) = a\theta_t \quad (10)$$

$$R_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^n \beta_j R_{t-j}, \quad t \geq \max(m, n) \quad (11)$$

$$\text{Var}(X_t | f_{t-1}) = a\theta_t (1 + \theta_t) = R_t \left(1 + \frac{R_t}{a}\right) \quad (12)$$

ان المعادلة (11) تمثل أنموذج الانحدار الذاتي المعمم المشروط بعدم تجانس التباين للاعداد الصحيحة (Integer) والتي يرمز لها بالرمز (m, n) INGARCH. من المعادلة (11) بالإمكان كتابة X_t على النحو التالي

$$X_t = R_t + X_t - R_t \quad (13)$$

وبافتراض ان الخطأ هو ϵ_t

$$\epsilon_t = X_t - R_t \quad (14)$$

فان

$$X_t = R_t + \epsilon_t \quad (15)$$

ولايجاد التوقع ل X_t وذلك من خلال اخذ التوقع للمعادلة (15) كما يلي

$$E(X_t) = E(R_t + \epsilon_t) = E(R_t) \quad (16)$$

وبالتعويض في المعادلة (11) واخذ التوقع الرياضي وبافتراض استقرارية النموذج

$$E(X_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i E(X_t) + \sum_{j=1}^n \beta_j E(X_t)$$

$$E(X_t) - \sum_{i=1}^m \alpha_i E(X_t) - \sum_{j=1}^n \beta_j E(X_t) = \alpha_0$$

$$E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j} \quad (17)$$

حيث يشترط ان يكون

$$(0 < \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j < 1)$$

وفي حالة الأنموذج $m = n = 1$

$$E(X_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \quad (18)$$

وليجاد التوقع و التباين ل ϵ_t كما يلي

$$E(\epsilon_t) = E[E(\epsilon_t | f_{t-1})] = E[E\{(X_t - R_t) | f_{t-1}\}]$$

$$E(\epsilon_t) = E[E(X_t | f_{t-1})] - E[E(R_t | f_{t-1})]$$

$$E(\epsilon_t) = E(R_t) - E(R_t) = 0 \quad \text{المتوسط ثابت} \quad (19)$$

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \text{var} [E(\epsilon_t | f_{t-1})] + E[\text{var}(\epsilon_t | f_{t-1})]$$

وبما ان الحد الأول يساوي صفر تصبح المعادلة بالشكل التالي

$$\text{Var}(\epsilon_t) = E[\text{var}(\epsilon_t | f_{t-1})]$$

ومن المعادلة (14) يكون التباين على الشكل التالي

$$\text{Var}(\epsilon_t) = E[\text{var}(X_t | f_{t-1})] - E[\text{var}(R_t | f_{t-1})]$$

وبما ان R_t بدلالة الزمن (t-1) فنكون قيمته معلومة وتباين القيمة المعلومة يساوي صفر أي ان الحد الثاني يساوي صفر كما يلي

$$\text{Var}(\epsilon_t) = E[\text{var}(x_t | f_{t-1})]$$

$$\text{Var}(\epsilon_t) = E\left(R_t \left(1 + \frac{R_t}{a}\right)\right)$$

$$\text{Var}(\epsilon_t) = E(R_t) + \frac{E(R_t^2)}{a} \quad \text{التباين الثابت} \quad (20)$$

وان التباين عندما $h > 0$ يساوي

$$\text{Cov}(\epsilon_t \epsilon_{t+h}) = E(\epsilon_t \epsilon_{t+h})$$

$$\text{Cov}(\epsilon_t \epsilon_{t+h}) = E[\epsilon_t E(\epsilon_{t+h} | f_{t-1})] = 0 \quad (21)$$

حيث تشير المعادلة (21) ان السلسلة غير مرتبطة عندما $h > 0$

يتبين مما سبق اعلاه ان ϵ_t هو متغير عشوائي نقي (white noise).

