

التحليل الإحصائي لتجارب القطع المنشقة المنشقة

أ. كمال علوان خلف المشهداني د. قتيبة نبيل نايف القزاز
جامعة بغداد- كلية الادارة والاقتصاد قسم الاحصاء

الملخص

حينما يتم توسيع تجربة القطع المنشقة الى تجربة القطع المنشقة المنشقة فقد تتداخل صيغ حساب مجاميع المربعات لمصادر التباين ولغرض الأبتعاد عن الأرتباك في استخدام هذه الصيغ فإن هذا البحث يهدف الى توظيف طريقة بأستخدام الصيغ المعتمدة لتحديد درجات الحرية لمصادر التباين لغرض حساب مجاميع المربعات لها كطريقة سريعة قياساً بما هو معتمد. ولقد تم تطبيق هذه الطريقة على تجربة قطع منشقة منشقة $(3 \times 3 \times 3)$ للوصول الى نتائج متطلبات التحليل الإحصائي لهذه التجربة.

Abstract:

This research aims to employ a method by use the formulas that determine the degrees of freedom for each component of sources of variation to calculate the sums of squares for each component as a fast and accurate method compared with another methods in Split – split plots experiment.

1- المقدمة

إن التجربة العاملية تعني دراسة تأثير عاملين أو أكثر (بنفس الأهمية) في وقت واحد وتجربة واحدة، ومن خلالها يتم التمكن من الحصول على معلومات عن التأثيرات الأساسية للعوامل وعن تأثيرات التفاعلات بينها وفي بعض الحالات أو بعض التطبيقات قد تكون الحاجة لدراسة أحد العوامل و التركيز على أهمية وتفاعل هذا العامل مع عامل آخر دون التركيز على أهمية العامل الأخر بنفس درجة التركيز على العامل المحتاجين لدراسته، وفي مثل هذه الحالة يتم استخدام تجربة القطع المنشقة Split plots experiment، وأذا ما أريد دراسة عامل معين والتركيز على أهميته وتفاعله مع عاملين آخرين فيتم استخدام تجربة القطع المنشقة المنشقة Split – split plots experiment والتي يكثر استخدام هذا النوع من التجارب العاملية في مجالات التجارب الزراعية والكيميائية .

2- الهدف

الهدف من هذا البحث هو تقديم طريقة نوظف من خلالها الصيغ المعتمدة لتحديد درجة الحرية لكل مصدر من مصادر التباين في تجربة القطع المنشقة المنشقة لغرض تكوين صيغ لحساب مجموع المربعات لكل مصدر من مصادر التباين.

3- تصميم تجربة القطعة المنشقة المنشقة [3] : split split plot experiment

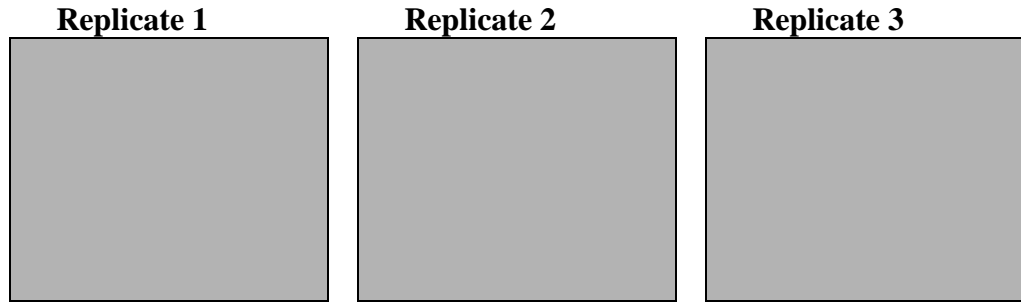
design تحت فرض أنة لدينا العامل A بمستويين (a_1, a_2) والعامل B بثلاثة مستويات

والعامل C ذو 6 مستويات ($c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6$) وأن العامل C هو الأهم في التجربة يليه العامل B وأخيراً العامل A ، وأردنا استخدام هذه العوامل بتجربة منشقة- منشقة بأعتماد ثلاثة مكررات فإن تصميم القطع المنشقة المنشقة يكون حسب المخطط التالي وعلى أربعة مراحل:

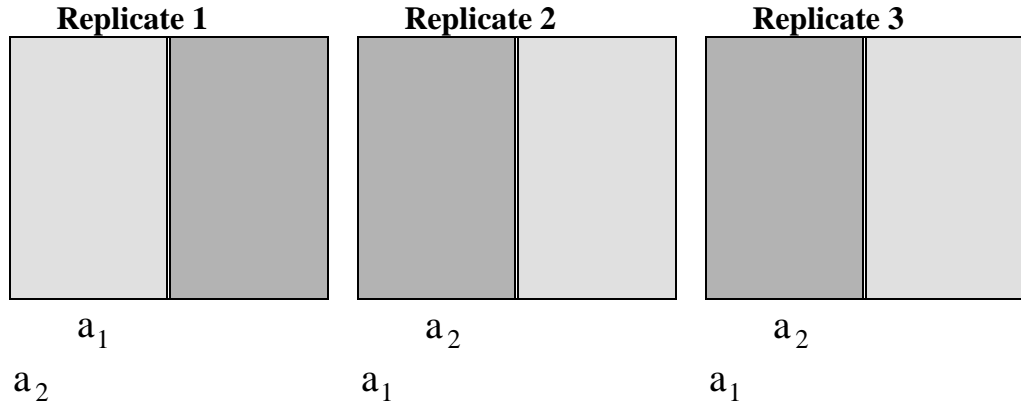
شكل رقم (1)

