

تقدير دالة المعولية للتوزيع المركب (باريتو - الاسي المبتور)

الباحثة: ايمان قيس عبد الرحمن أ. م. وفاء عبد الصمد عاشور

جامعة البصرة / كلية الإدارة والاقتصاد / قسم الإحصاء

wafaa.ashoor@uobasrah.edu.iq emanlayli@gmail.com

المستخلص:

تم في هذا البحث تقدير معالم توزيع مركب جديد وهو (باريتو-الاسي المبتور) الناتج من تركيب توزيعات باريتو من النوع الأول والاسي المبتور، وتقدير دالة المعولية له وذلك لان مع تطور التكنولوجيا وكثرة استخدام الآلات والمكائن، أصبح لابد من دراسة العطلات والتوقفات التي تحدث في المكائن، لكن بسبب التعقيد في البيانات الحقيقية كانت هنالك صعوبة في استعمال التوزيعات المفردة لأنها لا تعطي الوصف الملائم لسلوك البيانات الحقيقية؛ لذلك تم اقتراح طرق التركيب للتوزيعات الاحتمالية لإنتاج وتوزيعات أكثر ملائمة لوصف سلوك البيانات ودراسة سبب حدوث العطلات والتوقفات المفاجئة وإيجاد الحلول اللازمة لحلها. واستخدام أربعة طرق للتقدير وهي (الإمكان الأعظم والعزوم والمقدرات التجزئية ومقدر بيز (أسلوب غير المعلوماتية))، وتم استخدام لغة البرامج الإحصائية R بإصدارها (4.0.5) في برامج المحاكاة من خلال استخدام عينة افتراضية تمثل قيم افتراضية مختلفة للمعلومات وثلاثة حجوم مختلفة للعينات وهي (25, 50, 100)، ان احجام العينات كبيرة نسبيا وذلك لتمثل خصائص المجتمع بشكل افضل من العينات الصغيرة كما تزيد من فرصة رفض الفرضية الصفرية عندما تكون خاطئة (أي تقلل الخطأ الاحصائي من النوع الأول) وكررت التجربة (1000) مرة، وباستخدام معيار (MSE) للمقارنة، تم الاستنتاج ان طريقة بيز هي الأفضل من بين طرق التقدير كما وان جميع المقدرات تمتلك خاصية الاتساق لان متوسط مربعات الخطأ يقل كلما زاد حجم العينة، وان جميع طرق التقدير تقترب من طريقة بيز عند احجام عينات اكبر من العينات المستخدمة.

الكلمات المفتاحية: التوزيعات الاحتمالية المركبة، التوزيع الاسي، توزيع باريتو، الإمكان الأعظم، المقدرات التجزئية، مقدر بيز.

Estimation of the Reliability Function of a Complex Distribution (Pareto - amputated exponential)

Eman Qais Abd El , Rahman

Supervised by Wafa Abdel Samad Ashour

Department of Statistics /College of Administration and Economics – University of Basrah

Abstract:

In this research, the parameters of the distribution of a new compound (Pareto-amputated ace) resulting from the composition of the Pareto distributions of the first type and the truncated exponential were estimated, and the reliability function was estimated because with the development of technology and the frequent use of machines and machines, it became necessary to study the holidays and stops that occur in the machines, but due to the complexity of the real data, there was difficulty in the single distribution workers because they do not give an appropriate description of the behavior of the real data; Therefore, synthesis methods for probability distributions were proposed to produce more appropriate distributions to describe the behavior of the data, study the cause of sudden holidays and stops, and find solutions to solve them. He used four methods of estimation, namely (the greatest possibility, moments, fractional estimators, and the Bayes estimator (non-informational method)), and the language of statistical programs R was used by issuing (4.0.5) in simulation programs and through the use of a hypothetical sample representing different default values for the parameters and three different sizes of samples, which are (100,50,25) The sample sizes are relatively large to represent the characteristics of the population better than small samples and also increase the chance of rejecting the null hypothesis when it is false (i.e. reduces the statistical error of the first type) and the experiment was repeated (1000) times, using the MSE criterion) For comparison, it was concluded that the Bayes method It is the best among the estimation methods and that all estimators have the property of consistency because the average squares of error decreases as the sample size increases, and that all estimation methods approach the Bays method at larger sample sizes than the samples used.

المبحث الأول: منهجية البحث

1-1 المقدمة

يواجه الباحث الكثير من الصعوبات عند قيامه بالتحليل الاحصائي، من هذه الصعوبات، كيفية إيجاد التوزيع الملائم لبيانات الظاهرة تحت الدراسة وقد تكون البيانات للظواهر الحقيقية تتمثل بدرجة عالية من الالتواء او ان يقتصر ظهورها على الجانب الأيمن دون الجانب الايسر او بالعكس (أي ان المشكلة في ذلك هو تشتت البيانات او قد تضم قيم متطرفة)، في الآونة الأخيرة اصبح استخدام التوزيعات الاحتمالية المفردة بنوعها المستمر والمتقطع لا تعطي النتيجة (المرنة) المطلوبة عند تمثيلها او وصفها للظواهر المدروسة (أي عدم قدرتها على التكيف مع التغييرات التي تحدث في العينة) ، لذلك اهتم الباحثون في دراسة طرق جديدة لتوليد توزيعات اكثر مرونة في تحليل البيانات ومن هذه الطرق هي طريقة التوزيعات الاحتمالية المركبة الناتجة من تركيب التوزيعات المفردة، وفي هذا البحث تم اقتراح توزيع وهو(باريتو – الاسي المبتور) وتم إيجاد بعض الخصائص له وتقدير دالة المعولية له. وان من الدراسات السابقة هي:

في عام ٢٠١٠ قدم (**Wagner Barreto – Souza** وآخرون) التوزيع الاسي المعمم -بيتا، الذي يتضمن التوزيع الاسي بيتا والتوزيع الاسي المعمم كحالات خاصة، تم تقديم معالجة رياضية شاملة للتوزيع الجديد، استخدم طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المعلمات، وتم تطبيق مجموعة من البيانات الحقيقية لإظهار ان هذا التوزيع يمكن ان يعطي ملائمة أفضل.

في عام ٢٠١٢ قدم (**Luz M. Zea** وآخرون) توزيع باريتو الاسي -بيتا مع تطبيق لقابلية الإصابة بسرطان المثانة، تم تقديم دراسة مفصلة عن الخصائص

الرياضية للتوزيع الناتج وهي (العزوم، الدالة الكمية، متوسط الانحرافات وغيرها)، واشتقاق دالة العزم وغيرها من الدوال، استخدم طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات النموذج، اشتقاق مصفوفة المعلومات (فيشر)، وتم توضيح مرونة النموذج الجديد من خلال تطبيق مجموعه من البيانات الحقيقية.

