مقارنة تجريبية بين بعض المقدرات اللامعلمية التقليدية والبيزية لبعض أنظمة المعولية•

أ.د.قتيبة نبيل نايف
drqutaiba_73@yahoo.com
جامعة بغداد- كلية الإدارة والإقتصاد
م.م.أسيل محمود شاكر
aseelalsuhail@yahoo.com
الجامعة العراقية- كلية الإدارة والإقتصاد

المستخلص

في هذا البحث تم تقدير دالة المعولية لبعض الأنظمة (نظام k-out of-n والنظام المتسلسل والنظام المتوازي) بإستعمال المقدرات اللامعلمية التقليدية وبثلاث طرائق مختلفة وهي: طريقة مقدر Kernel وطريقة مقدر Kaplan-Meier وطريقة مقدر مضروب الحدود ومقارنتها بمقدرات دالة المعولية اللامعلمية بإستعمال الطريقة البيزية التي إقترحها العالم Ferguson عام 1973 والتي أطلق عليها عمليات Dirichlet الأولية، ولبيان أفضلية الطرائق لتقدير دالة معولية الأنظمة تم إستعمال إسلوب المحاكاة للمقارنة ولأحجام عينات مختلفة (100 ,60 ,30 ,14) بإستعمال معيار المقارنة متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE ، ومن خلال النتائج تبين أفضلية الطرائق التقليدية بالنسبة لنظام k-out of-n والنظام المتوازي أما بالنسبة للنظام المتسلسل فقد تبين أفضلية الطريقة البيزية لحجوم العينات الصغيرة (14,30) والطرائق التقليدية لحجوم العينات الكبيرة (60,100).

الكلمات الرئيسية: عمليات Dirichlet الاولية، طريقة مقدر Kernel، طريقة مقدر Kaplan-Meier، طريقة مقدر مضروب الحدود، الطريقة البيزية، متوسط مربعات الخطأ التكاملي.

• بحث مستل من اطروحة دكتوراه [1]

1. المقدمة

إن ضرورة توفر معلومات حول المشكلة في دراسة المعولية تعتبر أساساً لاتخاذ القرار، لذا يجب على صانع القرار توضيح المشكلة ومن ثم الأهداف والقيود لهذه الدراسة والتي قد تكون لها احتمالات مختلفة لأداء الوظيفة المطلوبة بنجاح ولكن في حال عدم توفر هذه المعلومات او الشروط اللازمة لها ومع إختلاف حجوم العينات وزيادة تعقيدها فإن ذلك يعيق الحصول على مقدر لدالة المعولية بالطرائق التحليلية التقليدية. ولهذا فقد عمل الباحثين على إيجاد طرائق تكون أكثر مرونة في تحليل البيانات، حيث تم التوصل الى الطرائق اللامعلمية والتي لا تشترط بدورها معرفة التوزيع الذي تسلكه البيانات للحصول على المقدر، وهذه الميزة التي جعلت التعامل مع البيانات يكون أسهل وأكثر مرونة. لذلك فقد أصبح من الشائع جداً إستعمال الأساليب النظرية الإفتراضية اللامعلمية مما جعلها مقبولةً تماماً من الناحية العملية لأنها توفر الكثير من إستراتيجيات النمذجة العامة التي تحتوي على عدد أقل من الإفتراضات.

إن الهدف من البحث هو بيان الطريقة المثلى للتقدير بإستخدام المحاكاة من خلال المقارنة بين المقدرات اللامعلمية لدالة المعولية بالطرائق التقليدية والطرائق البيزية بإستعمال البيانات الكاملة .

2. طرائق التقدير Estimation Methods

2.1 طرائق التقدير التقليدية Classical Estimation Method

سيتم إعتماد ثلاث طرائق لتقدير دالة المعولية بالطرائق التقليدية وهي :

1) طريقة مقدر Kernel (Kernel Estimator Method)
2) طريقة مقدر Kaplan-Meier (Kaplan-Meier Method)
3) طريقة مقدر مضروب الحدود (Products Limit Estimator)

2.1.1 طريقة مقدر Kernel Kernel Estimator Method

تعتبر طريقة Kernal إحدى الطرق اللامعلمية لتقدير دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X وتقدير الدوال التجميعية ودالة المعولية وغيرها من الدوال ، وقد تم إقتراح هذه الطريقة من قبل الباحثان (Posenblatt and Parzan)[9] وهي دالة حقيقية محددة ومتماثلة وتحقق الشروط الآتية : [4]

1. $k(x) > 0$

2. $\int_R xk(x)dx = 0$

3. $\int_R k(x)dx = 1$

وهناك عدة انواع من دوال kernel منها دالة kernel من نوع Gaussian والتي سيتم اعتمادها في هذا البحث وصيغتها كما يلي : [10]

$$k(x;\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) I_{[-\infty,\infty]} \qquad \ldots (1)$$

وتهدف عملية استعمال مقدر kernel الى تمهيد البيانات بحيث يتم الحصول على مقدرات متقاربة بالصفات مع خواص المعلمات الحقيقية. وللحصول على مقدر kernel فإن أحد أهم الخطوات هو إختيار المعلمة التمهيدية (h) عرض الحزمة (Bandwidth) وذلك لأن إختيار عرض الحزمة المناسب سيقابله الإختيار الأفضل لدالة kernel ، حيث إنها تؤثر بشكل كبير في مقدار التحيز والتباين فزيادتها تؤدي إلى زيادة التحيز وتقليل التباين والعكس صحيح. وسيتم استعمال طريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي لإيجاد عرض الحزمة (h) .

