المحور الاحصائي

التقدير المتسق لمعاملات أنموذج الانحدار الخطي البسيط المتأثر بخطأ القياس للمتغير التوضيحي مع تطبيق في المجال الصحي*

ماهر محسن سلمان — *د. دجلة ابراهيم مهدي*

كلية الادارة و الاقتصاد / قسم الاحصاء

<u>المستخلص</u>

يهتم هذا البحث بعرض ومقارنة طرائق ديلة لطريقة المربعات الصغرى في تقدير معلمات الانحدار الخطي البسيط ، عندما تكون متحيزة وغير متسقة عند وجود أخطاء قياس في المتغير التوضيحي . و استخدام *MSe* معياراً للمقارنة بين الطرائق وبأحجام عينات مختلفة .

<u>الكلمات الرئيسية</u> : الانحدار الخطي البسيط – تأثير أخطاء القياس – طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية -- طريقة نسبة المعولية – طريقة المتغير المساعد – المعلومات الاضافية .

<u>Abstract:</u>

This project deal with Methods when the Explanatory variable have measurement error which ended with Biased and inconsistent estimation .

<u>Key words</u> : Simple Linear Regression – Effect of measurement error – Least square estimator method – Reliability ratio method – Instrumental Variable method – extra information .

(١,١) <u>المقدمة</u>

تظهر مشكلة في الانحدار الخطي البسيط وخاصة عند وجود اخطاء في قياس المتغير التوضيحي او عندما يحتوي على اخطاء قياس ، والمشكلة هي عند وجود اخطاء كهذه ستكون التقديرات متحيزة وغير متسقة.

و هذه المشكلة قد تم دراستها على نطاق واسع ، حيث أن صيغة أنموذج الانحدار الخطي البسيط :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i \quad , i = 1, 2, \ldots\ldots, n \qquad \ldots\ldots (1.1)$$

إذ ان :

e_i : يمثل الخطأ العشوائي لمعادلة الانحدار ويتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي صفر وتباين $\sigma^2{}_e$.

* بحث مستل من رسالة ماجستير .

Y_i: يمثل المتغير المعتمد .

X_i: يمثل المتغير التوضيحي .

α : تمثل معلمة الحد الثابت لنموذج الانحدار الخطي .

β : تمثل معلمة الميل لنموذج الانحدار .

ان المتغير التوضيحي X_i الذي يحتوي على اخطاء .

وكبديل للمتغير التوضيحي اعلاه نأخذ المتغير W_i حيث انه يمثل المتغير التوضيحي المشاهد الذي يحتوي أخطاء ويُمثل بالعلاقة التالية :

$$W_i = X_i + u_i \qquad , i = 1, 2, \dots, n \qquad \dots\dots\dots\dots (1.2)$$

u_i: يمثل أخطاء القياس Measurement Error الموجودة في المتغير التوضيحي
ويُفترض ان أخطاء القياس ME غير مرتبطة مع خطأ معادلة الانحدار (e) ولا مرتبطة مع المتغير التوضيحي (X) . وكنتيجة لوجود هذه الأخطاء فأن مُقدر الميل لطريقة المربعات الصغرى (β_{ols}) سيكون غير متسق .

وهناك طرائق تعالج هذه المشكلة ، اي تُقدر معلمة الميل في حالة وجود أخطاء قياس ، منها :

- الطريقة الاولى تسمى بطريقة نسبة المعولية Reliability Ratio Method .
- والطريقة الثانية تسمى بطريقة المتغير المساعد Instrumental Variable method.

كما سنستخدم المحاكاة في تطبيق الطريقتين اعلاه وبأحجام عينات مختلفة .

(٢,١) تأثير أخطاء القياس Effect of Measurement Error

سنقوم بدراسة تأثير أخطاء القياس ME في حالتين :

الاولى عندما يكون المتغير المعتمد فقط ملوث بأخطاء القياس .

والثانية عندما يكون المتغير التوضيحي ملوث بأخطاء القياس ومدى تأثير هذه الأخطاء على نموذج الانحدار وتأثيرها على مُقدرات المربعات الصغرى .

- أخطاء القياس في المتغير المعتمد

ان أخطاء القياس اذا كانت موجودة في المتغير المعتمد فأن مُقدرات معاملات الانحدار سوف لا تفقد خاصية الاتساق ولكن التباين فيها سيزداد.

$$Y_i^* = \alpha + \beta X_i + e_i \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2.1)$$

$$Y_i = Y_i^* + v_i \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (2.2)$$

إذ ان

Y_i^*: يمثل المتغير المعتمد (لا يحتوي على اخطاء قياس).