وللحصول على أنموذج ARMA وذلك بتعويض قيمة R_t و α_0 من معادلة (15) و المعادلة (17) على التوالي في المعادلة (11) نحصل على

$$X_t - \epsilon_t = E(X_t) \left(1 - \sum_{i=1}^m \alpha_i - \sum_{j=1}^n \beta_j\right) + \sum_{i=1}^m \alpha_i X_{t-i} + \sum_{j=1}^n \beta_j (X_{t-j} - \epsilon_{t-j})$$

$$X_t - E(X_t) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_j) [X_{t-i} - E(X_t)] + \epsilon_t - \sum_{j=1}^n \beta_j \epsilon_{t-j} \quad (22)$$

ان المعادلة أعلاه تمثل أنموذج ARMA (r, n) بالمعاملات

$$\theta_j = \beta_j \quad \phi_i = (\alpha_i + \beta_j)$$

حيث $r = \max(m, n)$

وفي حالة الأنموذج $m = n = 1$ فان الأنموذج يكون على الشكل التالي $[X_{t-1} - E(X_t)]$

$$x_t - E(X_t) = (\alpha_1 + \beta_1) [X_{t-1} - E(X_t)] + \epsilon_t - \beta_1 \epsilon_{t-1} \quad (23)$$

حيث تمثل المعادلة (23) أنموذج ARMA(1,1) ومنها يمكن ايجاد التباين كما يلي

من المعادلة (11) وفي حالة الأنموذج $m = n = 1$ تكون معادلة التباين المشروط كما يلي

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 R_{t-1}$$

وبأخذ توقع R_t في المعادلة اعلاه كما يلي

$$\begin{aligned}
 E(R_t^2) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 R_{t-1})^2 \\
 E(R_t^2) &= E(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1} + \beta_1 R_{t-1} + \alpha_1 R_{t-1} - \alpha_1 R_{t-1})^2 \\
 E(R_t^2) &= E[\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)R_{t-1}\} + \alpha_1(X_{t-1} - R_{t-1})]^2 \\
 &\quad \text{من المعادلة (14) حيث ان } \epsilon_{t-1} = X_{t-1} - R_{t-1} \\
 E(R_t^2) &= E[\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)R_{t-1}\} + \alpha_1(\epsilon_{t-1})]^2 \\
 E(R_t^2) &= E[\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)R_{t-1}\}^2 + \alpha_1^2 \epsilon_{t-1}^2 + 2\alpha_1(\epsilon_{t-1})\{\alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1)R_{t-1}\}] \\
 &\quad \text{ومن خاصية الاستقرار فان } E(R_t) = E(R_{t-1}) = \mu \\
 E(R_t^2) &= \alpha_0^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 E(R_{t-1}^2) + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)E(R_t) + \alpha_1^2 \{E(R_t) + \frac{E(R_t^2)}{a}\} \\
 E(R_t^2) &= \alpha_0^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^2 E(R_{t-1}^2) + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)E(R_t) + \alpha_1^2 E(R_t) + \alpha_1^2 \frac{E(R_t^2)}{a} \\
 E(R_t^2) - (\alpha_1 + \beta_1)^2 E(R_{t-1}^2) - \alpha_1^2 \frac{E(R_t^2)}{a} &= \alpha_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)E(R_t) + \alpha_1^2 E(R_t) \\
 E(R_t^2) &= \frac{\alpha_0^2 + 2\alpha_0(\alpha_1 + \beta_1)\mu + \alpha_1^2 \mu}{1 - \frac{\alpha_1^2}{a} - (\alpha_1 + \beta_1)^2} \quad (24)
 \end{aligned}$$

