تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي - دراسة مقارنة في تحليل أوقات الإنتظار

م.م. ثائرة نجم عبد الله
tha_alameer@uomustansiriyah.edu.iq
الجامعة المستنصرية - كلية الإدارة والإقتصاد- قسم الإحصاء

المستخلص

يهتم البحث بتقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي بطريقتي الإمكان الأعظم وبيز القياسية , ومن ثم المقارنة بين مقدري الطريقتين بالإعتماد على متوسط مربعات الخطأ من خلال تجارب المحاكاة المختلفة المفترضة، وقد أثبتت النتائج أفضلية طريقة بيز في حالة أحجام العينات الصغيرة والعكس صحيح في حالة أحجام العينات المتوسطة والكبيرة, وتم إستثمار المقدر الأفضل في دراسة وتحليل أوقات الإنتظار لعملاء مصرف الرشيد / الجامعة المستنصرية .

الكلمات المفتاحية: توزيع ليندلي، طريقة الامكان الاعظم، طريقة بيز، تقريب ليندلي وأوقات الانتظار.

1. المقدمة ومشكلة البحث

يعتبر الوقت هو الأساس في تحقيق الميزة التنافسية في المنظمات والمؤسسات المختلفة, ومن الملاحظ أن المؤسسات بصورة عامة ومن ضمنها المصارف لا تعطي وقت الإنتظار الأهمية الكافية لتحسين فاعلية العمل المطلوب. إن أوقات الإنتظار التي يقضيها الزبائن في مصرف الرشيد/الجامعة المستنصرية تتوزع على مرحلتين رئيسيتين من مراحل العمل الإداري للمصرف: المرحلة الأولى هي أوقات إنتظار يقضيها الزبون في إكمال عملية التسجيل لإجراءات سحب الصكوك أو حسابات التوفير, والمرحلة الثانية يقضيها الزبون أمام الصندوق. هذا البحث يدرس وصف وتحليل أوقات الإنتظار غير المتجانسة في العمل الإداري لمصرف الرشيد/ الجامعة المستنصرية, وكما هو معروف فإن المجالات التطبيقية للتوزيعات الإحتمالية تختلف بإختلاف طبيعة الأنظمة التي تتألف منها تلك المجتمعات المدروسة، فمنها أنظمة بسيطة تتكون من مجتمعات لها توزيعات إحتمالية منفردة، ومنها أنظمة معقدة وغيرمتجانسة تفرض على الباحثين في هذا الجانب إستعمال توزيعات إحتمالية تتوافق مع سلوك تلك المتغيرات العشوائية التي تتألف منها مجتمعات تلك الأنظمة، وهي التوزيعات العامة (Generalized Distributions)، والتوزيعات المختلطة (Mixed Distributions).

يعد توزيع ليندلي (Lindley Distribution) أحد التوزيعات المختلطة المستمرة المهمة التي تمتاز بإمكانية كبيرة في تمثيل الأنظمة المختلفة التي تتألف من مجتمعات مركبة وغير متجانسة وكذلك المرونة العالية لهذا التوزيع كإنموذج للفشل.

2. هدف البحث

يهدف هذا البحث في جانبه النظري الى المقارنة بين مقدري طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز القياسية بدالة أولية غير معلوماتية ودالة الخسارة التربيعية في تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي المختلط وذلك من خلال توظيف تجارب محاكاة مختلفة, ومن ثم تم إختيار المقدر الأفضل الذي يعطي أقل متوسط مربعات خطأ وإستثماره في الجانب التطبيقي بهدف وصف وتحليل الأوقات التي يقضيها العملاء في مصرف الرشيد/الجامعة المستنصرية .