❖ طريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي

Cross Validation Least Squared

تعتبر طريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي من الطرائق الشائعة والسهلة التطبيق في إختيار المعلمة التمهيدية ، أقترحت من قبل Rudemo (1982) و Bowman (1984) وأن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة تكمن في تصغير مربع الخطأ التكاملي ISE وكما يلي : [14]

$$ISE(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h^2(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt \qquad \ldots (2)$$

إن الحد الأخير لا تعتمد عليه $\hat{f}_h$ وبالتالي لا يعتمد على h ولهذا يجب تقدير الحدين الأول والثاني فقط .

الفكرة هي بإختيار المعلمة التمهيدية التي تقلل المقدار التالي :

$$L(h) = ISE(h) - \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h^2(t)dt - \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)f(t)dt$$

إن المبدأ الأساسي لطريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي هو إيجاد مقدر $L(h)$ من البيانات وتصفيره بواسطة h.

$$CV_{LS}(h) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h^2(t)dt - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_{h,-i}(t_i) \qquad \ldots (3)$$

إذ أن :

$$\hat{f}_{h,-i}(t_i) = \frac{1}{(n-1)h}\sum_{j\neq i} k\left(\frac{t-T_i}{h}\right) \qquad \ldots (4)$$

إن التوقع للمجموع في المعادلة (3) يكون كالآتي :

$$E\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{f}_{h,-i}(t_i) = E\hat{f}_{h,-n}(t_n) = E\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_{h,-n}(t)dt = E\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_h(t)dt$$

وذلك لأن $E(\hat{f}_h)$ يعتمد على دالة Kernal والمعلمة التمهيدية وليس على حجم العينة تبعاً لذلك :

$$E\left[CV_{LS}(h)\right] = E\left[L(h)\right]$$

وبذلك فأن $CV_{LS}(h) + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt$ هو مقدر غير متحيز إلى MISE ولذلك يمكن أن يطلق على هذه الطريقة أيضاً طريقة العبور الشرعي الغير متحيز. إن المعلمة التمهيدية التي تعمل على تقليل الدالة :

$$h_{LSCV} = \arg\min_h CV_{LS(h)} \qquad \ldots (5)$$

الخوارزمية :[11]

1- إعطاء قيمة أولية للمعلمة التمهيدية h حسب الصيغة الآتية

$$h = 1.06\sigma n^{-\frac{1}{5}}$$

إذ إن σ يمثل الإنحراف المعياري

2- حساب المقدر (Leave-one-out) كما في المعادلة (4) .
3- تكوين دالة العبور الشرعي $CV_{LS(h)}$ حسب المعادلة (3) .
4- الرجوع إلى الخطوة الأولى وتكرار الخطوات السابقة .
5- إختيار المعلمة التمهيدية h على أنها المعلمة التمهيدية المقابلة لأصغر CV أي أن:

$$\hat{h} = \arg\min_{h}[CV(h)] \qquad \dots (6)$$

وبعد إيجاد قيمة h يتم الحصول على مقدر كثافة Kernel لدالة الكثافة الأحتمالية f(t) حسب الصيغة الآتية : [2]

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{t - T_i}{h}\right) \qquad \dots (7)$$

وبإفتراض أن: $k\left(\frac{t-T_i}{h}\right) = u$ فإن : $k(u) \geq 0$ وتحقق ما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(u)du = 1$$

ويمكن الحصول على مقدر الدالة التجميعية CDF لدالة Kernel وكالآتي :

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t} k\left(\frac{z - T_i}{h}\right)dz \qquad \dots (8)$$

عليه فإن مقدر الدالة المعولية يمكن إيجاده بالصيغة الآتية :

$$\hat{R}(t) = 1 - \left[\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^{n} \int_{0}^{t} k\left(\frac{z - T_i}{h} \right) dz \right] \qquad \ldots (9)$$

❖ **طريقة قاعدة التوزيع الطبيعي (المعلمة التمهيدية المثلى)**

Normal Scale (Optimal Bandwidth) Method

إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة هي أن صيغة AMISE تعبر عن MSE كدالة الى h، إن قيمة h التي تقلل هذا المقدار تسمى المعلمة التمهيدية المثلى ، وقد أقترحت هذه الطريقة من قبل (Silverman) من طريقة (Rule of Thumb) حيث يمكن إيجاد الحل بأخذ المشتقة الى AMISE بالنسبة الى h وكمايلي:[12]

$$\frac{d}{dh}\mathrm{AMISE} = \frac{d}{dh}\left(\frac{k_v^2(k)}{(v!)^2} R\left(f^{(v)}\right) h^{2v} + \frac{R(k)}{nh} \right)$$

$$= 2vh^{2v-1} \frac{k_v^2(k)}{(v!)^2} R\left(f^{(v)}\right) - \frac{R(k)}{nh^2}$$

$$= 0$$

$$h_0 = C_v(k, f) n^{-1/(2v+1)} \qquad \ldots (10)$$

إذ أن:

$$C_v(k, f) = R(f^{(v)})^{-1/(2v+1)} A_v(k) \qquad \ldots (11)$$

$$A_v(k) = \left(\frac{(v!)^2 R(k)}{2vk_v^2(k)}\right)^{\frac{1}{2v+1}}$$

وعند إستعمال دالة *Gaussian* فإن قيم $R(k)$ و $k_v^2(k)$ و $C_v(k, f)$ تكون كما يلي:

جدول (1): يبين قيم $R(k)$ و $k_v^2(k)$ و $C_v(k,f)$ لدالة Gaussian

Kernel	v	$R(k)$	$k_v^2(k)$	$C_v(k,f)$
Gaussian	2	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$	1	1.06

وبذلك تكون قيمة عرض الحزمة h كما يلي:

$$h = \hat{\sigma}(1.06)n^{-1/5} \qquad \dots (13)$$

وبعد إيجاد قيمة h يتم الحصول على مقدر كثافة Kernel لدالة الكثافة الأحتمالية f(t) حسب الصيغة الآتية : [2]

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} k\left(\frac{t-T_i}{h}\right) \qquad \dots (14)$$

وبإفتراض أن: $k\left(\frac{t-T_i}{h}\right) = u$ فإن : $k(u) \geq 0$ وتحقق ما يلي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(u)du = 1$$

ويمكن الحصول على مقدر الدالة التجميعية CDF لدالة Kernel وكالآتي :

$$\hat{F}(t) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t} k\left(\frac{z-T_i}{h}\right)dz \qquad \dots (15)$$

عليه فإن مقدر الدالة المعولية يمكن إيجاده بالصيغة الآتية:

$$\hat{R}(t) = 1 - \left[\frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n}\int_{0}^{t} k\left(\frac{z-T_i}{h}\right)dz\right] \qquad \dots (16)$$

2.1.2 مقدر Kaplan-Meier   Kaplan -Meier Estimator

في عام (1958) قدم كل من Edward L. Kaplan وPaul Meier ورقة عمل حول كيفية التعامل مع البيانات الغير كاملة. فعندما تكون البيانات تحت المراقبة فإن مقدر Kaplan-Meier يكون بالصيغة الآتية[4]

$$\hat{R}(t)=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n_i}\right) \quad \dots (17)$$

إن منحنيات ومقدرات Kaplan-Meier لبيانات البقاء أصبحت مجالاً جيداً للتعامل مع أوقات بقاء مختلفة، خصوصاً عندما لا تكون جميعها خاضعة للاستمرارية في الدراسة [14] ففي المجال الطبي فإن مقدر Kaplan-Meier من الممكن أن يستخدم لقياس جزء من حياة المرضى ولفترة زمنية معينة بعد العلاج، كذلك في المجال الصناعي فإنه من الممكن قياس الوقت حتى حصول الفشل للماكنة أو المنتج .[15] إن مقدر Kaplan-Meier في حالة البيانات الكاملة يعطى بالصيغة الآتية: [4]

$$\hat{R}(t_i)=1-\frac{i}{n} \quad \dots (18)$$

إذ إن : $\hat{R}(t_i)$ تمثل مقدر دالة المعولية .

n تمثل أعداد أوقات الفشل الباقية في الوقت t_i.

2.1.3 طريقة مقدر مضروب الحدود

Products Limit Estimator Method

تمكن العالم لويس عام (1987) إختزال المعادلة الآتية :[3]

$$\hat{R}(t_i)=\frac{n+1-i}{n+1} \quad \dots (19)$$

والتي هي مقدر دالة المعولية بالإعتماد على رتبة الوسط للحصول على مقدر دالة المعولية وبدون بتر حسب الصيغة الآتية :

$$\hat{R}(t_{i-1})=\frac{n+2+i}{n+1} \quad \dots (20)$$

وبقسمة المعادلة (19) على المعادلة (20) نحصل على :

$$\frac{\hat{R}(t_i)}{\hat{R}(t_{i-1})}=\frac{n+1-i}{n+2+i}$$

بذلك نحصل على مقدر الدالة المعولية بطريقة مضروب الحدود كالآتي :

$$\hat{R}(t_i)=\frac{n+1-i}{n+2-i}*\hat{R}(t_{i-1}) \ , \qquad i=1,2,...,m \qquad \ldots (21)$$

اذ أن :

n يمثل العدد الكلي لأوقات الفشل .

m العدد الكلي لقيم رتب أوقات الفشل .

3. تقدير معولية الأنظمة: Estimation of Systems Reliability

3.1 تقدير معولية نظام k-out of-n

Reliability Estimation of k-out of-n System

نفرض أن لدينا نظام (2-out of-3) وإن مقدر دالة المعولية للمركبة الأولى هو كما موضح في المعادلة (9) بإستعمال مقدر Kernel وحسب طريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي LSCV، والمعادلة (16) بإستعمال طريقة قاعدة التوزيع الطبيعي (المعلمة التمهيدية المثلى) وإن مقدر معولية المركبة الثانية هو كما موضح في المعادلة (18) بإستعمال مقدر Kaplan-Meier وأن مقدر معولية المركبة الثالثة هو كما موضح في معادلة (21) بإستعمال مقدر مضروب الحدود وبذلك ستكون معولية النظام كالآتي:

$$R_s(t)=R_1(t)R_2(t)+R_2(t)R_3(t)+R_1(t)R_3(t)-2R_1(t)R_2(t)R_3(t)$$

$$\begin{aligned}R_s(t)=&\left[1-(nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}k\left(\frac{z-T_i}{h}\right)dz\right]\left[1-\frac{i}{n}\right]+\left[1-\frac{i}{n}\right]\left[\frac{n+1-i}{n+2-i}\hat{R}(t_{i-1})\right]\\&+\left[1-(nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}k\left(\frac{z-T_i}{h}\right)dz\right]\left[\frac{n+1-i}{n+2-i}\hat{R}(t_{i-1})\right]\\&-2\left[1-(nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}k\left(\frac{z-T_i}{h}\right)dz\right]\left[1-\frac{i}{n}\right]\left[\frac{n+1-i}{n+2-i}\hat{R}(t_{i-1})\right]\ldots(22)\end{aligned}$$