يوضح مراحل تصميم القطعة المنشقة المنشقة

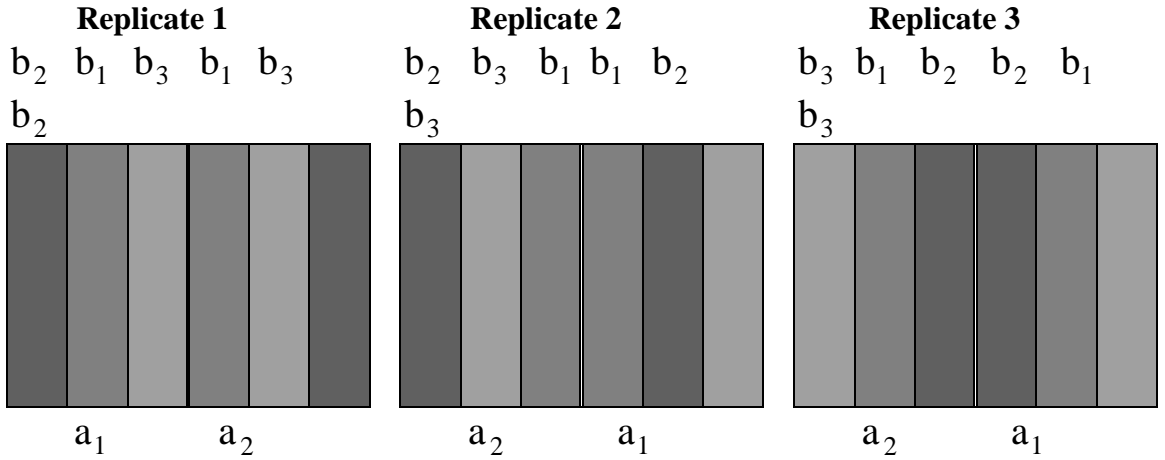
المرحلة الأولى: توزيع الوحدات التجريبية المتجانسة على ثلاث مكررات وكما في المخطط التالي:



المرحلة الثانية: كل مكرر يجزء الى جزئين ويتم توزيع مستويي العامل A بشكل عشوائي على الجزئين ضمن مكرر وكما يلي:



المرحلة الثالثة: تقسيم كل جزء يحوي أحد مستويات العامل A الى 6 اجزاء (تقسيمات فرعية أو منشقة) ويتم توزيع مستويات العامل B عليها بشكل عشوائي وكما في المخطط التالي:



المرحلة الرابعة: كل تقسيم فرعي (منشق) مخصص لأحد مستويات العامل B يتم تقسيمه الى تقسيمات فرعية فرعية أو منشقة منشقة ويتم توزيع مستويات العامل C عليها بشكل عشوائي فيكون المخطط النهائي كما يلي:

Replicate 1

b₂ b₁ b₃ b₁ b₃ b₂

C	C	C	C	C	C
5	5	2	5	2	6
C	C	C	C	C	C
1	2	4	2	5	4
C	C	C	C	C	C
6	4	6	1	1	5
C	C	C	C	C	C
3	3	5	3	6	1
C	C	C	C	C	C
4	1	3	4	4	3
C	C	C	C	C	C
2	6	1	6	3	2

a₁ a₂

Replicate 2

b₂ b₃ b₁ b₁ b₂ b₃

C	C	C	C	C	C
2	4	4	6	4	5
C	C	C	C	C	C
3	3	1	2	6	1
C	C	C	C	C	C
5	1	2	4	1	2
C	C	C	C	C	C
1	5	5	3	5	6
C	C	C	C	C	C
6	6	3	1	2	3
C	C	C	C	C	C
4	2	6	5	3	4

a₂ a₁

Replicate 3

b₃ b₁ b₂ b₂ b₁ b₃

C	C	C	C	C	C
5	1	4	3	5	1
C	C	C	C	C	C
2	4	3	4	6	2
C	C	C	C	C	C
6	6	6	6	2	3
C	C	C	C	C	C
4	3	2	5	3	5
C	C	C	C	C	C
1	5	1	2	1	4
C	C	C	C	C	C
3	2	5	1	4	6

a₂ a₁

وأذا نظرنا في التصميم الموضح بالمخطط السابق من جهة العامل A فقط نلاحظ بأنة تصميم بثلاثة تكرارات، أما إذا نظرنا الية من جهة العامل B لوجدنا أنه ذو 6 تكرارات، أما إذا نظرنا اليه من جهة العامل C لوجدنا أنه ب 18 تكرار، وبذلك نجد أن دقة التجربة فيما يخص العامل C ستكون أعلى من دقة التجربة للعامل B والعامل A وكذلك فإن دقة التجربة فيما يخص العامل B ستكون أعلى من دقة التجربة للعامل A .

3.1 - جدول نتائج القطع التجريبية

إذ كان:

- a : يمثل عدد القطع الرئيسية المخصصة لمستويات العامل A .
b : يمثل عدد القطع الفرعية (المنشقة) ضمن كل قطعة رئيسية والمخصصة لمستويات العامل B.
c : يمثل عدد القطع الفرعية الفرعية (المنشقة المنشقة) ضمن كل قطعة فرعية أولية والمخصصة لمستويات العامل C.
r : يمثل عدد التكرارات أو عدد القطع الرئيسية المخصصة لكل مستوى من مستويات العامل A.