3. الجانب النظري

3.1 توزيع ليندلي (Lindley Distribution)

توزيع ليندلي أحد التوزيعات المختلطة المستمرة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين أحدهما يتبع التوزيع الأسي بمعلمة قياس(θ)، والاخر يتبع توزيع كاما بمعلمتي قياس وشكل (θ) و (2) على التوالي ، وفقاً لصيغة الخلط الاتية [6 : P 504] :

$$f(x;\theta)=\sigma f_1(x;\theta)+(1-\sigma)f_2(x;\theta) \quad ,\sigma=\frac{\theta}{1+\theta} \ ,\sigma,\theta>0 \qquad (1)$$

لذا فأن المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع ليندلي تكون له دالة كثافة احتمالية (p.d.f) وفق الصيغة الاتية :

$$f\left(x;\theta\right)=\frac{\theta^2}{(1+\theta\ )}(1+x)e^{-\theta x} \qquad ,x>0\ ,\theta>0 \qquad (2)$$

وله دالة الكثافة التراكمية (c.d.f) الاتية :

$$F(x;\theta)=1-\left\{1+\frac{\theta}{(1+\theta)}x\right\}e^{-\theta x} \qquad ,x>0,\theta>0 \qquad (3)$$

يمكن الإطلاع على مزيد من الخصائص لتوزيع ليندلي في المصدر[1] .

3.2 طرائق تقدير معلمة توزيع ليندلي

3.2.1 طريقة الإمكان الاعظم

(ML) (Maximum Likelihood method)

طريقة الإمكان الأعظم من طرائق التقدير التي تهدف الى جعل دالة الإمكان (Likelihood Function) في نهايتها الصغرى، فاذا كانت $(\ x_1,x_2,\dots,x_n\ )$ تمثل عينة عشوائية مستقلة لمشاهدات متغيريتبع توزيع ليندلي بمعلمة قياس $(\boldsymbol{\theta})$ فإن دالة الإمكان لمشاهدات المتغيرالعشوائي تكون:

$$L(x_1, x_2, \dots x_n|\theta) = \frac{\theta^{2n}}{(1+\theta)^n} \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i)\ e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (4)$$

بأخذ اللوغريتم الطبيعي للمعادلة (4) :

$$\ln L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$2n \ln\theta - n\, ln(1+\theta) + \ln \prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (5)$$

بالإشتقاق الجزئي لطرفي المعادلة (5) بالنسبة الى المعلمة (θ) :

$$\frac{\partial ln\, L(\theta; x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{(1+\theta)} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$= \frac{2n(\theta+1) - n\theta - \theta(\theta+1)\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta(\theta+1)} \qquad (6)$$

بمساواة المعادلة (6) بالصفر وقسمة الناتج على n :

$$2\left(1 + \hat{\theta}\right) - \hat{\theta} - \hat{\theta}\left(1 + \hat{\theta}\right)\bar{x} = 0$$

.

.

.

$$\bar{x}\,\hat{\theta}^2 + (\bar{x} - 1)\hat{\theta} - 2 = 0 \qquad (7)$$

وبحل المعادلة (7) نحصل على مقدرطريقة الإمكان الأعظم للمعلمة (θ) :

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{-(1-\bar{x}) + \sqrt{(\bar{x}-1)^2 + 8\bar{x}}}{2\bar{x}} \quad , \quad \bar{x} > 0 \qquad (8)$$

3.2.2. طريقة بيز القياسية

Standard Bayes Method (SB)

تعتبر طريقة بيز القياسية من الطرائق الشائعة الإستخدام والتي يتم بموجبها إيجاد دالة الكثافة الإحتمالية اللاحقة (Posterior Probability Density Function) حيث تمثل كل المعلومات الأولية والحالية حول المعلمات المراد تقديرها,

ومن خلال إستعمال مايعرف صيغة بيزالعكسية (Bayes Inversion Formula) وصيغتها هي :

$$P(\theta|x) = \frac{L(x|\theta)\pi\ (\theta)}{\int_{\forall\theta} L(x|\theta)\pi\ (\theta) d\theta} \qquad (9)$$

إذ إن :

$L(x|\theta)$: تمثل دالة الامكان لعينة بحجم (n) من مشاهدات المتغير العشوائي X .

$\pi\ (\theta)$: تمثل دالة الكثافة الاحتمالية الاولية للمعلمة (θ) .

$P(\theta|x)$: تمثل دالة الكثافة الاولية اللاحقة للمعلمة (θ) .