في عام ٢٠١٣ قدمت الباحثة Kareama Abed AL_Kadim

وآخرون (باريتو-الاسي الناتج من تركيب التوزيع الاسي مع توزيع باريتو، واكتفى الباحثان بتقديم بعض الخصائص الرياضية (العزوم، المتوسط، الوسيط، والتباين وغيرها)، وتم استخدام طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المعلمات.

في عام ٢٠١٣ قدم (A. Asghar Zadeh وآخرون) توزيع باريتو -

بواسون ليندلي مع التطبيقات، وهو توزيع جديد على أساس توزيع باريتو وتوزيع بواسون ليندلي المركب، تم انشاء العديد من الخصائص الرياضية للتوزيع، والحصول على تقدير المعلمات باستخدام طريقة الإمكان الأعظم، تم تقديم تطبيقات التوزيع باستخدام ثلاث مجموعات من البيانات الحقيقية وظهر ان التوزيع يتناسب بشكل أفضل من التوزيعات الأخرى ذات الصلة في الاستخدامات العملية.

في عام ٢٠١٦ قام الباحث (Ayman Alzaatreh) بتحديد ودراسة توزيع

جديد وهو توزيع كاما -باريتو، وتم الحصول على خصائص مختلفة للتوزيع (العزوم وغيرها)، استخدم طريقة الإمكان الأعظم لتقدير المعلمات للنموذج الجديد، وبين إمكانية التوزيع من خلال تطبيقه على ثلاث مجموعات من البيانات الحقيقية.

في عام ٢٠١٦ اقترح (M.H. TAHIR وآخرون) توزيع جديد ثلاثي المعلمات

وبيل -باريتو، وتم اشتقاق الخصائص المختلفة للتوزيع الجديد (العزوم وغيرها)، تم

التقدير باستخدام طريقة الإمكان الأعظم، وتحديد مصفوفة المعلومات المرصودة، وتم بيان إمكانية النموذج من خلال تطبيقه على مجموعتين من البيانات الحقيقية.

في عام ٢٠٢١ اقترح الباحث (العامري) توزيع احتمالي جديد وهو توزيع كامبل المبتور من اليسار 2021 في عام وعائلته التي ضمنت توزيعين هما توزيع كامبل المبتور من اليسار -ويل وتوزيع كامبل المبتور من اليسار -الاسي، وتم اشتقاق الخصائص للتوزيعات المقترحة وهي (العزم المركزي، العزم اللامركزي، التفلطح، الالتواء، المنوال، والوسيط)، تم تقدير المعلمات باستخدام أربعة طرق للتقدير وهي (الإمكان الاعظم، MSE وتمت المقارنة بين طرق التقدير باستخدام معيار Cran) والعزوم، المقدرات التجزئية، ومقدر

، تم اقتراح نماذج رياضية لتقدير الفترة المثلى للاستبدال الوقائي تحت معيار اقل كلفة واقل وقت توقف بتوظيف التوزيعات الاحتمالية المقترحة وكذلك تم بناء نظام خبير لتقدير الفترة المثلى للاستبدال الوقائي، اعتمد الباحث أسلوب المحاكاة للمقارنة بين طرق التقدير ونفذت التجربة باستخدام أربعة حجوم عينات مختلفة وحالات مختلفة للقيم الافتراضية للمعلمات وتم تكرار التجربة (١٠٠٠) مرة وبعد المقارنة بينت النتائج ان طريقة مقدر Cran هي الافضل بين الطرق المستخدمة .

تختلف دراستنا عن الدراسات السابقة وذلك من حيث تقدير دالة المعولية لتوزيع مركب جديد وهو (باريتو - الاسي المبتور) وتقدير معلماته باستخدام أربعة طرق للتقدير وهي (الإمكان الأعظم والعزوم والمقدرات التجزئية وبيز(جيفري).

مشكلة البحث 1-2

يواجه الباحث مشكلة في تحديد المرونة المطلوبة في التوزيعات المفردة عند تحليل البيانات لذلك يتم اللجوء الى أسلوب تركيب التوزيعات لإيجاد توزيع مركب جديد يكون ذات مرونة أفضل لتحليل البيانات.

وكذلك مع تطور التكنولوجيا وكثير استخدام الآلات والمكائن، أصبح لابد من دراسة العطلات والتوقفات التي تحدث في المكائن، ولكن بسبب التعقيد في البيانات الحقيقية كانت هنالك صعوبة في استعمال التوزيعات المفردة لأنها لا تعطي الوصف الملائم لسلوك البيانات الحقيقية؛ لذلك تم اقتراح طرق التركيب للتوزيعات الاحتمالية لإنتاج توزيعات أكثر ملائمة لوصف سلوك البيانات ودراسة سبب حدوث العطلات والتوقفات المفاجئة وإيجاد الحلول اللازمة لحلها.

3-1 هدف البحث

تقدير معولية التوزيع الاحتمالي المركب (باريتو - الاسي المبتور) وتكون الفائدة من تقدير دالة المعولية لمعرفة احتمال عدم الفشل للمكائن والآلات (أي احتمالية بقاء الجهاز قيد العمل)، واستعمال المحاكاة لتوليد بيانات تلائم التوزيع وإيجاد أفضل طريقة للتقدير من الطرق المستخدمة، بحيث ان الطريقة الأفضل للتقدير في المحاكاة سوف تستخدم في التقدير لدالة المعولية في الجانب التطبيقي.

المبحث الثاني: الجانب النظري

دالة المعولية 2-1 [1][2]

وهي تمثل احتمال عدم الفشل للماكنة (الالة)، أي عدم توقفها عن العمل خلال الزمن ، وتكون بالشكل (t) الرياضي التالي

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^{\infty} f(x)dx$$
$$R(t) = 1 - F(t) \quad (1)$$

هي دالة الكثافة الاحتمالية للفشل. (t) f هي الدالة التراكمية للفشل، F(t)

دالة المخاطرة 2-2 [3]

وتعرف بانها غاية احتمال فشل الماكنة (الالة) بالفترة (t, t + Δt) بشرط ان تقترب Δt من الصفر (Δt → 0)، ويعرف رياضيا كالتالي

$$h(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t : T > t)}{\Delta t} \right]$$
$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{P(t < T < t + \Delta t)}{\Delta t} \right] * (P(T > t))^{-1}$$
$$= [S(t)]^{-1} * \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} \right]$$
$$h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} \quad \dots (2)$$

3-2 التوزيع الاحتمالي (باريتو - الاسي المبتور)