وعليه فإن نتائج (الأستجابة) للقطع التجريبية بالرموز بشكل عام يمكن أن تكون كما يلي في الجدول رقم (1) الآتي:

جدول رقم (1)

نتائج القطع التجريبية بالرموز لتجربة القطع المنشقة المنشقة

A	B	C	1	2	...	h	...	r	Total	
a ₁	b ₁	c ₁	y ₁₁₁₁	y ₁₁₁₂	...	y _{111h}	...	y _{111r}	y _{111.}	
		c ₂	y ₁₁₂₁	y ₁₁₂₂	...	y _{112h}	...	y _{112r}	y _{112.}	
		:	:	:	:	:	:	:	:	
		c _k	y _{11k1}	y _{11k2}	...	y _{11kh}	...	y _{11kr}	y _{11k.}	
		:	:	:	:	:	:	:	:	
		c _c	y _{11c1}	y _{11c2}	...	y _{11ch}	...	y _{11cr}	y _{11c.}	
		∑		y _{11·1}	y _{11·2}	...	y _{11·h}	...	y _{11·r}	y _{11·.}
		:	:	:	:	:	:	:	:	
	b _j	c ₁	y _{1j11}	y _{1j12}	...	y _{1j1h}	...	y _{1j1r}	y _{1j1.}	
		c ₂	y _{1j21}	y _{1j22}	...	y _{1j2h}	...	y _{1j2r}	y _{1j2.}	
		:	:	:	:	:	:	:	:	
		c _k	y _{1jk1}	y _{1jk2}	...	y _{1jkh}	...	y _{1jkr}	y _{1jk.}	
		:	:	:	:	:	:	:	:	
:		:	:	:	:	:	:	:		

		c_c	y_{1jc1}	y_{1jc2}	...	y_{1jch}	...	y_{1jcr}	y_{1jc}
	\sum		y_{1j1}	y_{1j2}	...	y_{1jh}	...	y_{1jr}	$y_{1j\cdot}$
	:	:	:	:	:	:	:	:	:
	b_b	c_1	y_{1b11}	y_{1b12}	...	y_{1b1h}	...	y_{1b1r}	y_{1b1}
		c_2	y_{1b21}	y_{1b22}	...	y_{1b2h}	...	y_{1b2r}	y_{1b2}
		:	:	:	:	:	:	:	:
		c_k	y_{1bk1}	y_{1bk2}	...	y_{1bkh}	...	y_{1bkr}	y_{1bk}
		c_c	y_{1bc1}	y_{1bc2}	...	y_{1bch}	...	y_{1bcr}	y_{1bc}
	\sum		y_{1b1}	y_{1b2}	...	y_{1b-h}	...	y_{1b-r}	$y_{1b\cdot}$
\sum			$y_{1\cdot1}$	$y_{1\cdot2}$...	$y_{1\cdot h}$...	$y_{1\cdot r}$	$y_{1\cdot\cdot}$
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
a_i	b_1	c_1	y_{i111}	y_{i112}	...	y_{i11h}	...	y_{i11r}	y_{i11}
		c_2	y_{i121}	y_{i122}	...	y_{i12h}	...	y_{i12r}	y_{i12}
		:	:	:	:	:	:	:	:
		c_k	y_{i1k1}	y_{i1k2}	...	y_{i1kh}	...	y_{i1kr}	y_{i1k}
		c_c	y_{i1c1}	y_{i1c2}	...	y_{i1ch}	...	y_{i1cr}	y_{i1c}
	\sum		$y_{i1\cdot1}$	$y_{i1\cdot2}$...	$y_{i1\cdot h}$...	$y_{i1\cdot r}$	$y_{i1\cdot\cdot}$
	:	:	:	:	:	:	:	:	
	b_j	c_1	y_{ij11}	y_{ij12}	...	y_{ij1h}	...	y_{ij1r}	y_{ij1}
c_2		y_{ij21}	y_{ij22}	...	y_{ij2h}	...	y_{ij2r}	y_{ij2}	

		:	:	:	:	:	:	:	
		c_k	Y_{ijk1}	Y_{ijk2}	...	Y_{ijkh}	...	$Y_{ijk r}$	Y_{ijk} .
		:	:	:	:	:	:	:	
		c_c	Y_{ijc1}	Y_{ijc2}	...	Y_{ijch}	...	Y_{ijcr}	Y_{ijc} .
	\sum		Y_{ij-1}	Y_{ij-2}	...	Y_{ij-h}	...	Y_{ij-r}	Y_{ij-} .
	:	:	:	:	:	:	:	:	
	b_b	c_1	Y_{ib11}	Y_{ib12}	...	Y_{ib1h}	...	Y_{ib1r}	Y_{ib1} .
		c_2	Y_{ib21}	Y_{ib22}	...	Y_{ib2h}	...	Y_{ib2r}	Y_{ib2} .
		:	:	:	:	:	:	:	
		c_k	Y_{ibk1}	Y_{ibk2}	...	Y_{ibkh}	...	Y_{ibkr}	Y_{ibk} .
		:	:	:	:	:	:	:	
		c_c	Y_{ibc1}	Y_{ibc2}	...	Y_{ibch}	...	Y_{ibcr}	Y_{ibc} .
	\sum		Y_{ib-1}	Y_{ib-2}	...	Y_{ib-h}	...	Y_{ib-r}	Y_{ib-} .
\sum			Y_{i-1}	Y_{i-2}	...	Y_{i-h}	...	Y_{i-r}	Y_{i-} .
:	:	:	:	:	:	:	:	:	
a_a	b_1	c_1	Y_{a111}	Y_{a112}	...	Y_{a11h}	...	Y_{a11r}	Y_{a11} .
		c_2	Y_{a121}	Y_{a122}	...	Y_{a12h}	...	Y_{a12r}	Y_{a12} .
		:	:	:	:	:	:	:	
		c_k	Y_{a1k1}	Y_{a1k2}	...	Y_{a1kh}	...	Y_{a1kr}	Y_{a1k} .
		:	:	:	:	:	:	:	
		c_c	Y_{a1c1}	Y_{a1c2}	...	Y_{a1ch}	...	Y_{a1cr}	Y_{a1c} .