3.2.3. دالة الكثافة الاحتمالية الأولية غير المعلوماتية (Non- Informative P.d.f)

في حالة عدم توفر معلومات أولية كافية حول المعلمة المراد تقديرها أوعدم توفرها نهائياً فإن إختيار دالة الكثافة الإحتمالية الأولية يتم إستناداً الى صيغة (Jeffery) بالإعتماد على مجال المعلمة المراد تقديرها (θ) ولما كان مجال المعلمة هو مجالاً موجباً $(0,\infty)$، فإن دالة الكثافة الإحتمالية الأولية تتبع توزيعاً لوغاريتميا منتظماً، أي إن : [3]

$$\pi(\theta) \propto \frac{1}{\theta} = \frac{C}{\theta} \qquad C, \theta > 0 \qquad (10)$$

إذ أن C هو ثابت التناسب.

3.2.4. دالة الخسارة (Loss Functions)

دالة الخسارة هي مقياس لمقدار الخسارة الناتج من إتخاذ قرار بيز في تقدير المعلمة في حين إن القرار الصائب هو القيمة الحقيقية للمعلمة. يمكن إيجاد مقدر بيز من خلال إستعمال دوال الخسارة (Loss Functions) والتي يرمز لها بالرمز $L(\hat{\theta},\theta)$, حيث أن التوقع الرياضي لدالة الخسارة والذي يسمى بدالة المخاطرة (Risk Function) يحسب وفق الصيغة التالية:

$$Risk(\hat{\theta},\theta) = R(\hat{\theta},\theta) = E\{L(\hat{\theta},\theta)\} = \int_{\forall\theta} L(\hat{\theta},\theta) P(\theta|x) d\theta \qquad (11)$$

وإن المقدار الذي يجعل دالة المخاطرة في نهايتها الصغرى (أي أقل ما يمكن) هو مقدر بيز القياسي للمعلمة (θ) .

هنالك أنواع عديدة من دوال الخسارة يمكن تقسيمها وفقاً لمعيار التماثل الى نوعين رئيسيين هما دوال الخسارة المتماثلة (Symmetric Loss Functions) ودوال الخسارة غير المتماثلة (Asymmetric Loss Functions), وسيتم في البحث

إستعمال دالة خسارة متماثلة وهي دالة الخسارة التربيعية (Squared Loss Function) .

3.2.5. مقدر طريقة بيز القياسية لمعلمة توزيع ليندلي

لإيجاد صيغة مقدرطريقة بيز بتوظيف دالة الكثافة الإحتمالية الأولية غير المعلوماتية ودالة الخسارة التربيعية لابد من إيجاد دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمة (θ) وذلك بتعويض دالة الإمكان الإعظم ودالة الكثافة الاحتمالية الأولية المشار اليهما بالمعادلتين (4) و (10) على التوالي في صيغة بيز العكسية المشار اليها بالمعادلة (9) وكما يأتي :

$$P(\theta|x)=\frac{\frac{1}{\theta(1+\theta)^n}\prod(1+x_i)\ e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod(1+x_i)\int_0^\infty\frac{1}{\theta(1+\theta)^n}e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}d\theta}$$

$$P(\theta|x)=\frac{\frac{1}{\theta(1+\theta)^n}\ e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\int_0^\infty\frac{1}{\theta(1+\theta)^n}\ e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}\ d\theta} \qquad (12)$$

إن مقدر بيز بإستعمال دالة الخسارة التربيعية هو توقع دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة للمعلمة (θ) ويمكن إثبات ذلك على النحو التالي :

$$R(\hat{\theta},\theta)=E(\hat{\theta}-\theta)^2$$

$$R(\hat{\theta},\theta)=\int_{\forall\theta}(\hat{\theta}-\theta)^2\ P(\theta\mid x)\,d\theta$$

$$R(\hat{\theta},\theta)=\hat{\theta}^{\,2}-2\hat{\theta}\,E(\theta\mid x)+E(\theta^{\,2}\mid x) \qquad (13)$$

وبأخذ الاشتقاق الجزئي لطرفي المعادلة (13) بالنسبة الى $(\hat{\theta})$ ومساواة الناتج بالصفر نحصل على:

$$2\hat{\theta}-2\,E(\theta\mid x)=0$$

وعليه فإن:

$$\hat{\theta}_B = E(\theta \mid x) \tag{14}$$

وان المشتقة الجزئية الثانية لطرفي المعادلة (14) بالنسبة الى $(\hat{\theta})$ تكون :

$$\frac{\partial^2 R(\hat{\theta}\,,\theta\,)}{\partial\,\hat{\theta}^{\,2}} = 2\ > 0$$