Y_i: يمثل المغير المعتمد المشاهد (يحتوي على اخطاء قياس) .

X_i: يمثل المتغير التوضيحي .

e_i: يمثل الخطأ العشوائي (خطأ معادلة الانحدار).

v_i: يمثل أخطاء القياس ، كما هو الحال في u_i .

$\beta\&\alpha$: تمثلان معالم نموذج الانحدار الخطي .

وبالتعويض (2.1) في (2.2) نحصل على :

$$Y_i = {Y_i}^* + v_i$$

$$Y_i = (\alpha + \beta X_i + e_i) + v_i$$

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + m_i \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

$$, m_i = e_i + v_i$$

$v_i \sim N(0, {\sigma_v}^2)$, $e_i \sim N(0, {\sigma_e}^2)$, $v_i\&e_i$: مستقلان

$$Var(m_i) = Var(e_i + v_i) = {\sigma_e}^2 + {\sigma_v}^2$$

وبالنتيجة فأن تباين مُقدر الميل سيكون :

$$Var(\hat{\beta}_{ols}) = \frac{Var(m_i)}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{Var(e_i + v_i)}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2} = \frac{{\sigma_e}^2 + {\sigma_v}^2}{\sum_i^n (X_i - \bar{X})^2}$$

نلاحظ ان مُقدر الميل لم يتأثر بأخطاء القياس في حالة وجودها في المتغير المعتمد حيث بقى المُقدر($\hat{\beta}_{ols}$)غير متحيز ومتسق لان الخطأ العشوائي لنموذج الانحدار اصبح يتكون من مركبتين للخطأ وهي خطأ معادلة الانحدار(e) وخطأ القياس (v) وكليهما يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفر وتباين σ^2 ، لكن تباين المُقدر أصبح اكبر بالمقارنة مع المُقدر الذي يفترض عدم وجود أخطاء قياس في نموذج الانحدار الخطي .

- <u>أخطاء القياس في المتغير التوضيحي</u>

اما اذا كان المتغير التوضيحي قد تم قياسه مع امكانية وجود أخطاء في قياسهِ ، اي ان قيمه ملوثة بأخطاء القياس وبالتالي فأن هنالك تأثير لهذه الأخطاء وسنبين تأثيرها كما يلي :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i \qquad \ldots \qquad (1.1)$$
$$W_i = X_i + u_i \qquad \ldots. \qquad (2.4)$$

إذ ان :

X_i: يمثل المغير التوضيحي الذي يُفترض انه خالٍ من أخطاء القياس .

W_i: يمثل المتغير التوضيحي البديل (المتغير التوضيحي المشاهد الذي تحتوي اخطاء قياس).

e_i: يمثل الخطاء العشوائي (خطأ المعادلة).

Y_i: يمثل المتغير المعتمد .

u_i: يمثل أخطاء القياس .

$\beta\&\alpha$: معلمات نموذج الانحدار الخطي .

وبالتعويض (2.4) في (1.1) نحصل على :

$$Y_i = \alpha + \beta(W_i - u_i) + e_i$$
$$Y_i = \alpha + \beta W_i + e_i - \beta u_i$$
$$Y_i = \alpha + \beta W_i + e_i^* \qquad \ldots\ldots \quad (2.5)$$

Where :

$$e_i^* = e_i - \beta u_i$$

كما هو معلوم ان احدى الافتراضات الاساسية في نموذج الانحدار الخطي هي ان قيم (e_i) مستقلة عن أي متغير من المتغيرات التوضيحية اي ان :

$$Cov(e_i, X_i) = 0$$

وهذا الشرط غير متوفر في النماذج المتضمنة أخطاء قياس وسنبين ذلك كما يلي :-

$$Cov(e_i^*, W_i) = E\{e_i^* - E(e_i^*)\}\{W_i - E(W_i)\}$$
$$where: \; e_i^* = e_i - \beta u_i \; , \; W_i = X_i + u_i$$
$$Cov(e_i^*, W_i) = E(e_i - \beta u_i)u_i$$
$$Cov(e_i^*, W_i) = E(e_i u_i) - \beta E(u_i)^2 \quad , e_i\&u_i \; are\; Indep$$
$$Cov(e_i^*, W_i) = -\beta\sigma_u^2$$

وكنتيجة لهذه الحالة فأن مُقدر الميل $\hat{\beta}_{ols}$ سيكون غير متسقة .