من المعادلة (18) حيث ان

$$\begin{aligned}
 \alpha_0 &= \mu(1 - \alpha_1 - \beta_1) \\
 \alpha_0^2 &= \mu^2(1 - \alpha_1 - \beta_1)^2 \\
 &\quad \text{وبتعويض قيمة } \alpha_0 \text{ في بسط المعادلة (24)} \\
 &= \mu^2\{(1 - \alpha_1) - \beta_1\}^2 + 2\mu(1 - \alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 + \beta_1)\mu + \alpha_1^2 \mu \\
 &= \mu^2\{(1 - \alpha_1)^2 + \beta_1^2 - 2(1 - \alpha_1)\beta_1\} + 2\mu^2(1 - \alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 + \beta_1) + \alpha_1^2 \mu \\
 &= \mu^2\{1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 + \beta_1^2 - 2\beta_1 + 2\alpha_1\beta_1 + 2\alpha_1 + 2\beta_1 - 2\alpha_1^2 - 2\beta_1^2 - \\
 &\quad 4\alpha_1\beta_1\} + \alpha_1^2 \mu \\
 &= \mu^2\{1 - \alpha_1^2 - \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1\} + \alpha_1^2 \mu \\
 &= \mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu \quad (25)
 \end{aligned}$$

وبتعويض المعادلة (25) في المعادلة (24) ينتج

$$E(R_t^2) = \frac{\mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \frac{\alpha_1^2}{a}} \quad (26)$$

من المعادلة (12) حيث ان

$$\begin{aligned}
 \text{Var}(\epsilon_t) &= E(R_t) + \frac{E(R_t^2)}{a} \\
 &\quad \text{وبتعويض قيمة المعادلة (26) في المعادلة (12) يكون} \\
 \text{Var}(\epsilon_t) &= \mu + \frac{1}{a} \frac{\mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \frac{\alpha_1^2}{a}} \quad (27)
 \end{aligned}$$

وبأخذ البسط وبعد اخذ المضاعف المشترك للطرف الايمن للمعادلة (27) يكون

$$\begin{aligned}
 &= \mu [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \frac{\alpha_1^2}{a}] + \frac{1}{a} [\mu^2\{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \alpha_1^2 \mu] \\
 &= \mu [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2] - \frac{\alpha_1^2 \mu}{a} + \frac{\mu^2}{a} \{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} + \frac{\alpha_1^2 \mu}{a} \\
 &= \mu [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2] + \frac{\mu^2}{a} \{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2\} \\
 \text{Var}(\epsilon_t) &= \frac{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2}{1 - (\alpha_1 + \beta_1)^2 - \frac{\alpha_1^2}{a}} \left(\mu + \frac{\mu^2}{a} \right) = \sigma_\epsilon^2 \quad (28)
 \end{aligned}$$

كما يمكن كتابة معادلة التباين كما يلي

$$\text{Cov}(X_t, X_{t-k}) = \begin{cases} \frac{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-\frac{\alpha_1^2}{a}} \left(\mu + \frac{\mu^2}{a} \right), & k = 0 \\ (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \frac{\alpha_1[1-\beta_1(\alpha_1+\beta_1)]}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2-\frac{\alpha_1^2}{a}} \left(\mu + \frac{\mu^2}{a} \right), & k \geq 1 \end{cases} \quad (29)$$

اما معادلة الارتباط الذاتي فتكون كما يلي

$$\text{Corr}(X_t, X_{t-k}) = \frac{\alpha_1[1-\beta_1(\alpha_1+\beta_1)]}{1-(\alpha_1+\beta_1)^2+\alpha_1^2} (\alpha_1 + \beta_1)^{k-1} \quad (30)$$

5. تقدير المعلمات بطريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood) (10)

لتكن سلسلة زمنية ذات قيم صحيحة تتبع التوزيع الاحتمالي (Polya distribution) المشروط بالمعلومات السابقة (f_{t-1}) والمتمثلة بدالة الكثافة الاحتمالية المعرفة في المعادلة (10) يمكن تقدير المعلمات الخاصة بالأنموذج بطريقة (MLE) كما يلي

$$L_t = \prod_{i=1}^s p(x_t | f_{t-1}) = \prod_{i=1}^s \left\{ C_{x_t}^{x_t+a-1} \frac{\theta_t^{x_t}}{(1+\theta_t)^{a+x_t}} \right\} \quad (31)$$

$$l_t = \sum_{t=1}^s \{ \text{Ln}(C_{x_t}^{x_t+a-1}) + x_t \text{Ln}(\theta_t) - (a+x_t) \text{Ln}(1+\theta_t) \} \quad (32)$$