	Σ		$Y_{a1\cdot1}$	$Y_{a1\cdot2}$...	$Y_{a1\cdot h}$...	$Y_{a1\cdot r}$	$Y_{a1\cdot\cdot}$
	:	:	:	:	:	:	:	:	:
	b_j	c_1	Y_{aj11}	Y_{aj12}	...	Y_{aj1h}	...	Y_{aj1r}	$Y_{aj1\cdot}$
		c_2	Y_{aj21}	Y_{aj22}	...	Y_{aj2h}	...	Y_{aj2r}	$Y_{aj2\cdot}$
		:	:	:	:	:	:	:	:
		c_k	Y_{ajk1}	Y_{ajk2}	...	Y_{ajkh}	...	Y_{ajkr}	$Y_{ajk\cdot}$
		:	:	:	:	:	:	:	:
	c_c	Y_{ajc1}	Y_{ajc2}	...	Y_{ajch}	...	Y_{ajcr}	$Y_{ajc\cdot}$	
	Σ		$Y_{aj\cdot1}$	$Y_{aj\cdot2}$...	$Y_{aj\cdot h}$...	$Y_{aj\cdot r}$	$Y_{aj\cdot\cdot}$
	:	:	:	:	:	:	:	:	:
	b_b	c_1	Y_{ab11}	Y_{ab12}	...	Y_{ab1h}	...	Y_{ab1r}	$Y_{ab1\cdot}$
		c_2	Y_{ab21}	Y_{ab22}	...	Y_{ab2h}	...	Y_{ab2r}	$Y_{ab2\cdot}$
		:	:	:	:	:	:	:	:
		c_k	Y_{ibk1}	Y_{abk2}	...	Y_{abkh}	...	Y_{abkr}	$Y_{abk\cdot}$
		:	:	:	:	:	:	:	:
	c_c	Y_{abc1}	Y_{abc2}	...	Y_{abch}	...	Y_{abcr}	$Y_{abc\cdot}$	
	Σ		$Y_{ab\cdot1}$	$Y_{ab\cdot2}$...	$Y_{ab\cdot h}$...	$Y_{ab\cdot r}$	$Y_{ab\cdot\cdot}$
Σ			$Y_{a\cdot1}$	$Y_{a\cdot2}$...	$Y_{a\cdot h}$...	$Y_{a\cdot r}$	$Y_{a\cdot\cdot}$
General Total									Y_{\dots}

3.2 - النموذج الرياضي [3]:

أن الأتمودج الخطي لتصميم تجربة القطعة المنشقة المنشقة الذي يصف المشاهدة (y_{ijkh})

يكون كما يلي:

$$Y_{hijk} = \mu + \rho_h + \alpha_i + \delta_{hi} + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \lambda_{hij} + \gamma_k + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \varepsilon_{hijk} \dots (1)$$

$$h = 1, \dots, r ; i = 1, \dots, a ; j = 1, \dots, b ; k = 1, \dots, c$$

حيث أن :

Y_{ijkh} : تمثل الأستجابة (القياس) للمشاهدة $ijkh$.

μ : تأثير المتوسط العام .

ρ_h : تمثل تأثير المكرر h^{th} وأن هذه التأثيرات تتسم بأنها مستقلة ولها توزيع طبيعي
 $\rho_h \sim NID(0, \sigma_\rho^2)$.

α_i : تمثل تأثير المعالجة (المستوى) i للعامل A الموزعة مستوياته على القطع الرئيسية.

δ_{ih} : تمثل تأثير الخطأ التجريبي الخاص بالقطع الرئيسية المحتوية على المستوى i من العامل A ضمن المكرر h وأن هذه الأخطاء التجريبية تتسم بأنها مستقلة ولها توزيع طبيعي
 $\delta_{ih} \sim NID(0, \sigma_\delta^2)$

β_j : تمثل تأثير المعالجة (المستوى) j للعامل B الموزعة مستوياته على القطع الفرعية (المنشقة).

$\alpha\beta_{ij}$: تمثل تأثير التفاعل للمستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B .

λ_{ijh} : تمثل تأثير الخطأ التجريبي الخاص بالقطع الفرعية (المنشقة) وتتسم هذه الأخطاء بأنها مستقلة ولها توزيع طبيعي
 $\lambda_{ijh} \sim NID(0, \sigma_\lambda^2)$

γ_k : تمثل تأثير المعالجة (المستوى) k للعامل C الموزعة مستوياته على القطع الفرعية الفرعية (المنشقة المنشقة).

$\alpha\gamma_{ik}$: تمثل تأثير التفاعل للمستوى i للعامل A والمستوى k للعامل C .

$\beta\gamma_{jk}$: تمثل تأثير التفاعل للمستوى j للعامل B والمستوى k للعامل C .

$\alpha\beta\gamma_{ijk}$: تمثل تأثير التفاعل للمستوى i للعامل A والمستوى j للعامل B والمستوى k للعامل C .

ε_{hijk} : تمثل تأثير الخطأ التجريبي الخاص بالقطع الفرعية الفرعية (المنشقة المنشقة)

وتتسم هذه الأخطاء بأنها مستقلة $\varepsilon_{ijkh} \sim \text{NID}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ وأن التأثيرات العشوائية $\rho_h, \delta_{ih}, \lambda_{ijh}, \varepsilon_{ijkh}$ تكون مستقلة.