دالة الكثافة الاحتمالية

$$f(x) = \frac{\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(x-\theta)}; x \geq \theta, \lambda, \alpha > 0, \theta > 0 \quad \dots (3)$$

دالة التوزيع التراكمية

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(x-\theta)}; x \geq \theta \quad \dots (4)$$

دالة المعولية (الموثوقية)

$$R(x) = e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(x-\theta)} \quad \dots (5)$$

دالة المخاطرة

$$h(x) = \frac{\lambda}{\alpha} \quad \dots (6)$$

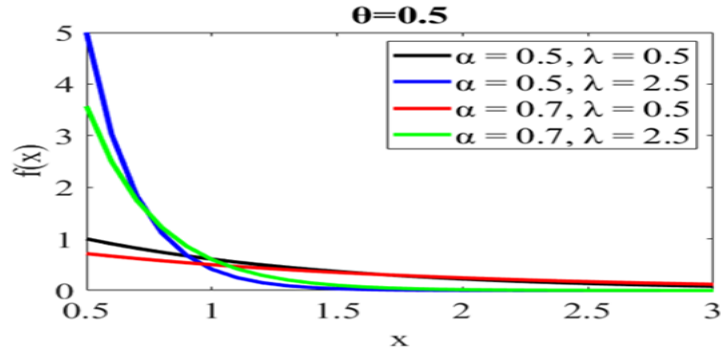
العزوم اللامركزية من الدرجة r

$$E(x^r) = \int_{\theta}^{\infty} x^r f(x) dx$$

$$E(x^r) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^r e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma(r+1, \frac{\lambda\theta}{\alpha})\right) \quad \dots (7)$$

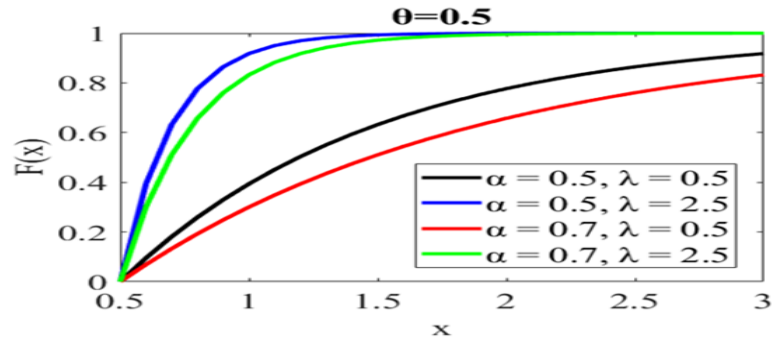
التباين

$$\sigma^2 = e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left[\mu^2 \left(\Gamma(1, \frac{\lambda\theta}{\alpha})\right) - 2\mu \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \left(\Gamma(2, \frac{\lambda\theta}{\alpha})\right) + \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 \left(\Gamma(3, \frac{\lambda\theta}{\alpha})\right) \right] \dots (8)$$



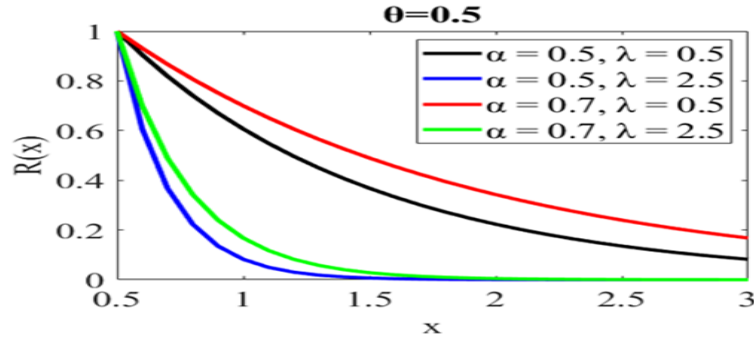
شكل (1): رسم دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب باريتو-الاسي المبتور لقيم مختلفة لمعاملات الشكل (λ, α) ومعلمة القياس $(\theta = 0.5)$

عند قيم المعلمات $(\lambda, \alpha, \theta)$ المختلفة تمثل القيم لدالة لكثافة الاحتمالية ترتيب تنازلي لجميع الحالات أي ان الدالة الاحتمالية عبارة عن دالة مقعرة المصدر: من اعداد الباحث



شكل (2): رسم الدالة التوزيعية التراكمية للتوزيع المركب لقيم مختلفة لمعاملات الشكل (λ, α) ومعلمة القياس $(\theta = 0.5)$

أي ان عند قيم المعلمات المختلفة تكون الدالة التراكمية متزايدة أي انها تصاعدية لجميع الحالات أي ان شكل الدالة التراكمية يكون محدب المصدر: من اعداد الباحث



شكل (3): رسم دالة المعولية لقيم مختلفة لمعاملات الشكل (λ, α) وعلمة القياس $(\theta = 0.5)$

تكون دالة المعولية دالة متناقصة أي انها تنازلية لجميع حالات القيم المختلفة للمعاملات أي انها تأخذ الشكل المقعر
المصدر: من اعداد الباحث

4-2 طرق التقدير

تم استخدام أربع طرق للتقدير لإيجاد أفضل مقدر لمعاملات ودالة المعولية ومن هذه الطرق

1- طريقة الإمكان الأعظم

قد تم التعبير عن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع باريتو- الاسي المبتور في المعادلة رقم (3)، وبذلك يمكننا الحصول على دالة الإمكان كما يأتي:

$$L(\lambda, \theta, \alpha) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{\lambda}{\alpha} e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(x_i - \theta)} \right]$$

$$L(\lambda, \theta, \alpha) = \left[\frac{\lambda}{\alpha} \right]^n e^{-\frac{\lambda}{\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)} \quad \dots (9)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للمعادلة (9) نحصل على ما يلي:

$$\ln L(\lambda, \theta, \alpha) = n[\ln(\lambda) - \ln(\alpha)] - \frac{\lambda}{\alpha} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta) \quad \dots (10)$$

الآن نشتق المعادلة (10) بالنسبة للمعلمات ومساواة المشتقات بالصفر نحصل على:

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, \theta, \alpha)}{\partial \lambda} = \frac{n}{\hat{\lambda}} - \frac{1}{\hat{\alpha}} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}) \quad \dots (11)$$

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, \theta, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{-n}{\hat{\alpha}} + \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\theta}) \quad \dots (12)$$

$$\frac{\partial \ln L(\lambda, \theta, \alpha)}{\partial \theta} = \frac{\hat{\lambda}}{\hat{\alpha}}$$

$$\hat{\theta} = \min(x) = Y_1 \quad \dots (13)$$

تحل المعادلتين (11) (12) عدديا بطريقة نيوتن رافسون

تم اخذ الاحصاء من المرتبة الاولى في المعادلة (13) وذلك لان الاشتقاق بالنسبة للمعلمة θ يساوي صفر وبهذا فيكون تقدير θ يساوي الحد الأدنى للمتغير العشوائي وهو Y_1 .