وبدلالة R_t حيث $R_t = a\theta_t$ فتكون معادلة التقدير كما يلي

$$l_t = \text{Ln} L_t = \sum_{t=1}^s \left\{ \text{Ln}(C_{x_t}^{x_t+a-1}) + x_t \text{Ln} \left(\frac{R_t}{a} \right) - (a+x_t) \text{Ln} \left(1 + \frac{R_t}{a} \right) \right\} \quad (33)$$

وأن

$$\frac{\partial l_t}{\partial R_t} = \sum_{t=1}^s \left(\frac{x_t}{R_t} - \frac{a+x_t}{a \left\{ 1 + \frac{R_t}{a} \right\}} \right)$$

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_0} = \frac{\partial l_t}{\partial R_t} \frac{\partial R_t}{\partial \alpha_0} = \sum_{t=1}^s \left(\frac{x_t}{R_t} - \frac{a+x_t}{a \left\{ 1 + \frac{R_t}{a} \right\}} \right) \frac{\partial R_t}{\partial \alpha_0} \quad (34)$$

$$\frac{\partial l_t}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial l_t}{\partial R_t} \frac{\partial R_t}{\partial \alpha_i} = \sum_{t=1}^s \left(\frac{x_t}{R_t} - \frac{a+x_t}{a \left\{ 1 + \frac{R_t}{a} \right\}} \right) \frac{\partial R_t}{\partial \alpha_i} \quad (35)$$

$$\frac{\partial l_t}{\partial \beta_j} = \frac{\partial l_t}{\partial R_t} \frac{\partial R_t}{\partial \beta_j} = \sum_{t=1}^s \left(\frac{x_t}{R_t} - \frac{a+x_t}{a \left\{ 1 + \frac{R_t}{a} \right\}} \right) \frac{\partial R_t}{\partial \beta_j} \quad (36)$$

اما المشتقات $\frac{\partial R_t}{\partial \beta_j}$, $\frac{\partial R_t}{\partial \alpha_i}$, $\frac{\partial R_t}{\partial \alpha_0}$ فيتم ايجادها بالاعتماد على المعادلة (11) وتمثل مشتقات R_t بالنسبة للمعلمات α_0 و α_i و β_j وتكون كما يلي :

$$\frac{\partial R_t}{\partial \alpha_0} = 1 + \sum_{k=1}^s \beta_t \frac{\partial R_{t-k}}{\partial \alpha_0} \quad (37)$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial \alpha_i} = x_{t-i} + \sum_{k=1}^s \beta_t \frac{\partial R_{t-k}}{\partial \alpha_i} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (38)$$

$$\frac{\partial R_t}{\partial \beta_j} = R_{t-j} + \sum_{k=1}^s \beta_t \frac{\partial R_{t-k}}{\partial \beta_j} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (39)$$

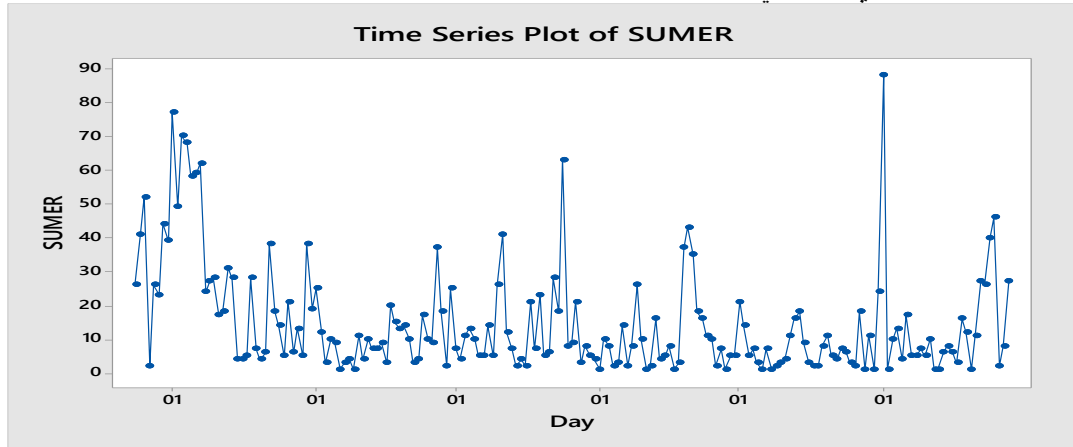
ونحصل على (m+n+1) من المعادلات غير الخطية ، ومن ثم يتم استخدام احدى طرائق التكرار في التحليل العددي في حساب المشتقات وتقدير المعلمات الخاصة بالأنموذج .