أي إن صيغة مقدر بيز للمعلمة (θ) بإستعمال دالة الخسارة التربيعية هي :

$$\hat{\theta}_B = \int_{\forall\theta} \theta\; P\,(\theta \mid x)\;\, d\theta \tag{15}$$

$$P(\theta|x) = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\theta(1+\theta)^n}\; e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{\theta(1+\theta)^n}\;\; e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i}\;\, d\theta} \tag{16}$$

يمكن إستعمال تقريب ليندلي (Lindley Approximation) [7] في إيجاد حل للتكامل في المعادلة (16) كما يأتي :

$$I(x) = E[h(\theta)] = \frac{\int_{\forall\theta} h(\theta)\, exp[L\,(\theta,x) + g(\theta)]\; d\theta}{\int_{\forall\theta} exp[L\,(\theta,x) + g(\theta)]\; d\theta}$$

إذ أن :

$I(x)$: الناتج التقريبي لتكامل مقدر بيز .

$h(\theta)$: دالة بالمعلمة θ .

$L\,(\theta,x)$: لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم .

$g(\theta)$: لوغاريتم دالة الكثافة الأحتمالية الأولية .

وإن ناتج التكامل التقريبي وفقا تقريب ليندلي يكون حسب الصيغة التالية :

$$I(x) = h(\hat{\theta}) + 0.5\left[\left(\hat{h}_{\theta\theta} + 2\hat{h}_\theta\ \hat{P}_\theta\right)\hat{\sigma}_{\theta\theta}\right] + 0.5\left[\left(\hat{h}_\theta\,.\,\hat{\sigma}_{\theta\theta}\,\right)\left(\hat{L}_{\theta\theta\theta}\,.\,\hat{\sigma}_{\theta\theta}\,\right)\,\right] \tag{17}$$

إذ أن :

$$\hat{h}_\theta = \frac{\partial\, h\left(\hat{\theta}\right)}{\partial\, \hat{\theta}}\ , \qquad \hat{h}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\, h\left(\hat{\theta}\right)}{\partial\, \hat{\theta}^2}, \qquad \hat{P}_\theta = \frac{\partial\, g\left(\hat{\theta}\right)}{\partial\, \hat{\theta}},$$

$$\hat{L}_{\theta\theta} = \frac{\partial^2\, L\left(\hat{\theta}\right)}{\partial\, \hat{\theta}^2}\ , \qquad \hat{\sigma}_{\theta\theta} = -\frac{1}{\hat{L}_{\theta\theta}}\ , \qquad \hat{L}_{\theta\theta\theta} = \frac{\partial^3\, L\left(\hat{\theta}\right)}{\partial\, \hat{\theta}^3}$$

لذلك فإن:

$$h(\theta) = \frac{1}{\theta}\quad , \quad \hat{h}\left(\hat{\theta}\right) = -\frac{1}{\theta^2}\quad , \ \hat{h}_{\theta\theta} = \frac{2}{\theta^3}$$

$$L\ (\theta, x) = ln\ L\ (\theta; x)$$

$$= 2n\ \ ln\,\theta - n\ \ ln(1+\theta) - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i\ + \sum_{i=1}^{n} ln(1+x_i)$$

$$h(\theta) = -\,ln\,\theta\,, \hat{P}_\theta = -\frac{1}{\theta}\ , \hat{L}_{\theta\theta} = \frac{-2n}{\theta^2} + \frac{n}{(1+\theta)^2}\ ,$$

$$\hat{\sigma}_{\theta\theta} = \frac{\theta^2(1+\theta)^2}{2n(1+\theta)^2 - n\theta^2}$$

وبالتعويض في المعادلة (17) فإن :

$$I(x) = -\frac{1}{\theta^2} + 0.5\left[\left(\frac{2}{\theta^3} + 2 - \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta}\right)\ \frac{\theta^2(1+\theta)^2}{2n(1+\theta)^2 - n\theta^2}\right]$$

$$+0.5\left[\left(-\frac{1}{\theta^2}\ \frac{\theta^2(1+\theta)^2}{2n(1+\theta)^2 - n\theta^2}\right)\left(\left(\frac{4n}{\theta^3} - \frac{2n}{(1+\theta)^3}\right)\ \frac{\theta^2(1+\theta)^2}{2n(1+\theta)^2 - n\theta^2}\right)\right]$$