3.3 - التحليل الإحصائي

3.3.1 - تحليل التباين (ANOVA) [3,4]:

أن درجات الحرية في جدول تحليل التباين لتصميم تجربة القطعة المنشقة المنشقة تكون كما يلي:

S.O.V	d.f
Total	rabc
Correction for the mean	1
Replicate = R	r - 1
Factor A	a - 1
Error A	(r - 1)(a - 1)
Factor B	b - 1
A × B	(a - 1)(b - 1)
Error B	a(r - 1)(b - 1)
Factor C	c - 1
A × C	(a - 1)(c - 1)
B × C	(b - 1)(c - 1)
A × B × C	(a - 1)(b - 1)(c - 1)
Error C	ab(r - 1)(c - 1)

أما مجاميع المربعات للمركبات فقد تم اقتراح طريقة جديدة في حسابها وذلك بالاعتماد على صيغ كتابة درجات الحرية لكل مصدر من مصادر التباين، وكما موضحة بالصيغ التالية^(*):

1) R=Replicate

$$d.f(R) = r - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(R) = R - c.f$$

$$= \frac{1}{abc} \sum_h y_{..h}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(2)$$

2) Factor (A)

$$d.f(A) = a - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(A) = A - c.f$$

$$= \frac{1}{bcr} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(3)$$

3) Error (A)

$$d.f(E_a) = (a - 1)(r - 1)$$

$$= ar - a - r + 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(E_a) = AR - A - R + c.f$$

$$= \frac{1}{bc} \sum_{i,h} y_{i..h}^2 - \frac{1}{bcr} \sum_i y_{i..}^2 - \frac{1}{abc} \sum_h y_{..h}^2 + \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(4)$$

(*) سيتم أن شاء الله بحث بعض التصاميم التي يمكن توظيف هذه الطريقة فيها.

4) Main Plot

$$d.f(\text{Main plot}) = ar - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(\text{Main plot}) = AR - c.f$$

$$= \frac{1}{bc} \sum_{i,h} y_{i,h}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abcr} \dots(5)$$

5) Factor (B)

$$d.f(B) = b - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(B) = B - c.f$$

$$= \frac{1}{acr} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abcr} \dots(6)$$

6) AB

$$d.f(AB) = (a - 1)(b - 1)$$

$$= ab - a - b + 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(AB) = AB - A - B + c.f$$

$$= \frac{1}{cr} \sum_{i,j} y_{ij.}^2 - \frac{1}{bcr} \sum_i y_{i\dots}^2 - \frac{1}{acr} \sum_j y_{.j.}^2 + \frac{y_{\dots}^2}{abcr} \dots(7)$$

7) **Error (B)**

$$\begin{aligned}
 d.f(E_b) &= a(b-1)(r-1) \\
 &= a(br - b - r + 1) \\
 &= abr - ab - ar + a \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

$$S.S(E_b) = ABR - AB - AR + A$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{i,j,h} y_{ij,h}^2 - \frac{1}{cr} \sum_{i,j} y_{ij..}^2 - \frac{1}{bc} \sum_{i,h} y_{i..h}^2 + \frac{1}{bcr} \sum_i y_{i...}^2 \quad \dots(8)$$

8) **Factor (C)**

$$\begin{aligned}
 d.f(C) &= c - 1 \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

$$S.S(C) = C - c.f$$

$$= \frac{1}{abr} \sum_k y_{..k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(9)$$

9) **AC**

$$\begin{aligned}
 d.f(AC) &= (a-1)(c-1) \\
 &= ac - a - c + 1 \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

$$S.S(AC) = AC - A - C + c.f$$

$$= \frac{1}{br} \sum_{i,k} y_{i.k.}^2 - \frac{1}{bcr} \sum_i y_{i...}^2 - \frac{1}{abr} \sum_k y_{..k.}^2 + \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(10)$$

10) BC

$$d.f(BC) = (b - 1)(c - 1)$$

$$= bc - b - c + 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(BC) = BC - B - C + c.f$$

$$= \frac{1}{ar} \sum_{j,k} y_{.jk}^2 - \frac{1}{acr} \sum_j y_{.j.}^2 - \frac{1}{abr} \sum_k y_{.k.}^2 + \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(11)$$

11) ABC

$$d.f(ABC) = (a - 1)(b - 1)(c - 1)$$

$$= (ab - a - b + 1)(c - 1)$$

$$= abc - ab - ac + a - bc + b + c - 1$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$S.S(ABC) = ABC - AB - AC + A - BC + B + C - c.f$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{i,j,k} y_{ijk}^2 - \frac{1}{cr} \sum_{i,j} y_{ij.}^2 - \frac{1}{br} \sum_{i,k} y_{i.k.}^2 + \frac{1}{bcr} \sum_i y_{i...}^2 - \frac{1}{ar} \sum_{j,k} y_{.jk.}^2 +$$

$$\frac{1}{acr} \sum_j y_{.j.}^2 + \frac{1}{abr} \sum_k y_{.k.}^2 - \frac{y_{....}^2}{abcr} \quad \dots(12)$$

12) Error (C)

$$\begin{aligned}
 d.f(E_c) &= ab(c-1)(r-1) \\
 &= ab(cr - c - r + 1) \\
 &= abcr - abc - abr + ab \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

$$S.S(E_c) = ABCR - ABC - ABR + AB$$

$$= \sum_{i,j,k,h} y_{ijkh}^2 - \frac{1}{r} \sum_{i,j,k} y_{ijk.}^2 - \frac{1}{c} \sum_{i,j,h} y_{ij.h}^2 + \frac{1}{cr} \sum_{i,j} y_{ij..}^2 \quad \dots(13)$$

13) Total

$$\begin{aligned}
 d.f(\text{Total}) &= abcr - 1 \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow
 \end{aligned}$$

$$S.S(\text{Total}) = ABCR - c.f$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_h y_{ijkh}^2 - \frac{y_{\dots}^2}{abcr} \quad \dots(14)$$

وعليه فإن مجاميع المربعات لمركبات النموذج (1) والموضحة في أعلاه والتي يتم وضعها في جدول تحليل التباين وكما هو موضح في الجدول (2) التالي:

جدول رقم (2)
مجاميع المربعات ومتوسطات مجاميع المربعات للمركبات في جدول تحليل التباين
(ANOVA)

S.O.V	d.f	S.S.	M.S.
Replicate	$r - 1$	S.S.(R)	$M.S.(R) = S.S.(R) / d.f$
A	$a - 1$	S.S.(A)	$M.S.(A) = S.S.(A) / d.f$
Error A	$(a - 1)(r - 1)$	S.S.(E _a)	$S_A^2 = S.S.(E_a) / d.f$
Main Plots	$ar - 1$	S.S.(Main plots)	
Sup - plots			
B	$b - 1$	S.S.(B)	$M.S.(B) = S.S.(B) / d.f$
AB	$(a - 1)(b - 1)$	S.S.(AB)	$M.S.(AB) = S.S.(AB) / d.f$
Error B	$a(b - 1)(r - 1)$	S.S.(E _b)	$S_B^2 = S.S.(E_b) / d.f$
Sup-sup-plots			
C	$c - 1$	S.S.(C)	$M.S.(C) = S.S.(C) / d.f$
AC	$(a - 1)(c - 1)$	S.S.(AC)	$M.S.(AC) = S.S.(AC) / d.f$
BC	$(b - 1)(c - 1)$	S.S.(BC)	$M.S.(BC) = S.S.(BC) / d.f$
ABC	$(a - 1)(b - 1)(c - 1)$	S.S.(ABC)	$M.S.(ABC) = S.S.(ABC) / d.f$
Error C	$ab(c - 1)(r - 1)$	S.S.(E _c)	$S_C^2 = S.S.(E_c) / d.f$
Total	$abc - 1$	S.S.Total	

أما القيمة المتوقعة لمتوسط المربعات $E(M.S)$ في جدول تحليل التباين في حالة كون التأثيرات ثابتة Fixed أو متغيرة Random تكون كما يلي^[3] :

جدول رقم (3)

قيمة E(M.S) في حالة كون التأثيرات ثابتة Fixed أو متغيرة Random

S.O.V	Fixed effect	Random effect
Replicate	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + bc\sigma_{\delta}^2 + abc\sigma_{\rho}^2$	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + bc\sigma_{\delta}^2 + abc\sigma_{\rho}^2$
A	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + bc\sigma_{\delta}^2 + f(\alpha)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + bc\sigma_{\delta}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + rb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + rc\sigma_{\alpha\beta}^2 + rbc\sigma_{\alpha}^2$
Error A	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + bc\sigma_{\delta}^2$	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + bc\sigma_{\delta}^2$
B	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + f(\beta)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + ar\sigma_{\beta\gamma}^2 + rc\sigma_{\alpha\beta}^2 + rac\sigma_{\beta}^2$
AB	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + f(\alpha\beta)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + rc\sigma_{\alpha\beta}^2$
Error B	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2$	$\sigma_{\epsilon}^2 + c\sigma_{\lambda}^2$
C	$\sigma_{\epsilon}^2 + f(\gamma)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + ar\sigma_{\beta\gamma}^2 + rb\sigma_{\alpha\gamma}^2 + rab\sigma_{\gamma}^2$
AC	$\sigma_{\epsilon}^2 + f(\alpha\gamma)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + rb\sigma_{\alpha\gamma}^2$
BC	$\sigma_{\epsilon}^2 + f(\beta\gamma)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2 + ar\sigma_{\beta\gamma}^2$
ABC	$\sigma_{\epsilon}^2 + f(\alpha\beta\gamma)$	$\sigma_{\epsilon}^2 + r\sigma_{\alpha\beta\gamma}^2$
Error C	σ_{ϵ}^2	σ_{ϵ}^2

وأن :

$$\left. \begin{aligned} f(\alpha_i) &= bcr \sum_i \frac{\alpha_i^2}{a-1} \quad ; \quad f(\gamma_k) = abr \sum_k \frac{\gamma_k^2}{c-1} \\ f(\beta_j) &= acr \sum_j \frac{\beta_j^2}{b-1} \quad ; \quad f(\alpha\gamma_{ik}) = br \sum_i \sum_k \frac{(\alpha\gamma_{ik})^2}{(a-1)(c-1)} \\ f(\alpha\beta_{ij}) &= cr \sum_i \sum_j \frac{(\alpha\beta_{ij})^2}{(a-1)(b-1)} \quad ; \quad f(\beta\gamma_{jk}) = ar \sum_j \sum_k \frac{(\beta\gamma_{jk})^2}{(b-1)(c-1)} \\ f(\alpha\beta\gamma_{ijk}) &= r \sum_i \sum_j \sum_k \frac{(\alpha\beta\gamma_{ijk})^2}{(a-1)(b-1)(c-1)} \end{aligned} \right\} \dots(15)$$

إن تجربة القطعة المنشقة المنشقة تتضمن تبين ثلاثة اخطاء أو ثلاثة متوسطات لمربعات الخطأ الأول خاص بالقطع الرئيسية ويرمز له بالرمز $S_A^2 = M.S.(E_a)$ ويستخدم لأختبار معنوية الفرق بين مستويات العامل A ، أما الخطأ الثاني فهو خاص بالقطع الفرعية (المنشقة) ويرمز له بالرمز $S_B^2 = M.S.(E_b)$ ويستخدم لأختبار معنوية الفرق بين مستويات العامل B ومعنوية تأثير التفاعل AB، أما الخطأ الثالث فهو خاص بالقطع الفرعية الفرعية (المنشقة المنشقة) ويرمز له بالرمز $S_C^2 = M.S.(E_c)$ ويستخدم لأختبار معنوية الفرق بين مستويات العامل C ومعنوية تأثير التفاعل AC ومعنوية تأثير التفاعل BC ومعنوية تأثير التفاعل الثلاثي ABC، وللأختبارات السابقة يتم استخدام اختبار F .