6. الجانب التطبيقي

في هذا الجزء من البحث سوف يتم نمذجة البيانات الخاصة بعدد الصفقات التي نفذها مصرف سومر التجاري في سوق العراق للاوراق المالية للفترة من 25/5/2022 الى 21/5/2023 وبواقع 189 مشاهدة يومية عدا الايام التي تم ايقاف التداول فيها , حيث تم اختيار هذه الفترة وذلك لانها تتميز بكثرة التقلبات السياسية

تقدير معاملات نموذج GARCH لتوزيع Polya مع تطبيق عملي

والاقتصادية , وبأستخدام البرنامج الجاهز (Minitab) تم رسم السلسلة الزمنية لعدد الصفقات الخاصة بمصرف سومر التجاري وكما يلي



الشكل (1) يمثل رسم السلسلة الزمنية للبيانات

حيث يشير الشكل (1) الى وجود تذبذب واضح في بيانات السلسلة مما يؤشر وجود تأثير ARCH . قبل البدء بتحليل البيانات ينبغي التأكد من استقرار السلسلة الزمنية وذلك لتجنب الوقوع في الانحدار المزيف والذي يعكس على دقة التنبؤ , وقد تم استخدام اختبار ديكي فولر الموسع ⁽⁸⁾ (ADF) وكانت نتائجه كما يأتي

الجدول رقم (1) يمثل نتائج اختبار ADF

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-7.760744	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.465202	
5% level	-2.876759	
10% level	-2.574962	

وبأستخدام برنامج (E Views 13) حيث يتبين من الجدول رقم (1) الخاص بنتائج اختبار (ADF) ان السلسلة الزمنية مستقرة .

و للتحقق من وجود مشكلة عدم تجانس التباين للأخطاء العشوائية (ARCH) يتم ذلك بالاعتماد الاختبارين ⁽⁷⁾ (Ljung – Box Test) و ⁽³⁾ (ARCH Test) ولفترات الابطاء (1,2,3,4,5) وكما يلي

الجدول رقم (2) نتائج اختبار LB

lag	Q	P-value	Decision
1	49.733	0.000	Reject H ₀
2	82.184	0.000	Reject H ₀
3	109.26	0.000	Reject H ₀
4	127.18	0.000	Reject H ₀
5	141.32	0.000	Reject H ₀

من الجدول (2) حيث تم رفض الفرضية H₀ والتي تنص على عشوائية الاخطاء وقبول الفرضية البديلة H₁ والتي تعني وجود تأثيرات ARCH .

اما اختبار (ARCH Test) فيكفي رفض فرضية واحدة للحكم على وجود تأثيرات ARCH في بيانات العينة وكانت نتائج الاختبار كما يلي

الجدول رقم (3) نتائج اختبار (ARCH Test)

lag	t-Statistic	P-value
1	2.829005	0.0052
2	4.107501	0.0001
3	0.124278	0.9012
4	-0.478407	0.6330
5	0.589748	0.5561

وبعد ان تم التأكد من وجود مشكلة عدم تجانس التباين (ARCH) في البيانات سوف يستخدم برنامجاً مكتوب بلغة (Quick Basic) لتقدير المعلمات الخاصة بنموذج INGARCH وبأخذ السلسلة الاصلية للبيانات الخاصة بعدد الصفقات التي نفذها مصرف سومر التجاري وكانت النتائج كما يأتي

الجدول رقم (4) نتائج تقدير المعلمات الخاصة بنموذج INGARCH

النماذج	α_0	α_1	α_2	β_1	AIC	BIC
INGARCH (1,0)	7.500999	.4730998			6.640501	6.629919
INGARCH (1,1)	4.538466	.4099999		.28	6.631835	6.6106709
INGARCH (2,0)	6.851621	.4489999	0.08300001		6.591523	6.57035897

من الجدول (4) حيث يتضح ان افضل أنموذج يكون INGARCH(2,0) الذي اعطى اقل قيمة لمعباري AIC و BIC.