2- طريقة العزوم [2]

باستخدام المعادلة (7) يمكننا الحصول على مقدرات العزوم وكالاتي:

بافتراض $r=1$

$$m_1 = M_1$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^1}{n} = \frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma\left(2, \frac{\lambda\theta}{\alpha}\right) \right)$$

$$\frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma\left(2, \frac{\lambda\theta}{\alpha}\right) \right) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^1}{n} = 0 \quad \dots (14)$$

عندما $r=2$ يكون كالتالي

$$m_2 = M_2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma\left(3, \frac{\lambda\theta}{\alpha}\right) \right)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma\left(3, \frac{\lambda\theta}{\alpha}\right) \right) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = 0 \quad \dots (15)$$

وأیضا عندما $r=3$ فان

$$m_3 = M_3$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma\left(4, \frac{\lambda\theta}{\alpha}\right) \right)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 e^{\frac{\lambda\theta}{\alpha}} \left(\Gamma\left(4, \frac{\lambda\theta}{\alpha}\right) \right) - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^3}{n} = 0 \quad \dots (16)$$

حيث ان (m_1, m_2, m_3) تمثل عزم العينة الأول والثاني والثالث على التوالي

تقدير دالة المعولية للتوزيع المركب (باريتو - الاسي المبتور)

وان (M_1, M_2, M_3) تمثل عزم المجتمع الأول والثاني والثالث على التوالي وتحل المعادلات (14) (15) (16) عدديا بطريقة نيوتن رافسون.

3- طريقة المقدرات التجزئية [8]

وباستخدام الدالة التوزيعية التراكمية للتوزيع المركب في المعادلة (4) نقدر

المعلمات بالطريقة التجزئية وكالاتي:

نستخرج الدالة العكسية للدالة التراكمية

$$w_i = 1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}(x-\theta)}$$

$$\ln(1 - w_i) = -\frac{\lambda}{\alpha}(x - \theta)$$

$$-\frac{\alpha}{\lambda} \ln(1 - w_i) = x - \theta$$

$$Q(w_i) = x = \theta - \frac{\alpha}{\lambda} \ln(1 - w_i) \quad \dots (17)$$

وبتصغير الدالة وذلك بأخذ التربيع لطرفي المعادلة (17) والمجموع نحصل على

$$\sum_{i=1}^n \left[x_{(i)} - Q\left(\frac{i}{n+1}\right) \right]^2 \quad \dots (18)$$

حيث ان $x_{(i)}$ هيه المشاهدة (i) بعد الترتيب و $Q\left(\frac{i}{n+1}\right)$ تمثل الدالة العكسية

المعرفة في المعادلة (17) حيث ان $(w_i = \frac{i}{n+1})$ وبتعويضها في المعادلة (18)

نحصل على:

$$\sum_{i=1}^n \left[x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln\left(\frac{n+1-i}{n+1}\right) \right]^2 \quad \dots (19)$$

وباشتقاق المعادلة (19) بالنسبة للمعلمات نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \sum_{i=1}^n [x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(\frac{n+1-i}{n+1})]^2 = 0$$

$$\frac{-2\alpha}{\lambda^2} \sum_{i=1}^n \ln(\frac{n+1-i}{n+1}) \left[x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(\frac{n+1-i}{n+1}) \right] = 0 \dots (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{i=1}^n [x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(\frac{n+1-i}{n+1})]^2 = 0$$

$$\frac{2}{\lambda} \sum_{i=1}^n \ln(\frac{n+1-i}{n+1}) \left[x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(\frac{n+1-i}{n+1}) \right] = 0 \dots (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \sum_{i=1}^n [x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(\frac{n+1-i}{n+1})]^2 = 0$$

$$-2 \sum_{i=1}^n \ln(\frac{n+1-i}{n+1}) \left[x_{(i)} - \theta + \frac{\alpha}{\lambda} \ln(\frac{n+1-i}{n+1}) \right] = 0 \dots (22)$$

تحل المعادلات (20)، (21)، (22) عدديا بطريقة نيوتن رافسون.

4- طريقة بيز للتقدير (أسلوب غير المعلوماتية) [9]

باستخدام دالة الإمكان الأعظم في المعادلة (9) وحسب نظرية بيز فإن الدالة الاحتمالية المشتركة للمعلومات السابقة ستكون كالتالي:

$$\pi^*(x_i|\lambda, \alpha) \propto L(x_i|\lambda, \alpha)\pi(\lambda, \alpha)$$

تقدير دالة المعولية للتوزيع المركب (باريتو - الاسي المبتور)

اذ تمثل الدالة $\pi(\lambda, \alpha)$ معلومات جفري المسبقة والتي تتناسب طرديا مع الجذر التربيعي لمعلومات فيشر، ولكن إيجاد التوزيع السابق للتوزيعات المركبة وكثير من التوزيعات يكون غير معروف بالنسبة للباحث لذلك يتم افتراض توزيع منتظم كالتالي:

$$\therefore \pi^*(x_i|\lambda, \theta) = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{i=1}^n(x-\theta)} * \frac{k}{(\lambda\alpha)^{2c}} \quad \dots (23)$$

حيث ان قيمة k هي قيمة ثابتة تحقق خاصية p.d.f للدالة الاحتمالية المشتركة

للمعلومات المسبقة في المعادلة (23) على فرض ان (c=1)

$$\pi^*(x_i|\lambda, \theta) = \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\alpha}\sum_{i=1}^n(x-\theta)} * \frac{k}{(\lambda\alpha)^2} \quad \dots (24)$$

ولأجل تقدير المعلمات والذي سيكون من خلال دالة الخسارة التربيعية

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

$$\therefore \hat{\theta} = E(\theta|x_i)$$

اذ تمثل $E(\theta|x_i)$ توقع المعلمة بثبوت المتغيرات وهي $E[u(\lambda, \alpha)]$

حيث ان مقدر بيز للتوزيع الاولي المشترك تحت دالة الخسارة يكون كالتالي:

$$\hat{\theta} = E[u(\lambda, \alpha)] = \int_0^\infty \int_0^\infty u(\lambda, \alpha) h(\lambda, \alpha|x_i) d\lambda d\alpha \quad \dots (25)$$