وإن مقدر بيز للمعلمة (θ) هو :

$$\hat{\theta}_B = I(x) = -\frac{1}{\theta^2} + 0.5\left[\frac{4}{\theta^3}\ \frac{\theta^2(1+\theta)^2}{2n(1+\theta)^2 - n\theta^2}\right]$$

$$+0.5\left[\frac{-(1+\theta)^2}{2n(1+\theta)^2 - n\theta^2}\ \left(\frac{4n(1+\theta)^3 - 2n\theta^3}{2n\theta(1+\theta)^3 - n\theta^3(1+\theta)}\right)\right] \qquad (18)$$

4. تجارب المحاكاة (Simulation)

تم إستعمال المحاكاة بطريقة مونت كارلو (Monte Carlo) لتقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي بالإعتماد على برنامج (Mathematica10) وبالخطوات التالية:

1. إختيار القيم الإفتراضية لمعلمة التوزيع (θ) بحيث تكون قيمها قريبة من قيم المعلمة للبيانات الحقيقية وهي (3 ,2.5 , 2 , 1.5 ,1 ,0.5) .
2. إختيار أحجام العينات الإفتراضية لمشاهدات المتغير العشوائي (X) وهي (n=10,20,30,50,100) .
3. توليد بيانات المتغير العشوائي (X) الذي يتبع توزيع ليندلي بالمعلمة (θ), وذلك إعتماداً على قيم المعلمات وحجوم العينات المفترضة في المرحلة الاولى ووفقاً لطريقة (Monte Carlo) وبإسلوب (Accept-Reject)[4] وكما يأتي :

- توليد المتغير العشوائي U_i الذي يتوزع توزيعاً منتظماً بالفترة (0,1) , أي ان :

$$U_i \sim \text{Uniform}(0,1) \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$

- توليد المتغيرين العشوائيين Vi ,Wi , إذ أن :

$$V_i \sim \text{Exponential}(\theta) \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$
$$W_i \sim \text{Gamma}(2,\theta) \quad , \quad i = 1,2,\dots,n$$

- فإذا كان $U_i \le \sigma = \frac{\theta}{\theta+1}$, فإن $x_i = v_i$, وخلافاً لذلك فإن $x_i = w_i$.

4. إيجاد مقدرات طريقة الإمكان الأعظم ($\hat{\theta}_{MLi}$) وطريقة بيز القياسية ($\hat{\theta}_{Bj}$) وذلك من خلال المعادلتين (8) و (18) على التوالي وبيانات العينة ($x_1, x_2, \dots, x_n$) التي تم توليدها في الخطوة (3).
5. تكرار الخطوات (1-5) k من المرات (k=1000).
6. إيجاد مقدر طريقة الإمكان الأعظم ($\hat{\theta}_{ML}$) ومقدر طريقة بيز ($\hat{\theta}_B$) كما يأتي :

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{\sum_{i=1}^{K} \hat{\theta}_{MLi}}{K} \quad , \quad \hat{\theta}_B = \frac{\sum_{j=1}^{K} \hat{\theta}_{Bj}}{K}$$

7. حساب متوسط مربعات الخطأ (MSE) للمقدرات وفق الصيغ التالية :

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_{ML}) = \frac{\sum_{i=1}^{K} (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{K} \quad , \quad \text{MSE}(\hat{\theta}_B) = \frac{\sum_{j=1}^{K} (\hat{\theta}_j - \theta)^2}{K}$$

وقد تم وضع نتائج تجارب المحاكاة في جدول رقم (1) .

جدول (1): يبين تقديرات المعلمة (θ) وقيم (MSE) لكافة الطرائق والنماذج وحجوم العينات