3.3.2 - الأخطاء المعيارية [3]:

أما الأخطاء المعيارية التي تدخل في أساليب المقارنات المتعددة، بعد ما تظهر نتيجة الأختبار معنوية أو رفض فرضيات العدم الموضوعية، يكون كما يلي:
تحت افتراض حالة ثبوت العوامل (fixed effects) A , B , C ، فإن الأخطاء المعيارية للفرق بين متوسطين أو عاملين يكون كما يلي :
عندما :

$$i \neq i' \quad , \quad j \neq j' \quad , \quad k \neq k'$$

وأن :

$$\text{Error A} = E_a \quad , \quad \text{Error B} = E_b \quad , \quad \text{Error C} = E_c$$

وعليه فإن الخطأ المعياري للفرق المقدر لمقارنة متوسطي $(\bar{y}_{i\dots} - \bar{y}_{i'\dots})$ للعامل A يكون كما يلي:

$$SE(\bar{y}_{i\dots} - \bar{y}_{i'\dots}) = \sqrt{\frac{2E_a}{bcr}} \quad \dots(16)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{.j'..})$ للعامل B يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{.j..} - \bar{y}_{.j'..}) = \sqrt{\frac{2E_b}{acr}} \quad \dots(17)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{.k.} - \bar{y}_{.k'.})$ للعامل C يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{.k.} - \bar{y}_{.k'.}) = \sqrt{\frac{2E_c}{abr}} \quad \dots(18)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i'j'..})$ للعامل B لنفس المستوى للعامل A يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i'j'..}) = \sqrt{\frac{2E_b}{cr}} \quad \dots(19)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i'j'..})$ للعامل A لنفس المستوى للعامل B يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i'j'..}) = \sqrt{\frac{2[E_b(b-1) + E_a]}{bcr}} \quad \dots(20)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i.k'.})$ للعامل C لنفس المستوى للعامل A يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i.k'.}) = \sqrt{\frac{2E_c}{rb}} \quad \dots(21)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i.k'.})$ للعامل A لنفس المستوى للعامل C يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i.k'.}) = \sqrt{\frac{2[E_c(c-1) + E_a]}{bcr}} \quad \dots(22)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.jk'.})$ للعامل C لنفس المستوى للعامل B يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.jk'.}) = \sqrt{\frac{2E_c}{ar}} \quad \dots(23)$$

ولمقارنة المتوسطين $(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j'k'.})$ للعامل B لنفس المستوى للعامل C يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j'k'.}) = \sqrt{\frac{2[E_c(c-1) + E_b]}{acr}} \quad \dots(24)$$

ولمقارنة مستوي العامل A $(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{i'jk})$ لنفس المستوى العامل B ولنفس المستوى العامل C يكون كما يلي :

$$SE(\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{i'jk}) = \sqrt{\frac{2[E_a(b-1) + E_b + b(c-1)E_a]}{rbc}} \quad \dots(25)$$

أما تبين الفروق بين متوسطين للمتوسطات المختلفة $\bar{y}_{ij..}$, $\bar{y}_{i.k.}$, $\bar{y}_{.jk.}$ عندما $i \neq i', j \neq j', k \neq k'$ تكون كما يلي :

$$\text{Var}(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i'j'..}) = \frac{2(c\sigma_\delta^2 + c\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{rc} \quad \dots(26)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{i'j.}) = \frac{2(c\sigma_\delta^2 + c\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{rc} \quad \dots(27)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{ij..} - \bar{y}_{ij'..}) = \frac{2(c\sigma_\delta^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{rc} \quad \dots(28)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i'.k'.}) = \frac{2(b\sigma_\delta^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{rb} \quad \dots(29)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i'.k.}) = \frac{2(b\sigma_\delta^2 + \sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{rb} \quad \dots(30)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{i.k.} - \bar{y}_{i'.k'.}) = \frac{2(\sigma_\varepsilon^2)}{rb} \quad \dots(31)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j'k'.}) = \frac{2(\sigma_\lambda^2 \sigma_\varepsilon^2)}{ra} \quad \dots(32)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.j'k.}) = \frac{2(\sigma_\lambda^2 + \sigma_\varepsilon^2)}{ra} \quad \dots(33)$$

$$\text{Var}(\bar{y}_{.jk.} - \bar{y}_{.jk'.}) = \frac{2(\sigma_\varepsilon^2)}{ra} \quad \dots(34)$$

3.3.3- تقدير القيمة المفقودة^(*):

في حالة فقدان احدى القطع الفرعية الفرعية Y_{ijkh} فبالإمكان تقديرها عن طريق الصيغة الرياضية الآتية:

$$\hat{y}_{ijkh} = \frac{c y_{ijk.} + r y_{ij.k} - y_{ij.}}{(c-1)(r-1)} \dots (35)$$

4- التطبيق

أقيمت في حقل التجارب التابع لقسم المحاصيل الحقلية في كلية الزراعة- جامعة بغداد، تجربة لدراسة تأثير سماد النايتروجيني والمغنيسيوم والزنك على بعض المحاصيل الزراعية، وقد وزعت مستويات العامل N الذي يمثل النايتروجين على القطع الرئيسة، بينما وزعت مستويات العامل Mg الذي يمثل المغنيسيوم على القطع الفرعية (المنشقة)، أما مستويات العامل Zn الذي يمثل الزنك على القطع الفرعية (المنشقة المنشقة)، وكانت بيانات التجربة كما في الجدول (3) الآتي:

جدول رقم (4)

بيانات تأثير سماد النايتروجين والمغنيسيوم والزنك على بعض المحاصيل الزراعية

Treatments			Replicates			Total	
			1	2	3		
N ₀	Mg ₀	Zn ₀	3.168	3.171	3.147	9.486	
		Zn ₁	3.471	3.478	3.458	10.407	
		Zn ₂	3.768	3.778	3.761	11.307	
	Σ			10.407	10.427	10.366	31.200
	Mg ₁	Zn ₀	3.341	3.344	3.314	9.999	
		Zn ₁	3.610	3.617	3.593	10.820	
		Zn ₂	3.839	3.854	3.829	11.522	
	Σ			10.790	10.815	10.736	32.341
	Mg ₂	Zn ₀	4.603	3.613	3.593	11.809	
		Zn ₁	3.917	3.930	3.904	11.751	
		Zn ₂	4.223	4.226	4.238	12.687	

(*) تم اشتقاق الصيغة (35) من قبل الباحثين.