3.2 تقدير معولية النظام المتسلسل
Estimation Reliability of Series System

نفرض أن لدينا نظاماً مؤلفاً من ثلاث مركبات مستقلة لكنها غير متماثلة مربوطة بشكل متسلسل وقد تم حساب معوليتها بشكل مستقل وفقاً للمعادلة (9) بإستعمال مقدر Kernel وحسب طريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي LSCV والمعادلة (16) بإستعمال طريقة قاعدة التوزيع الطبيعي (المعلمة التمهيدية المثلى) ، وإن مقدر معولية المركبة الثانية هو كما موضح في المعادلة (18) بإستعمال مقدر Kaplan-Meier وأن مقدر معولية المركبة الثالثة هو كما موضح في معادلة (21) بإستعمال مقدر مضروب الحدود ، علماً إن أوقات الحياة لكل مركبة مستقلة عن الأخرى .

ان معولية النظام المتسلسل يمكن إيجادها كما يلي : [5]

$$R_s(t)=\prod_{i=1}^{3}R_i(t)$$
$$=R_1.R_2.R_3$$

$$R_s(t)=\left[1-(nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}k\left(\frac{z-T_i}{h}\right)dz\right]\left[1-\frac{i}{n}\right]\left[\frac{n+1-i}{n+2-i}\hat{R}(t_{i-1})\right]...(23)$$

3.3 تقدير معولية النظام المتوازي
Estimation Reliability of Parallel System

نفرض أن لدينا ثلاث مركبات مربوطة بشكل متوازي وأن أوقات الحياة لكل مركبة مستقلة عن الأخرى وأن معوليتها تم إيجادها وفقاً للمعادلة (9) و بإستعمال مقدر Kernel وحسب طريقة المربعات الصغرى للعبور الشرعي LSCV ، والمعادلة (16) بإستعمال طريقة قاعدة التوزيع الطبيعي (المعلمة التمهيدية المثلى) وإن مقدر معولية المركبة الثانية هو كما موضح في المعادلة (18) بإستعمال مقدر Kaplan-Meier وأن مقدر معولية المركبة الثالثة هو كما موضح في معادلة (21) بإستعمال مقدر مضروب الحدود.

إن معولية النظام يمكن إيجادها كما يلي : [13]

$$R_s(t) = 1 - \prod_{i=1}^{3}\left[1 - R_i(t)\right]$$

$$= 1 - \left[\left(1 - R_1(t)\right)\left(1 - R_2(t)\right)\left(1 - R_3(t)\right)\right]$$

$$R_s(t) = 1 - \left[\left(1 - (nh)^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t} k\left(\frac{z - T_i}{h}\right)dz\right)\left(1 - \frac{i}{n}\right)\left(\frac{n+1-i}{n+2-i}\hat{R}(t_{i-1})\right)\right] \quad ...(24)$$

4. مقدرات بيز اللامعلمية لحساب معولية الأنظمة :

Nonparametric Bayesian Estimators for Systems Reliability

4.1 مقدر بيز اللامعلمي لمعولية نظام 2-out of-3 :

Nonparametric Bayesian Estimators for 2-out of-3 System

تصنف طرائق بيز اللامعلمية لتقدير معولية الأنظمة الى ثلاثة أصناف وكالآتي :[8]

1. Prior on the class of all distributions.
2. Prior on the class of all hazard rates.
3. Prior on the class of all cumulative hazards.

وسيتم إستعمال الصنف الأول في الحصول على مقدر بيز اللامعلمي .

❖ **<u>Prior on the class of all distributions:</u>**

اقترح هذا الاسلوب من قبل العالم Ferguson عام (1973) ويطلق عليه عمليات Dirichlet الأولية، وهي عمليات تستعمل لإيجاد التوزيعات الأولية للدوال اللامعلمية. فقد أفترض Ferguson إن F دالة التوزيع التجميعية (cdf) تتوزع وفق عمليات Dirichlet الأولية أي إن :

$$F \sim D(M, F_0)$$

إذ إن: M تمثل معلمة التحديد ، $M > 0$

F_0 يمثل توزيع الأساس

فإذا كانت $\theta/F \sim F$ وإن $F \sim D(M, F_0)$ فإن :

$$F/\theta \sim \frac{1}{M+1}[MF_0+\delta_e] \qquad \dots (25)$$

فإذا كانت $T_1,\dots,T_n$ هي مشاهدات مولدة عن طريق F وأن $F\sim D(M,F_0)$ فإن مقدر بيز بإستعمال دالة خسارة تربيعية $\left[F(t)-\hat{F}(t)\right]^2$ يكون كالآتي :[7]

$$\hat{F}(t)=\frac{M}{M+n}F_0(t)+\frac{1}{M+n}F_n(t) \qquad \dots (26)$$

إذ إن :

$F_n(t)$ تمثل دالة التوزيع التجريبي للعينة وتكون مساوية إلى $\frac{i}{n+1}$ وإن مقدر دالة المعولية يعطى بالشكل الآتي:

$$\hat{R}(t)=1-\hat{F}(t)$$

$$\hat{R}(t)=1-\left[\frac{M}{M+n}F_0(t)+\frac{1}{M+n}F_n(t)\right] \qquad \dots (27)$$