θ	n	$\hat{\theta}_{ML}$	$\hat{\theta}_{B}$	$MSE(\hat{\theta}_{ML})$	$MSE(\hat{\theta}_{B})$	Best
0.5	10	0.545478	0.528776	0.002168248	0.000927974	Bayes
	20	0.464425	0.531242	0.001365581	0.001076206	Bayes
	30	0.526153	0.526394	0.000783979	0.00079668	MLE
	50	0.522543	0.554325	0.000608187	0.003051206	MLE
	100	0.522004	0.435459	0.000584176	0.004265541	MLE
1	10	0.938845	0.969590	0.003839934	0.001024768	Bayes
	20	1.043121	1.026679	0.001959421	0.000811748	Bayes
	30	1.035211	1.040744	0.001339815	0.001760074	MLE
	50	1.024150	1.046123	0.000683222	0.002227331	MLE
	100	1.010474	1.055955	0.000209705	0.00323094	MLE
1.5	10	1.569687	1.519965	0.004956335	0.000498601	Bayes
	20	1.551054	1.526041	0.002706537	0.000778144	Bayes
	30	1.559126	1.438540	0.003595825	0.003877332	MLE
	50	1.473050	1.541243	0.000826303	0.001800985	MLE
	100	1.486101	1.553457	0.00029317	0.002957651	MLE
2	10	2.082226	2.015153	0.006861115	0.000329613	Bayes
	20	2.075413	2.024187	0.005787075	0.000685033	Bayes
	30	2.051545	2.05689	0.002756887	0.003336472	MLE
	50	2.025786	1.965787	0.000764918	0.001270529	MLE
	100	1.989879	2.050866	0.000202441	0.002687309	MLE
2.5	10	2.417524	2.508036	0.006902241	0.000164577	Bayes
	20	2.566089	2.522653	0.004467782	0.000613145	Bayes
	30	2.521313	2.454032	0.000554253	0.002213057	MLE
	50	2.485204	2.531444	0.000318922	0.001088725	MLE
	100	2.511915	2.464710	0.000241955	0.001345384	MLE
3	10	3.059348	3.004216	0.00362224	0.000117777	Bayes
	20	3.045987	3.021666	0.002214842	0.000569424	Bayes
	30	2.979016	2.955784	0.000540349	0.002055046	MLE
	50	3.011561	2.969647	0.000233652	0.001021305	MLE
	100	3.010224	3.031135	0.000204531	0.001069363	MLE

5. مناقشة نتائج المحاكاة

من خلال نتائج تجارب المحاكاة لمقارنة تقديرات معلمة القياس لتوزيع ليندلي في الجدول رقم (1) تم التوصل الى الإستنتاجات التالية :

1. لكافة التجارب جاءت القيم التقديرية لمعلمة القياس لتوزيع ليندلي للطريقتين قريبة من القيم المفترضة في تجارب المحاكاة .
2. تفوقت طريقة بيز القياسية بدالة أولية غير معلوماتية ودالة الخسارة التربيعية على طريقة الإمكان الأعظم عندما (n=10,20) إذ أعطت متوسط مربعات خطأ أقل ولكافة التجارب في تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي, في حين أعطت طريقة الإمكان الأعظم متوسطات مربعات خطأ أقل من طريقة بيز القياسية عندما (n=30,50,100) .

6. الجانب التطبيقي

تم تطبيق الدراسة النظرية لهذا البحث في دراسة وتحليل الأوقات التي يقضيها العملاء الذين يمتلكون حسابات جارية لدى مصرف الرشيد / الجامعة المستنصرية لعينة مؤلفة من (50) عميل, إذ تم تسجيل الأوقات التي يقيضيها العميل لغرض إتمام خطوات سحب الصكوك والتي تبدأ بمرحلة إعطاء المعلومات الخاصة بعملية السحب, ومن ثم مرحلة إستلام مبالغ تلك الصكوك من أمين الصندوق. والجدول رقم (2) يبين أوقات الإنتظار لعملاء المصرف.

جدول (2) يوضح الأوقات (بالساعات) التي يقضيها الزبائن في المصرف

الأوقات	الأوقات	الأوقات	الأوقات	الأوقات
0.46	1.58	0.52	0.83	2.3
0.57	0.96	0.75	0.45	1.2
0.75	1.1	0.31	1.38	1.28
0.9	1.55	0.54	0.67	0.73
0.27	0.98	1.9	0.47	1.07
1.25	1.05	0.7	0.73	1.55
1.26	1	0.34	0.5	0.98
1.02	0.92	3	1.36	1.05
0.67	0.8	1.65	0.36	1.01
1.34	1.86	0.55	0.27	0.93

تم إجراء إختبارات حسن المطابقة (Goodness of Fit) بأستخدام البرنامج (Mathematica10) لغرض معرفة فيما إذا كانت البيانات الخاصة بأوقات الإنتظارفي المصرف تتبع توزيع ليندلي بإستعمال إختباري (Kolmogorov Smirnov) و