حيث ان (26) تمثل دالة التوزيع الشرطي للمعلمات بوجود المشاهدات، وتمثل التوزيع

اللاحق كالتالي:

$$h(\lambda, \alpha|x_i) = \frac{L(x_i|\lambda, \alpha) * \pi(\lambda, \alpha)}{\int_0^\infty \int_0^\infty L(x_i|\lambda, \alpha) * \pi(\lambda, \alpha) d\lambda d\alpha} \quad \dots (26)$$

وبتعويض (26) بالمعادلة (25) نحصل على التوقع الشرطي للمعلمات

$$E[u(\lambda, \alpha)] = \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty u(\lambda, \alpha) * \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 e^{-\frac{\lambda}{\alpha} \sum_{i=1}^n (x-\theta)} * \left(\frac{1}{\lambda\alpha}\right)^2 d\lambda d\alpha}{\int_0^\infty \int_0^\infty \left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^n e^{-\frac{\lambda}{\alpha} \sum_{i=1}^n (x-\theta)} * \left(\frac{1}{\lambda\alpha}\right)^2 d\lambda d\alpha} \dots (27)$$

ونتيجة لصعوبة إيجاد التكاملات في المعادلة (27) نستخدم طريقة ليندلي (Lindley) بالتقريب لإيجاد حل التكاملات للتوزيعات التي تحتوي على أكثر من معلمة. [6]

$$E[\hat{\lambda}|x] \approx \hat{\lambda}_{M.L.E} + P_1 U_1 \sigma_{11} + \frac{1}{2} (L_{30} U_1 \sigma_{11}^2) + \frac{1}{2} (L_{12} U_1 \sigma_{11} \sigma_{22}) \dots (28)$$

$$E[\hat{\alpha}|x] \approx \hat{\alpha}_{M.L.E} + P_2 U_2 \sigma_{22} + \frac{1}{2} [L_{03} U_2 \sigma_{22}^2] + \frac{1}{2} [L_{21} U_2 \sigma_{22} \sigma_{11}] \dots (29)$$

حيث ان

$$L_{ij} = \frac{\partial^{i+j}}{\partial \lambda^i \partial \alpha^j} \ln L(\lambda, \alpha | x), \quad i, j = 1, 2, 3 \dots (30)$$

$$U_i = \frac{\partial U_i(\lambda, \alpha)}{\partial \theta} \dots (31)$$

$$P_i = \frac{\partial P}{\partial \theta} \dots (32)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{-1}{L_{ij}} \dots (33)$$

وبالتعويض في المعادلات أعلاه نحصل على

$$L_{10} = \frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n (x - \theta) \quad \dots (34)$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda \partial \alpha} = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n (x - \theta) \quad \dots (35)$$

$$L_{12} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \lambda \partial \alpha^2} = \frac{-2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n (x - \theta) \quad \dots (36)$$

$$L_{30} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \lambda^3} = \frac{2n}{\lambda^3} \quad \dots (37)$$

$$L_{21} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \lambda^2 \partial \alpha} = 0 \quad \dots (38)$$

$$L_{03} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \alpha^3} = \frac{-2n}{\alpha^3} + \frac{6\lambda}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n (x - \theta) \quad \dots (39)$$

$$L_{20} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = \frac{-n}{\lambda^2} \quad \dots (40)$$

$$L_{02} = \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \alpha^2} = \frac{n}{\alpha^2} - \frac{2\lambda}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n (x - \theta) \quad \dots (41)$$

$$U_1(\lambda, \alpha) = \lambda$$

$$U_1 = \frac{\partial U_1(\lambda, \alpha)}{\partial \lambda} = 1 \quad \dots (42)$$

$$U_2(\lambda, \alpha) = \alpha$$

$$U_2 = \frac{\partial U_2(\lambda, \alpha)}{\partial \alpha} = 1 \quad \dots (43)$$

$$P_1 = \frac{\partial P}{\partial \lambda} = \frac{-2}{\lambda} \quad \dots (44)$$

$$P_2 = \frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{-2}{\alpha} \quad \dots (45)$$

$$\sigma_{11} = \frac{\lambda^2}{n} \quad \dots (46)$$

$$\sigma_{22} = \frac{-\alpha^3}{n\alpha - 2\lambda \sum_{i=1}^n (x - \theta)} \quad \dots (47)$$

نعوض المعادلات (42)، (44)، (46)، (36)، (37) في المعادلة (28) نحصل على

$$E(\lambda/x) \approx \hat{\lambda} - \frac{2\hat{\lambda}}{n} + \frac{2\hat{\lambda}}{2n} + \frac{1}{2} \left[\frac{-2}{\hat{\alpha}^3} \sum_{i=1}^n (x - \theta) * 1 * \frac{\lambda^2}{n} * \frac{-\hat{\alpha}^3}{\hat{\alpha}n - 2\hat{\lambda} \sum_{i=1}^n (x - \theta)} \right] \quad \dots (48)$$

يتم تعويض المعادلات (43)، (45)، (47)، (38)، (39) في المعادلة (29) ونحصل على

$$E(\alpha/x) \approx \hat{\alpha} + \left[\frac{-2}{\hat{\alpha}} * 1 * \frac{-\hat{\alpha}^3}{\hat{\alpha}n - 2\hat{\lambda} \sum_{i=1}^n (x - \theta)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{-n\hat{\alpha} + 3\hat{\lambda} \sum_{i=1}^n (x - \theta)}{\hat{\alpha}^4} * 1 * \left(\frac{-\hat{\alpha}^3}{\hat{\alpha}n - 2\hat{\lambda} \sum_{i=1}^n (x - \theta)} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[0 * 1 * \frac{\hat{\lambda}^2}{n} * \frac{-\hat{\alpha}^3}{\hat{\alpha}n - 2\hat{\lambda} \sum_{i=1}^n (x - \theta)} \right] \quad \dots (49)$$

حيث ان $\hat{\alpha}, \hat{\lambda}$ تمثل M.L.E

وتحل المعادلات (48)، (49) عدديا بطريقة نيوتن رافسون.

المبحث الثالث: الجانب التجريبي

1-3 تمهيد

تم استعراض الجانب التجريبي الذي يضم استعمال أسلوب المحاكاة لتوليد البيانات التي تتبع التوزيع المركب واستعمال ثلاثة احجام عينات مختلفة وقيم افتراضية مختلفة للمعاملات ومقارنة التقديرات للمعاملات الخاصة بتوزيع باريتو-الاسي المبتور.

2-3 مفهوم المحاكاة [5]

تعرف المحاكاة بانها أسلوب مشابه للواقع الحقيقي وذلك باستخدام نماذج معينة فمثلا في الواقع الحقيقي تكون هنالك نظريات من الصعب تحليلها لذلك يتم استخدام المحاكاة لتصف هذه النظريات بصورة مشابهة للحقيقة بنماذج معينة.