بعد اختيار الأنموذج الافضل بالاعتماد على معباري AIC⁽⁴⁾ و BIC⁽¹⁰⁾ والذي كان INGARCH(2,0) يجب علينا الان فحص مدى ملائمة الأنموذج للبيانات ، ويكون ذلك عن طريق اعادة اختبار (ARCH Test)

بأستخدام البواقى القياسية (Person Error) التي تم الحصول عليها بأستخدام المعادلة الاتية

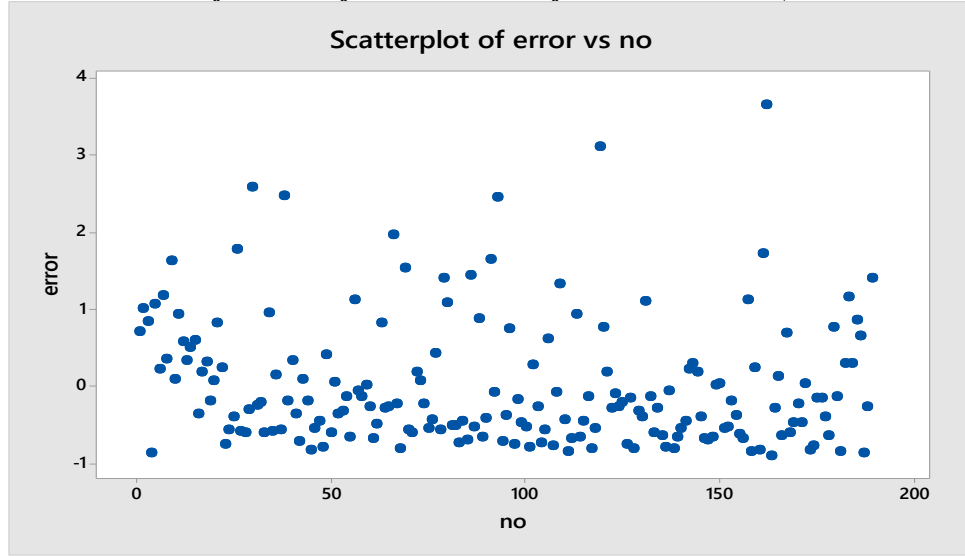
$$PR = \frac{X_t - E(x_t|f_{t-1})}{\sqrt{v(x_t|f_{t-1})}}$$

حيث كانت نتائج اختبار ARCH ولنفس فترات الابطاء كما في الجدول يأتي

الجدول (5) يمثل اختبار ARCH بعد التقدير

lag	t-Statistic	P-value	Decision
1	0.423881	0.6722	Accept H ₀
2	-0.084802	0.9325	Accept H ₀
3	-0.803320	0.4229	Accept H ₀
4	0.373318	0.7094	Accept H ₀
5	-0.155336	0.8767	Accept H ₀

ومن النتائج الموضحة في الجدول (5) حيث تم قبول جميع فرضيات العدم مما يدل على عشوائية للبواقى القياسية (Person Error) وعدم انتظامها في أنموذج معين يمثلها اي تم ازالة تأثر ARCH في السلسلة الزمنية ، ويؤكد ذلك الرسم الخاص بسلسلة البواقى القياسية والمبينة في الشكل الاتي



شكل (5) يمثل رسم سلسلة البواقى القياسية (Person Error)

وعليه فإن الأنموذج الافضل والذي يمثل السلسلة الزمنية لبيانات مصرف سومر التجاري يكون

$$R_t = 6.851621 + .4489999x_{t-1} + 0.08300001x_{t-2}$$

7. الاستنتاجات والتوصيات

الاستنتاجات

لقد استنتج الباحثان ان

1- الأنموذج الذي يمثل عدد الصفقات التي نفذها مصرف سومر التجاري في سوق العراق للاوراق المالية للفترة من 25/5/2022 الى 21/5/2023 عندما تتبع السلسلة توزيع Polya هو أنموذج INGARCH(2,0) الذي اعطى اقل قيمة لمعباري AIC ومعباري BIC .