(Anderson Darling) وبمستوى المعنوية (0.05), وكانت النتائج كما في الجدول رقم (3) :

جدول (3) يبين إختبارات حسن المطابقة للبيانات الخاصة بأوقات الإنتظار

p-value	Anderson Darling	p-value	Kolmogorov Smirnov
0.451242	0.473204	0.565221	0.122876

من خلال ماتم التوصل اليه في تجارب المحاكاة يتم تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي لأوقات الإنتظار لعملاء مصرف الرشيد / الجامعة المستنصرية بإستعمل طريقة الإمكان الأعظم كونها الأفضل عند حجم عينة (50) وبالإعتماد على معادلة (8) وكما يأتي:

$$\hat{\theta}_{ML} = \frac{-(1-0.9934)+\sqrt{(0.9934-1)^2+8(0.9934)}}{2(0.9934)} = 1.42788$$

7. الإستنتاجات والتوصيات

أظهرت طريقة بيز القياسية أفضلية واضحة في تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي عند أحجام العينات الصغيرة ولكافة تجارب المحاكاة المفترضة , فين حين كانت الأفضلية لطريقة الإمكان الأعظم عند أحجام العينات المتوسطة والكبيرة .

1. إن إستعمال تقريب ليندلي في إيجاد مقدر طريقة بيز القياسية تميز بنتائج دقيقة فقد كانت النتائج قريبة من قيم المعلمات المفترضة .
2. كلما إزدادت قيمة معلمة القياس لتوزيع ليندلي إقتربت القيم التقديرية من القيم الإفتراضية ولكافة التجارب .
3. يوصي الباحث بإجراء دراسة في توظيف توزيع ليندلي في تقدير دوال المعولية والبقاء للأنظمة غير المتجانسة .
4. إن الأوقات التي يقضيها عملاء مصرف الرشيد / الجامعة المستنصرية يمكن تقليصها من خلال تقليل الحلقات الإدارية بهدف تطوير عمل المصرف وتسهيل تقديم الخدمات المصرفية للعملاء .

8. المصادر

[1] البدران, فراس منذر, " تقدير دالة معولية إنموذج ليندلي للإجهاد والمتانة", رسالة ماجستير, الجامعة المستنصرية, كلية الإدارة والإقتصاد، 2014.

[2] Barbe, Ph., Approximation of Integrals over asymptotic sets with applications to Statistics and Probability", Rue de Vaugirard , Paris, France, 2003.

[3] Casella, G., Fienberg, S. & Oklin, I., The Bayesian Choice, Springer Series in Statistics, Second Edition , 2007.

[4] Christian, P.R. & Casella, G., Introducing Monte Carlo Methods with R, Springer , 2009.

[5] Figueiredo , M.A. , " Lecture Notes on Bayesian Estimation and Classification " , Instituto de Telecomunica¸c˜oes, and Instituto Superior T´ecnico 1049-001 Lisboa Portugal, 2004.

[6] Ghitany, M.E., Atieh, B. & Nadaraja, S., "Lindley Distribution and its Application", Mathematics and Computers in Simulation, Vol. 87 , PP. 493-506, 2008.

[7] Lindley, D.V., "Approximate Bayesian methods", Trabajos Estadist , Vol. 31, pp 223-237 , 1980.

Estimating the Scale Parameter for the Lindley Distribution - A Comparative Study of Waiting Time Analysis

Assist. Lect. Thaera Najim Abdullah
tha_alameer@uomustansiriyah.edu.iq
AL-Mustansiriyah University - College of Administration and Economics - Department of Statistics

Abstract:

This research deals with estimating the scale parameter for Lindley distribution by using the maximum likelihood method (ML) and standard Bayes method (SB), then a comparison was done between these estimators depending on the mean square error (MSE) criteria which depends on different simulation experiments . The results proved the priority of Bayes estimator when the samples sizes was small , vice versa in the case of medium and large samples size. The best estimator was invested for studying and analyzing the waiting time for AL-Rasheed Bank / AL-Mustansiriya University clients .

Keywords: Lindley distribution, Maximum likelihood, Bayes method, Lindley approximation and Waiting time.