3-3 تقدير دالة المعولية للتوزيع باريتو - الاسي المبتور

وفي هذه المرحلة تم إجراء عملية التقدير لدالة المعولية للتوزيع باريتو- الاسي المبتور باستعمال طرائق التقدير التي استخدمت في البحث.

جدول (1): نماذج المحاكاة المدروسة

Cases	Θ	A	Λ
1	0.5	0.5	0.5
2	0.5	0.5	2.5
3	0.5	1.0	0.5
4	0.5	1.0	2.5
5	2.5	0.5	0.5
6	2.5	0.5	2.5
7	2.5	1.0	0.5
8	2.5	1.0	2.5

المصدر: من اعداد الباحث

جدول (2): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما $\theta=0.5, \alpha=0.5, \lambda=0.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	0.55	0.9512	0.9891	0.9684	0.9445	0.9469	Bayes
	1.00	0.6065	0.6086	0.5876	0.6106	0.5832	
	1.50	0.3679	0.3591	0.3429	0.3823	0.3445	
	2.00	0.2231	0.2144	0.2032	0.2429	0.2058	
	2.50	0.1353	0.1294	0.1221	0.1564	0.1243	
	MSE			0.0218	0.0238	0.0429	
n=50	0.55	0.9512	0.9705	0.9664	0.9352	0.9497	Bayes
	1.00	0.6065	0.6113	0.6042	0.6089	0.5983	
	1.50	0.3679	0.3676	0.3613	0.3811	0.3599	
	2.00	0.2231	0.2222	0.2177	0.2405	0.2176	
	2.50	0.1353	0.135	0.1322	0.1529	0.1322	
	MSE			0.0091	0.0139	0.022	
n=100	0.55	0.9512	0.9606	0.9651	0.9357	0.9502	Bayes
	1.00	0.6065	0.6074	0.607	0.6049	0.6008	
	1.50	0.3679	0.3659	0.364	0.3741	0.362	
	2.00	0.2231	0.221	0.2192	0.2324	0.2186	
	2.50	0.1353	0.1338	0.1325	0.1449	0.1324	
	MSE			0.0044	0.0079	0.0118	

المصدر: من اعداد الباحث

يمكننا الملاحظة من الجدول اعلاه أن

• طريقة بيز (Bayes) تعتبر الأفضل من بين جميع طرائق التقدير لأنها

تمتلك أقل قيمة MSE.

- الا أن بقية الطرائق تقترب من هذه الطريقة عند أحجام عينات أكبر.
- كما نرى أن جميع المقدرات تمتلك خاصية الاتساق لأن MSE لها يقل بزيادة حجم العينة.

جدول (3): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير

المختلفة عندما $\theta=0.5, \alpha=0.5, \lambda=2.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	0.55	0.7788	0.7981	0.7218	0.7779	0.7635	Bayes
	1.00	0.0821	0.0793	0.0865	0.1026	0.0762	
	1.50	0.0067	0.0075	0.0086	0.0137	0.0072	
	2.00	0.0006	0.0008	0.0009	0.0022	0.0008	
	2.50	0.00004	0.0001	0.0001	0.0004	0.0001	
	MSE			0.0048	0.0564	0.0137	
n=50	0.55	0.7788	0.7872	0.7281	0.7721	0.7709	Bayes
	1.00	0.0821	0.0802	0.0851	0.0948	0.0786	
	1.50	0.0067	0.0071	0.0081	0.0107	0.0069	
	2.00	0.0006	0.0008	0.0009	0.0022	0.0008	
	2.50	0.00004	0.0001	0.0001	0.0004	0.0001	
	MSE			0.0019	0.0277	0.0067	
n=100	0.55	0.7788	0.7822	0.7382	0.771	0.7744	Bayes
	1.00	0.0821	0.0806	0.0841	0.0896	0.0798	
	1.50	0.0067	0.0068	0.0077	0.009	0.0068	
	2.00	0.0006	0.0008	0.0009	0.0022	0.0008	
	2.50	0.00004	0.0001	0.0001	0.0004	0.0001	
	MSE			0.0009	0.0192	0.0035	

المصدر: من اعداد الباحث

نلاحظ من الجدول اعلاه

- ان طريقة بيز (Bayes) تعتبر الأفضل من بين جميع طرائق التقدير لأنها تمتلك أقل قيمة MSE.
- في حين يمكننا أن نرى بقية الطرائق تقترب من هذه الطريقة عند أحجام عينات أكبر وخاصة طريقة الإمكان الأعظم (MLE).

جدول (4): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما $\theta=0.5, \alpha=1.0, \lambda=0.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	0.55	0.9753	1.019	0.9854	0.9576	0.973	Bayes
	1.00	0.7788	0.7972	0.7677	0.7702	0.7616	
	1.50	0.6065	0.6088	0.584	0.607	0.5819	
	2.00	0.4724	0.4663	0.446	0.4802	0.4459	
	2.50	0.3679	0.3582	0.342	0.3813	0.3427	
	MSE			0.0232	0.027	0.0475	
n=50	0.55	0.9753	0.9939	0.9887	0.9575	0.9739	Bayes
	1.00	0.7788	0.7842	0.7762	0.7682	0.7685	
	1.50	0.6065	0.6034	0.5944	0.6025	0.5914	
	2.00	0.4724	0.4649	0.4561	0.4736	0.4557	
	2.50	0.3679	0.3587	0.3507	0.373	0.3516	
	MSE			0.0091	0.0142	0.0257	
n=100	0.55	0.9753	0.9848	0.9909	0.9514	0.9749	Bayes
	1.00	0.7788	0.784	0.7871	0.7668	0.7761	
	1.50	0.6065	0.6088	0.61	0.604	0.6028	
	2.00	0.4724	0.4731	0.4733	0.4763	0.4684	
	2.50	0.3679	0.3679	0.3676	0.376	0.3642	
	MSE			0.0042	0.0083	0.0141	