ولحساب معولية النظام 2-out of-3 سنفترض إن المركبة الأولى تمتلك دالة توزيع تجميعية F بمشاهدات $T_1,\dots\dots..,T_n$ فإن :

$$F\sim D(M_1,F_0)$$

وإن المركبة الثانية لها دالة توزيع تجميعية G بمشاهدات $X_1,\dots,X_m$ فإن :

$$G\sim D(M_2,G_0)$$

وإن المركبة الثالثة لها دالة توزيع تجميعية K بمشاهدات $Y_1,\dots,Y_z$ فإن :

$$K\sim D(M_3,K_0)$$

لذلك فإن معولية النظام ستكون:

$$\hat{R}_{S(B.N.P)}(t)=\hat{R}_{B.N.P(1)}(t)\hat{R}_{B.N.P(2)}(t)+\hat{R}_{B.N.P(2)}(t)\hat{R}_{B.N.P(3)}(t)+\hat{R}_{B.N.P(1)}(t)\hat{R}_{B.N.P(3)}(t)-2\hat{R}_{B.N.P(1)}(t)\hat{R}_{B.N.P(2)}(t)\hat{R}_{B.N.P(3)}(t)$$

إذ أن: $\hat{R}_{S(B.N.P)}(t)$ تمثل معولية النظام اللامعلمية البيزية

$$\hat{R}_s(t)=\left[1-\left(\frac{M_1}{M_1+n}F_0(t)+\frac{1}{M_1+n}F_n(t)\right)\right]\left[1-\left(\frac{M_2}{M_2+m}G_0(x)+\frac{1}{M_2+m}G_n(x)\right)\right]$$
$$+\left[1-\left(\frac{M_2}{M_2+m}G_0(x)+\frac{1}{M_2+m}G_n(x)\right)\right]\left[1-\left(\frac{M_3}{M_3+z}D_0(y)+\frac{1}{M_3+z}D_n(y)\right)\right]$$
$$+\left[1-\left(\frac{M_1}{M_1+n}F_0(t)+\frac{1}{M_1+n}F_n(t)\right)\right]\left[1-\left(\frac{M_3}{M_3+z}D_0(y)+\frac{1}{M_3+z}D_n(y)\right)\right]$$
$$-2\left[1-\left(\frac{M_1}{M_1+n}F_0(t)+\frac{1}{M_1+n}F_n(t)\right)\right]\left[1-\left(\frac{M_2}{M_2+m}G_0(x)+\frac{1}{M_2+m}G_n(x)\right)\right]$$
$$*\left[1-\left(\frac{M_3}{M_3+z}D_0(y)+\frac{1}{M_3+z}D_n(y)\right)\right] \qquad \ldots (28)$$

4.2 مقدر بيز اللامعلمي للنظام المتسلسل
Nonparametric Bayesian Estimator for Series System

يمكن حساب مقدر بيز اللامعلمي للنظام المتسلسل كما يلي :

$$\hat{R}_{S(B.N.P)}(t)=\prod_{i=1}^{3}R_i(t)$$
$$=\hat{R}_{B.N.P(1)}(t).\hat{R}_{B.N.P(2)}(t).\hat{R}_{B.N.P(3)}(t)$$

$$\hat{R}_{S(B.N.P)}(t)=\left[\left(\frac{M_1}{M_1+n}F_0(t)+\frac{1}{M_1+n}F_n(t)\right)\right]\left[\left(\frac{M_2}{M_2+m}G_0(x)+\frac{1}{M_2+m}G_n(x)\right)\right]$$
$$\left[\left(\frac{M_3}{M_3+z}D_0(y)+\frac{1}{M_3+z}D_n(y)\right)\right] \qquad \ldots(29)$$

4.3 مقدر بيز اللامعلمي للنظام المتوازي
Nonparametric Bayesian Estimator for Parallel System

يمكن حساب مقدر بيز اللامعلمي للنظام المتوازي وكالآتي:

$$\hat{R}_{S(B.N.P)}(t)=1-\prod_{i=1}^{3}\left[1-R_i(t)\right]$$
$$=1-\left[\left(1-\hat{R}_{B.N.P(1)}(t)\right)\left(1-\hat{R}_{B.N.P(2)}(t)\right)\left(1-\hat{R}_{B.N.P(3)}(t)\right)\right]$$

$$\hat{R}_{S(B.N.P)}(t)=1-\left[1-\left(\frac{M_1}{M_1+n}F_0(t)+\frac{1}{M_1+n}F_n(t)\right)\right]\left[1-\left(\frac{M_2}{M_2+m}G_0(x)+\frac{1}{M_2+m}G_n(x)\right)\right]$$
$$\left[1-\left(\frac{M_3}{M_3+z}D_0(y)+\frac{1}{M_3+z}D_n(y)\right)\right] \qquad ...(30)$$

5. الجانب التجريبي

تم إستخدام إسلوب المحاكاة للطرائق اللامعلمية التقليدية والبيزية لتقدير معولية الانظمة بإستعمال حجوم عينات مختلفة وهي (14,30,60,100) والمقارنة بإستعمال المقياس الإحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMES وحسب الصيغة الآتية :

$$\mathrm{IMSE}[R(T)]=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}\left[\hat{R}_i(t_j)-R(t_j)\right]^2\}$$

$$=\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}MSE\ [\hat{R}\ (t_j)]$$