2- تبين من الجانب التطبيقي تقارب النماذج INGARCH(1,1) INGARCH(1,0) .

التوصيات

يوصي الباحثان بما يلي

- 1- استخدام طرائق تقدير اخرى غير المذكورة بالبحث ومقارنتها مع طريقة الامكان الاعظم (MLE) مثل الطرائق البيزية وطريقة تعظيم التوقع (EM) .
- 2- دراسة نماذج برتب اعلى من رتب النماذج المدروسة .
- 3- دراسة نماذج بياناتها تتبع توزيعات اخرى غير التوزيعات المذكورة .

المصادر

- 1- علي ياسين غني البدرابي (2015) ، " اثر التوزيع غير الطبيعي لحدود الخطأ العشوائي في تقدير معاملات بعض نماذج ARMA-GARCH مع تطبيق " اطروحة دكتوراه , الجامعة المستنصرية .
- 2- Bollerslev T. (1987), "A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return" Review of Economics and Statistics, Vol. 69, pp 542-547.
- 3- Engle R.F. (1982), "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation" Econometrica, Vol. 50, No.4, pp 987-1007.
- 4- Ferland, R., Latour A., & Oraichi D. (2006), "Integer-Valued GARCH Processes" Journal of Time Series Analysis, Vol. 27, pp 923-942.
- 5- Francq, C. and J.-M. Zakoian, GARCH models: structure, statistical inference and financial applications. 2011: John Wiley & Sons .
- 6- Tripathy, N. and A. Garg, Forecasting stock market volatility: Evidence from six emerging markets. Journal of International Business and Economy, 2013. 14(2): p. 69-93.
- 7- Tsay R.S. (2005), Analysis of Financial Time Series, Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey .
- 8- Walck C., & Fysikum (2007), "Hand-book on Statistical Distributions for Experimentalists" University of Stockholm.
- 9- Weiß C.H. (2010), "INARCH(1) Processes: Higher-Order Moments and Jumps" Statistics and Probability Letters, Vol. 80, pp 1771-1780.
- 10- Zhu F. (2011), " A Negative Binomial Integer-Valued GARCH model" Journal of Time Series Analysis, Vol. 32, pp 54-67.

Estimating the parameters of the GARCH model for the Polya distribution with a practical application

Hassan Sabah Hafez / Researcher / sbahhassan70@gmail.com .
A.M.D. Ali Yassin Ghani/Al-Mustansiriya University/College of
Administration and Economics / badrawi66@uomustansiriyah.edu.iq

Abstract :

The research aims to study time series with high volatility (volatility) , in which the problem of autoregressive conditional on the heterogeneity of variance in the case of intermittent distributions , that is when its observations have integer values . The INGARCH model was studied when the series follows the Polya distribution , which was Studying the model theoretically and practically , and then estimating the model parameters using the maximum likelihood method (MLE) , and in the applied aspect , data on the number of transactions of the Sumer Commercial Bank in the Iraqi Stock Exchange was used , where the presence of the ARCH effect was tested using the Ljung - Box Test and (ARCH Test) It became clear from the two tests that the data suffers from the problem of heterogeneity of variance (ARCH) , and finally it was concluded that the model that explains the fluctuations in the number of transactions of Sumer Commercial Bank is the INGARCH (2.0) model , based on the results of the two standards AIC and BIC .

Keywords : autoregression conditional on heterogeneity of variance , maximum likelihood method (MLE) , Polya distribution .