المصدر: من اعداد الباحث

جدول (5): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما $\theta=0.5, \alpha=1.0, \lambda=2.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	0.55	0.8825	0.9098	0.7789	0.8739	0.8713	Bayes
	1.00	0.2865	0.273	0.2662	0.3003	0.2621	
	1.50	0.0821	0.0769	0.0818	0.0999	0.074	
	2.00	0.0235	0.023	0.0254	0.0357	0.0222	
	2.50	0.0067	0.0073	0.008	0.0135	0.007	
	MSE		0.0105	0.1011	0.0252	0.0086	
n=50	0.55	0.8825	0.8981	0.816	0.8711	0.8778	Bayes
	1.00	0.2865	0.2824	0.2765	0.2994	0.2762	
	1.50	0.0821	0.0806	0.0838	0.0957	0.0789	
	2.00	0.0235	0.0237	0.0257	0.0318	0.0232	
	2.50	0.0067	0.0072	0.0079	0.011	0.007	
	MSE		0.0045	0.0547	0.0131	0.004	
n=100	0.55	0.8825	0.8894	0.8214	0.8713	0.8802	Bayes
	1.00	0.2865	0.2841	0.2761	0.2944	0.2812	
	1.50	0.0821	0.0812	0.0829	0.0904	0.0803	
	2.00	0.0235	0.0235	0.0251	0.0284	0.0233	
	2.50	0.0067	0.0069	0.0076	0.0092	0.0069	
	MSE		0.002	0.0281	0.0073	0.0019	

المصدر: من اعداد الباحث

جدول (6): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما $\theta=2.5, \alpha=0.5, \lambda=0.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	2.55	0.9432	0.9786	1.065	0.9132	0.9392	Bayes
	3.00	0.6014	0.603	0.6406	0.5982	0.5795	
	3.50	0.3648	0.3556	0.3688	0.3787	0.3422	
	4.00	0.2212	0.2118	0.2151	0.2427	0.204	
	4.50	0.1342	0.1273	0.1271	0.1575	0.1227	
	MSE		0.0163	0.0418	0.0362	0.0155	
n=50	2.55	0.9512	0.9683	1.0759	0.932	0.9492	Bayes
	3.00	0.6065	0.6073	0.6531	0.6054	0.5954	
	3.50	0.3679	0.3635	0.3778	0.3777	0.3565	
	4.00	0.2231	0.2187	0.2202	0.2374	0.2145	
	4.50	0.1353	0.1322	0.1292	0.1503	0.1297	
	MSE		0.0089	0.0343	0.0215	0.0084	
n=100	2.55	0.9512	0.9598	1.0761	0.9363	0.9502	Bayes
	3.00	0.6065	0.6067	0.6566	0.6048	0.6006	
	3.50	0.3679	0.3653	0.3808	0.3737	0.3617	
	4.00	0.2231	0.2206	0.2218	0.2319	0.2184	
	4.50	0.1353	0.1336	0.1297	0.1445	0.1323	
	MSE		0.0046	0.029	0.0118	0.0044	

المصدر: من اعداد الباحث

جدول (7): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما $\theta=2.5, \alpha=0.5, \lambda=2.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	2.55	0.7788	0.7937	0.7472	0.7729	0.761	Bayes
	3.00	0.0821	0.0775	0.0875	0.1007	0.0746	
	3.50	0.0067	0.0074	0.0084	0.0137	0.0071	
	4.00	0.0006	0.0008	0.0008	0.0023	0.0008	
	4.50	0.00005	0.0001	0.0001	0.0004	0.0001	
	MSE		0.0047	0.0206	0.0134	0.0039	
n=50	2.55	0.7788	0.7895	0.7684	0.771	0.7729	Bayes
	3.00	0.0821	0.0821	0.0867	0.0976	0.0804	
	3.50	0.0067	0.0074	0.0079	0.0114	0.0072	
	4.00	0.0006	0.0007	0.0007	0.0015	0.0007	
	4.50	0.00005	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	
	MSE		0.0019	0.0099	0.0065	0.0016	
n=100	2.55	0.7788	0.7837	0.7717	0.7687	0.7757	Bayes
	3.00	0.0821	0.0821	0.085	0.0921	0.0813	
	3.50	0.0067	0.0071	0.0075	0.0096	0.007	
	4.00	0.0006	0.0006	0.0007	0.0011	0.0006	
	4.50	0.00005	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	
	MSE		0.00092	0.0064	0.0037	0.00085	

المصدر: من اعداد الباحث

جدول (8): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير

المختلفة عندما $\theta=2.5, \alpha=1.0, \lambda=0.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	2.55	0.9753	1.0197	1.0226	0.9633	0.9732	Bayes
	3.00	0.7788	0.7996	0.7987	0.7754	0.7635	
	3.50	0.6065	0.6122	0.6091	0.6118	0.5849	
	4.00	0.4724	0.4702	0.4661	0.4846	0.4494	
	4.50	0.3679	0.3622	0.3578	0.3853	0.3463	
	MSE			0.0247	0.0252	0.0519	
n=50	2.55	0.9753	0.997	1.0244	0.9585	0.9742	Bayes
	3.00	0.7788	0.7885	0.8055	0.7711	0.7706	
	3.50	0.6065	0.6085	0.6178	0.6067	0.5947	
	4.00	0.4724	0.4702	0.4748	0.4784	0.4596	
	4.50	0.3679	0.3639	0.3655	0.378	0.3558	
	MSE			0.0104	0.0161	0.027	
n=100	2.55	0.9753	0.9851	1.024	0.9545	0.9748	Bayes
	3.00	0.7788	0.783	0.8099	0.7677	0.7749	
	3.50	0.6065	0.6071	0.6246	0.6033	0.6008	
	4.00	0.4724	0.4711	0.4822	0.4747	0.4662	
	4.50	0.3679	0.3657	0.3726	0.3739	0.362	
	MSE			0.0044	0.0112	0.0144	

المصدر: من اعداد الباحث

جدول (9): القيم التقديرية لدالة المعولية وقيم MSE المرافقة لها لطرائق التقدير المختلفة عندما $\theta=2.5, \alpha=1.0, \lambda=2.5$

Methods	t	Real	MLE	Moments	Per	Bayes	Best
n=25	2.55	0.8825	0.9148	0.8599	0.8744	0.874	Bayes
	3.00	0.2865	0.2806	0.2905	0.308	0.2687	
	3.50	0.0821	0.0802	0.0877	0.1045	0.077	
	4.00	0.0235	0.0242	0.0267	0.0379	0.0233	
	4.50	0.0067	0.0077	0.0082	0.0145	0.0074	
	MSE		0.0105	0.0379	0.0251	0.0076	
n=50	2.55	0.8825	0.8959	0.852	0.8723	0.8775	Bayes
	3.00	0.2865	0.2805	0.284	0.2972	0.2749	
	3.50	0.0821	0.0796	0.0843	0.0938	0.078	
	4.00	0.0235	0.0233	0.0252	0.0309	0.0228	
	4.50	0.0067	0.007	0.0076	0.0105	0.0069	
	MSE		0.0043	0.0162	0.012	0.0039	
n=100	2.55	0.8825	0.8895	0.8684	0.8695	0.8803	Bayes
	3.00	0.2865	0.2844	0.2864	0.2948	0.2814	
	3.50	0.0821	0.0813	0.0838	0.0908	0.0804	
	4.00	0.0235	0.0236	0.0246	0.0286	0.0233	
	4.50	0.0067	0.0069	0.0073	0.0092	0.0069	
	MSE		0.002	0.0086	0.0069	0.0019	

المصدر: من اعداد الباحث

3-4 الاستنتاجات

١. من خلال تجارب المحاكاة لتقدير دالة المعولية تم الحصول على أفضل طريقة للتقدير من بين الطرق المستخدمة وهي طريقة بيز وذلك لامتلاكهما اقل قيمة من متوسط مربعات الخطأ (MSE).