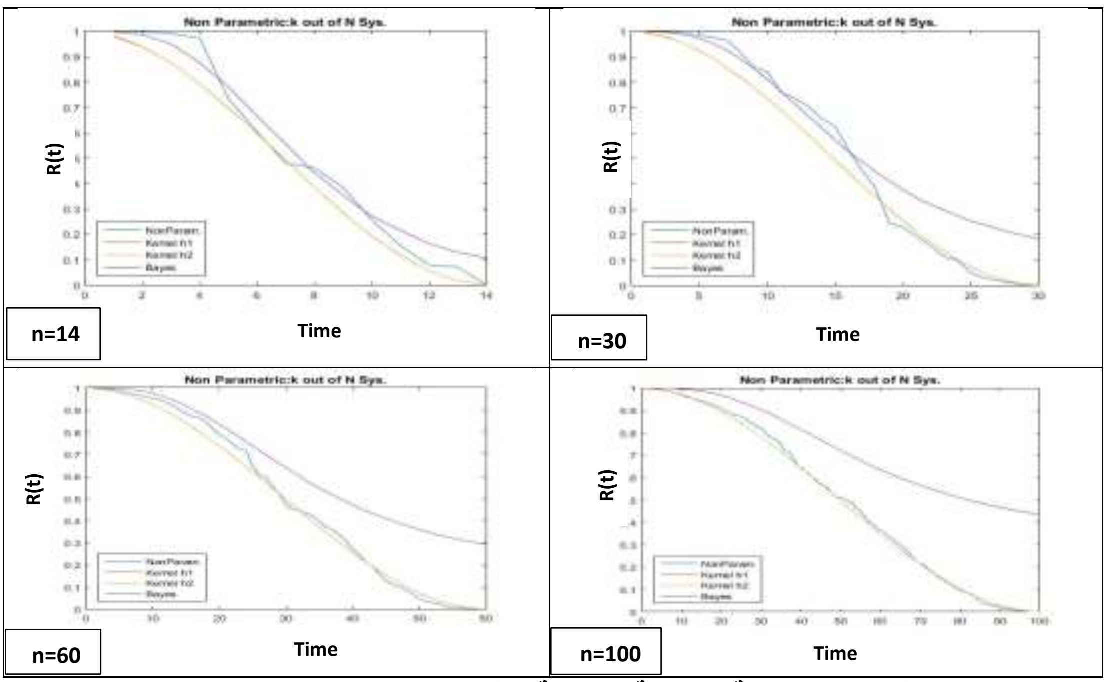
إذ أن: L يمثل عدد مرات تكرار التجربة . حيث تعتبر المحاكاة من الوسائل المهمة المستعملة في حل المشاكل التي يصعب حلها بالطرائق التحليلية أو العددية.

أما فيما يخص توليد البيانات فقد تم توليد الارقام العشوائية بالإعتماد على التوزيع المنتظم Uniform Distribution (0,1) بإستعمال

برنامج (Matlab)، وقد تم اختيار التكرار لاحجام العينات والمساوي الى L= 100 لكل تجربة. فبالنسبة الى نظام k-out of-n فإن قيم IMSE للطرائق وحجوم العينات المختلفة هي كما موضحة بالجدول الاتي:

جدول (2): قيم متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE لمعولية نظام k-out of-n

Samples Size n	Classical Nonparametric		Bayesian Nonparametric
	LSCV Bandwidth	Optimal Bandwidth	
14	0.005421374	0.005570823	0.009924059
30	0.004308323	0.004232389	0.02323299
60	0.000897961	0.000931695	0.045746357
100	0.000242157	0.000261394	0.090130048