	Σ		12.743	11.769	11.735	36.247	
	Σ		33.940	33.011	32.837	99.788	
N ₁	Mg ₀	Zn ₀	4.272	4.271	4.272	12.815	
		Zn ₁	4.416	4.415	4.416	13.247	
		Zn ₂	4.511	4.510	4.512	13.533	
		Σ		13.199	13.196	13.200	39.595
	Mg ₁	Zn ₀	4.418	4.417	4.419	13.254	
		Zn ₁	4.673	4.672	4.674	14.019	
		Zn ₂	4.654	4.653	4.456	13.763	
		Σ		13.745	13.742	13.549	41.036
	Mg ₂	Zn ₀	4.592	4.591	4.593	13.776	
		Zn ₁	4.748	4.748	4.749	14.245	
		Zn ₂	4.736	4.736	4.737	14.209	
		Σ		14.076	14.075	14.079	42.230
	Σ		41.020	41.013	40.828	122.861	
N ₂	Mg ₀	Zn ₀	4.457	4.456	4.458	13.371	
		Zn ₁	4.614	4.614	4.614	13.842	
		Zn ₂	4.679	4.678	4.679	14.036	
		Σ		18.750	13.748	13.751	41.249
	Mg ₁	Zn ₀	4.580	4.580	4.581	13.741	
		Zn ₁	4.711	4.711	4.712	14.134	
		Zn ₂	4.810	4.810	4.811	14.431	
		Σ		14.101	14.101	14.104	42.306
	Mg ₂	Zn ₀	4.727	4.726	4.728	14.181	
		Zn ₁	4.778	4.777	4.778	14.333	
		Zn ₂	4.801	4.801	4.802	14.404	
		Σ		14.306	14.304	14.308	42.918
	Σ		42.157	42.153	42.163	126.473	
General Total						349.122	

4.1- تحليل التباين (ANOVA) :

بتطبيق الصيغ الواردة في الجدول رقم (2) تم حساب مجاميع المربعات لمصادر التباين وكما في الجدول رقم (5) التالي:

$$C.F = \frac{Y_{\dots}^2}{abcr} = \frac{(349.122)^2}{81} = 1504.767542$$

جدول رقم (5)

S.O.V	d.f	S.S.	M.S.	F	F _{α=0.05}
Replicate	2	0.03292497	0.01646249		
N	2	15.52468023	7.76234012	648.7435736*	6.94
Error (N)	4	0.04786077	0.01196519		
Main Plots	8	15.60546623			
<u>Sup</u> - <u>plots</u>					
Mg	2	1.64580800	0.82290400	66.81270288*	3.89
N × Mg	4	0.45617800	0.11404450	9.25942916*	3.26
Error (Mg)	1	0.14779900	0.01231658		
<u>Sup-sup-</u> <u>plots</u>					
Zn	2	1.04057251	0.52028626	1.114986735	3.32
N × Zn	4	0.31024033	0.07756008	0.664852945	2.69
Mg × Zn	4	0.10712100	0.02678025	0.229563037	2.69
N × Mg × Zn	8	0.06560700	0.00583288	0.140597475	2.27
Error Zn	36	0.46663000	0.01296194		
Total	80	19.8454221			

وكما هو واضح من نتائج الجدول أعلاه أن الفروق أو الأختلافات للعامل N والعامل Mg والتفاعل N × Mg ، قد ظهرت معنوية عند مستوى 0.05 .
ملاحظة: أن الأخطاء المعيارية التي ذكرت في الجانب النظري ولم يتم استخدامها لكون أن تأثير العامل الثالث وتفاعله قد ظهر غير معنوي.

4.2- تقدير القيمة المفقودة :

لو فرضنا انه تم فقدان المشاهدة الواقعة ضمن المكرر الأول وتحت تأثير المستوى الأول للمعالجة N و المستوى الثاني للمعالجة Mg والمستوى الأول للمعالجة Zn، وبالأعتماد على الصيغة (35) المقترحة في الفقرة 3.3.2، فإن القيمة التقديرية لها تكون كما يلي :

$$\hat{y}_{1211} = \frac{3(11.809) + 3(12.743) - 36.247}{4}$$

$$= 9.35225$$

5- المصادر

- 1- المشهداني، محمود حسن- المشهداني، كمال عنوان (2002) "تصميم وتحليل التجارب" الدار الجامعية للطباعة، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي.
- 2- شريم، ماجد هبة الله علي (2001) " التحليل الأحصائي لتجارب القطع المنشقة المتزنة وغير المتزنة " رسالة مقدمة الى كلية الإدارة والإقتصاد ، جامعة بغداد.
- 3- Federer, Walter T. & King, Freedom (2007) " Variations on Split Plot and Split Block Experiment Designs " John wiley & Sons , Inc. New York.
- 4- Kempthorne, D. (1952) " The Design and Analysis of experiments " John wiley & Sons , Inc. New York.