٢. ان جميع المقدرات تمتلك خاصية الاتساق لان متوسط مربعات الخطأ (MSE) يقل كلما زاد حجم العينة.

٣. ان جميع طرق التقدير تقترب من طريقة بيز عند احجام عينات أكبر من (100,50,25) وخاصة طريقة الإمكان الأعظم.

٤. عندما ($\theta=0.5, \alpha=0.5, \lambda=0.5$) نجد بأن طريقة بيز هي الأفضل من بين الطرق المستخدمة لأنها تمتلك اقل متوسط مربعات خطأ، وان جميع الطرق تقترب من طريقة بيز عند عينات أكبر.

٥. عندما ($\theta=0.5, \alpha=0.5, \lambda=2.5$) نجد بأن طريقة بيز هي الأفضل من بين الطرق المستخدمة وان جميع طرق التقدير الأخرى تقترب من طريقة بيز عند عينات أكبر وخاصة طريقة الإمكان الاعظم.

٦. بقية الحالات الأخرى نستنتج نفس الاستنتاج بأن طريقة بيز هي الأفضل وان جميع المقدرات تمتلك خاصية الاتساق لان متوسط مربعات الخطأ يقل كلما زاد حجم العينة.

المصادر

أولاً: المصادر العربية

1. الباقر، زينب محمد باقر صادق. (2017). "تقدير دالة المعولية لتوزيع بواسون مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد.
2. العامري، بهاء عبد الرزاق قاسم. (2021). "استعمال بعض التوزيعات المبتورة في بناء نظام خبير لتقدير الفترة المثلى لاستبدال المكائن والمعدات مع تطبيق عملي"، أطروحة دكتوراه، جامعة كربلاء، كلية الإدارة والاقتصاد.
3. بدر، دريد حسين. (2019). "تقدير دالة المعولية الضبابية باستعمال طريقة بيز مع تطبيق عملي"، مجلة العلوم الاقتصادية كلية الإدارة والاقتصاد جامعة البصرة.
4. جليل، طالب شريف وإبراهيم، كوردستان وعبد الله، زينب. (2013). "إيجاد معولية نظام التوالي بطريقة جديدة"، المجلة العراقية للعلوم الإحصائية، 98-77 pp (23):.
5. خماس، قيس سبع وعبد الله، ثائر نجم. (2013). "استعمال بعض النماذج الاحتمالية المبتورة لدراسة خصائص التعويضات الصحية في شركة التأمين العراقية"، مجلة العلوم الاقتصادية والإدارية، (72)19 : 320-289 pp.

6. عبد الكريم، حيدر سالم. (2022). "مقارنة طريقة الإمكان الأعظم والطريقة

الجينية مع الطرائق البيزية لتقدير دالة البقاء لتوزيع دالة القوى الموسع مع

التطبيق"، رسالة ماجستير، جامعة البصرة، كلية الإدارة والاقتصاد.

7. عبد الطيف، زهراء رياض، (2021). "تقدير دالة المعولية لبيانات توزيع

Shifted Gompertz مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير، جامعة البصرة، كلية

الإدارة والاقتصاد.

8. عبد، رحاب احمد. (2021). "اختزال الابعاد بطريقة اقل معدل تباين الكمية

الجزائية للانحدار التقسيمي مع دالة جزاء كروب لاسو مع تطبيق عملي"، رسالة

ماجستير، جامعة البصرة، كلية الإدارة والاقتصاد.

9. عزيز، سكيمة سلطان. (2021). "مقدرات بيزية مقلصة لمعلمة القياس ودالة

المعولية لتوزيع وقت الفشل (ماكسويل) باعتماد دالتي الخسارة التربيعية والاسية

الخطية"، رسالة ماجستير، جامعة البصرة، كلية الإدارة والاقتصاد.

10. عبودي، عماد حازم ونعيمة، علي بندر. (2016). "مقارنة طريقتي (LSD

&MLE) لتقدير معالم توزيع فريشيتبواسونليندلي المركب (دراسة محاكاة)"،

مجلة ابن الهيثم للعلوم الصرفة والتطبيقية، 28(3): 401-414 pp.

11. هرمز، امير حنا. (1990). "الإحصاء الرياضي". ط1، الموصل: مديرية دار

النشر للطباعة والنشر، العراق.

12. Al-Kadim, K. A., & Boshi, M. A. (2013). "**exponential Pareto distribution**". Mathematical Theory and Modeling, 3(5): pp 135-146.
13. Alzaatreh, A. & Ghosh, I. (2016). "**A study of the Gamma-Pareto (IV) distribution and its applications**", Communications in Statistics – Theory and Methods, 45(3): pp 636-654.
14. Asgharzadeha, A., Bakouch, H. S, & Esmaeilia, L. (2013). "**Pareto Poisson-Lindley Distribution with Applications**", Journal of Applied Statistic, 40(8): pp 1717-1734.
15. Maiti, S. S., & Pramanik, S. (2016). "**Odds Generalized Exponential-Pareto Distribution: Properties and Application**". Pak.j.stat.oper.res. XII (2): pp 257-279.
16. Souza, W., Santos, A. H. S. & Cordeiro, G. M. (2010). "**The Beta Generalized Exponential Distribution**". Journal of Statistical Computation and Simulation, 80(2): pp 159-172.

17. Tahir, M. H., Cordeiro, G. M., Alzaatreh, A., Mansoor, M., &Zubair, M. (2016). "**A New Weibull–Pareto Distribution: Properties and Applications**". Communications in Statistics–Simulation and Computation, 45(10): pp 3548–3567.
18. Wikipedia, Incomplete gamma function, https://en.m.wikipedia.org/wiki/Incomplete_gamma_function
19. Zea, L. M., Silva, R. B., Bourguignon, M., Santos, A. M., &Cordeiro G. M. (2012). "**The Beta Exponentiated Pareto Distribution with Application to Bladder Cancer Susceptibility**". International Journal of Statistics and Probability, 1(2): pp 8–19.