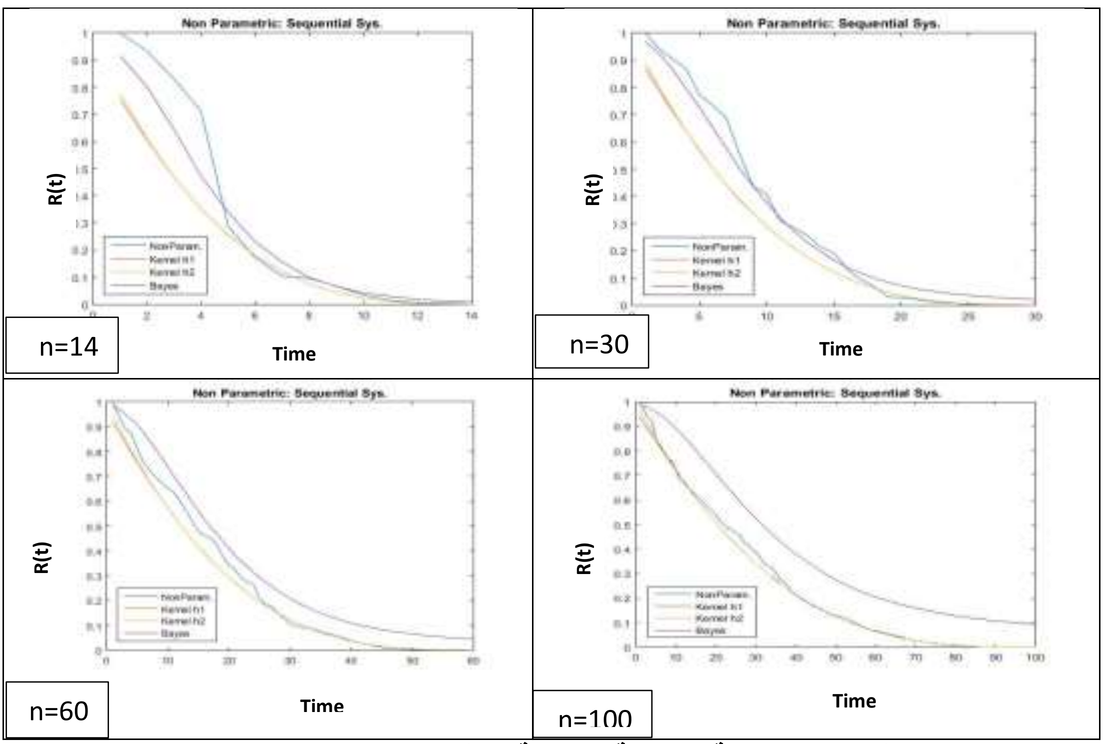


شكل (1) الطرائق اللامعلمية التقليدية والبيزية لنظام k-out of-n عند حجوم العينات المختلفة

أما بالنسبة الى النظام المتسلسل Series System فإن قيم IMSE للطرائق وحجوم العينات المختلفة هي كما موضحة بالجدول الآتي:

جدول (3): قيم متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE لمعولية النظام المتسلسل

Samples Size n	Classical Nonparametric		Bayesian Nonparametric
	LSCV Bandwidth	Optimal Bandwidth	
14	0.029915052	0.030888981	0.011722917
30	0.011826368	0.012226872	0.004864461
60	0.001710777	0.001899434	0.009166469
100	0.000329269	0.000430651	0.026779993

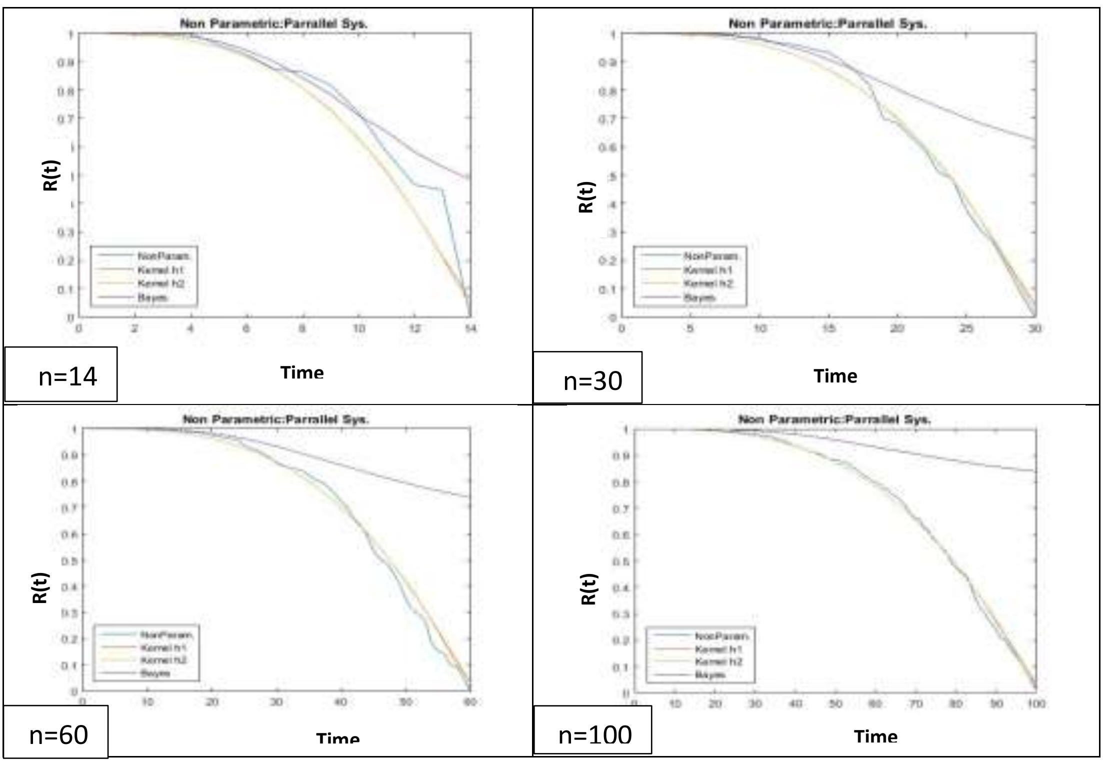


شكل (2) الطرائق اللامعلمية التقليدية والبيزية للنظام المتسلسل عند حجوم العينات المختلفة

أما فيما يخص النظام المتوازي Parallel System فإن قيم IMSE للطرائق وحجوم العينات المختلفة هي كما موضحة بالجدول الآتي:

جدول (4): قيم متوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE لمعولية النظام المتوازي

Samples Size n	Classical Nonparametric		Bayesian Nonparametric
	LSCV Bandwidth	Optimal Bandwidth	
14	0.006508342	0.006748148	0.025516797
30	0.000992707	0.000835586	0.058555102
60	0.000753635	0.00087852	0.083810935
100	0.000162548	0.000223391	0.100399183



شكل (3) الطرائق اللامعلمية التقليدية والبيزية للنظام المتوازي عند حجوم العينات المختلفة

6. الإستنتاجات

1) من خلال النتائج المبينة في الجدول (2) فيما يخص نظام k-out of-n تبين بأن الطرائق التقليدية حققت أقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي ولحجوم العينات المختلفة كافة.
2) أما فيما يخص الجدول (3) الخاص بالنظام المتسلسل نلاحظ بالنسبة لحجوم العينات الصغيرة (14,30) أن اقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي تحققت عند الطريقة البيزية ،أما عند حجوم العينات الكبيرة (60,100) فقد تحققت عند الطرائق التقليدية.
3) أما النظام المتوازي وحسب النتائج الموضحة في الجدول (4) فإن أقل قيم لمتوسط مربعات الخطأ التكاملي ظهرت عند الطرائق التقليدية ولجميع حجوم العينات.

7. التوصيات

1) تقدير معولية الأنظمة بإستعمال بيانات مراقبة ومقارنتها بنتائج البحث.
2) إستعمال طرائق مختلفة لتقدير المعلمة التمهيدية في إيجاد المقدر اللامعلمي لدالة المعولية.

المصادر

[1] السهيل، أسيل محمود (2016)،"تقدير معولية الانظمة بإستعمال مقدرات بيز اللامعلمية وشبه المعلمية مع تطبيق عملي" أطروحة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد-جامعة بغداد.

[2] حمود، مناف يوسف، (2005)، "مقارنة المقدرات اللامعلمية لتقدير دوال الكثافة الاحتمالية"، أطروحة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد- جامعة بغداد.

[3] الصفار، رواء صالح، (2013)، "الطرائق اللامعلمية والمعدلة في تقدير دالة المعولية للبيانات الكاملة مع تطبيق عملي"، أطروحة دكتوراه فلسفة في علوم الإحصاء مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد- الجامعة المستنصرية.

[4] القرشي، إحسان كاظم، (2001)، "الطرائق اللامعلمية في تقدير دالة المعولية"، أطروحة دكتوراه في علوم الإحصاء مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد- الجامعة المستنصرية.

[5] Al Nasser, A., (2009), "An Introduction to Statistical Reliability", First Edition, Jordan, Ithraa Publishing and Distribution.

[6] Breheny, P., "Kernel Density Estimation", (October 28), STA 621: Nonparametric Statistics.
https://pdfs.semanticscholar.org/presentation/f174/af403b8125995e8ce3882bf8e60bb15004df.pdf

[7] Ferguson, T. S., (2003), "A Bayesian Analysis of Some Nonparametric Problems", Journal of Computational Biology, Volume 15, Number 10, 2008

[8] Ghosh, K., & Tiwari, R. C. (2007), "Nonparametric and Semi parametric Bayesian Reliability Analysis", Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability.

[9] Guidoum, A.C., (2015), "Kernel Estimator and Bandwidth Selection for Density and its Derivatives".
https://cran.rproject.org/web/packages/kedd/vignettes/kedd.pdf

[10] Hardle, W., & Klinke, S., & Muller, M., (1993), "Applied nonparametric Smoothing Techniques", Humboldt University.
https://www.wiwi.huberlin.de/de/professuren/quantitativ/statistik/members/personalpages/wh/publications/1993-1996.pdf

[11] Hardle, W., (1994), "Applied Nonparametric Regression", Cambridge, UK.
https://www.google.iq/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwiv69m7nsLbAhVMKFAKHZRLCiYQFggsMAA&url=http%3A%2F%2Fftsipil.unila.ac.id%2Fdbooks%2Fapplied%2520nonparametric%2520regression.pdf&usg=AOvVaw1UXJQZ0lRja7BGlaXa-OVX

[12] Hansen, B.E., (2009), ”Lecture Notes on Nonparametric", thesis in statistics, The Islamic University of Gaza, Deanery of Higher Studies, Faculty of Science, Department of Mathematics.

[13] Hoyland, A. & Rausand, M., (1994), "System Reliability Theory: Models and Statistical Methods", Wiley, New York.

[14] Schroder, B., "The Exponential Distribution", thesis in statistics, Louisiana Tech. University, College of Engineering and Science.

[15] Singh, H., Cortellessa, V., Cukic, B., Gunel, E., & Bharadwaj, V., (2001), "A Bayesian Approach to Reliability Prediction and Assessment of Component Based Systems", Software Reliability Engineering, 2001. ISSRE 2001, Proceedings. 12th International Symposium on (PP. 12-21). IEEE.

[16] You, W. Z., & Zhong, X. P. (2014), "Modeling System Reliability Using a Non-parametric Method", Applied Mechanics and Materials (Vol. 687, PP. 1193-1197), Trans. Tech. Publications.

Experimental Comparison of some of the Classical and Bayesian Nonparametric Estimators for some Reliability Systems

Prof. Dr. Qutaiba Nabeel Naif
drqutaiba_73@yahoo.com
University of Baghdad - College of Administration and Economy
Aseel Mahmood Shakir
aseelalsuhail@yahoo.com
Al-Iraqia University - College of Administration and Economy

Abstract: *In this paper, the classical nonparametric estimations are used to estimate reliability function for k-out of-n system, series system, and parallel system by using three different methods: Kernel estimator method, Kaplan-Meier estimator method, and product limit estimator method. These functions are compared to Bayesian nonparametric reliability estimator which is proposed by Ferguson in 1973 and dubbed the "Prior Dirichlet Processes". To choose a better method for estimation, it has been used a simulation procedure for different sample sizes of size (14, 30, 60, and100) using Integral Mean Square Error (IMSE) for comparison. The results indicate that it is better to use the classical method* *with k-out of-n system and parallel system, whereas for series system it is better to use Bayesian method for small samples of size (14, and 30) and the classical method for big samples size of (60,and100).*

Keyword: Prior Dirichlet Processes, kernel estimator, Kaplan-meier estimator, product limit estimator, Bayesian Method, Integral Mean Squared Error.