(٣,١) <u>طرائق التقدير</u>

سنقوم بدراسة ثلاث طرائق لتقدير معاملات نموذج الانحدار الخطي البسيط . الطريقة الاولى طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (ols) ، والطريقة الثانية طريقة نسبة المعولية (Reliability Ratio) التي هي عبارة عن تصحيح لمُقدر المربعات الصغرى ، والطريقة الثالثة طريقة المتغير المساعد (Instrumental Variable) ، وسنوضح الطرائق كما يلي :

(٣,١,١) <u>طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية(OLS)</u>

تعتبر طريقة المربعات الصـــغرى الاعتيادية من الطرائق التي يُعتمد عليها في تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي وذلك لأنها تُعطي مُقدرات غير متحيزة و متسقة ولكنها تتطلب وجود عدة فروض من هذه الفروض ان يكون خطأ المعادلة (e) يتوزع توزيعا بوسط مساوٍ للصفر وتباين σ_e^2 .

وان يكون حد الخطأ (e) غير مرتبط مع اي متغير من المتغيرات التوضـــيحية اي يكون E(ei,Xi)=0 والفرض المهم ان تكون متغيرات النموذج غير ملوثة بأخطاء القياس وخاصـــة بالمتغيرات التوضـــيحية لأنها ســـتؤدي الى مُقدرات غير متســـقة ومتحيزة ولبيان كيفية التقدير بهذه الطريقة نأخذ نموذج الانحدار الخطي البسيط التالي :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i \quad \ldots..(1.1)$$

$$, i = 1, 2, \ldots\ldots.., n$$

إذ ان :

α : يمثل الحد الثابت للنموذج .

β: يمثل معلمة الميل للنموذج.

e_i: يمثل حد الخطأ العشوائي (خطأ المعادلة).

Y_i: يمثل المتغير المعتمد .

X_i: يمثل المتغير التوضيحي .

والصيغة التقديرية للنموذج النظري توضح بالشكل التالي :

$$\widehat{Y}_i = \widehat{\alpha} + \widehat{\beta} X_i \qquad \ldots (3.1.1)$$

وعليه فأن افضل طريقة للحصول على اصغر قيمة ممكنة للأخطاء يتم بواسطة تربيع الانحرافات و من ثم محاولة جعل مجموع مربعات هذه الانحرافات اصغر ما يمكن اي :

$$\sum {e_i}^2 = \sum [Y_i - E(Y_i)]^2 \to Min$$

ومن ثم ايجاد النهاية الصغرى ل($\sum {e_i}^2$) يستوجب مساواة المشتقة الجزئية الاولى لكل من (β و α) للصفر وبعدها تحل المعادلتين آنيا لنحصل على مُقدرات الانحدار الخطي وهي :

$$\widehat{\beta}_{ols} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \qquad \ldots\ldots\ldots (3.1.2)$$

$$\widehat{\alpha} = \overline{Y} - \widehat{\beta}_{ols} \overline{X} \qquad \ldots\ldots (3.1.3)$$

وان تقدير تباين المُقدر $\widehat{\beta}_{ols}$ هو

$$Var(\widehat{\beta}_{ols}) = \frac{S_{ee}}{\sum (X_i - \overline{X})^2} \qquad \ldots (3.1.4)$$

$$S_{ee} = \frac{\sum {Y_i}^2 - \widehat{\alpha} \sum Y_i - \widehat{\beta}_{ols} \sum X_i Y_i}{(n-2)}$$

ان مُقدرات طريقة المربعات الصغرى متسقة وغير متحيزة في حاله عدم وجود أخطاء قياس في المتغير التوضيحي .

ولنبين ان مُقدر طريقة المربعات الصغرى متسق ، نفرض ان x_i, y_i تمثل الانحرافات لقيم المتغير المعتمد والمتغير التوضيحي عن اوساطها الحسابية ليكون :

$$\widehat{\beta}_{ols} = \frac{\sum_i^n x_i y_i}{\sum_i^n {x_i}^2} \qquad ; y_i = \beta x_i + e_i$$

$$\widehat{\beta}_{ols} = \frac{\sum x_i (\beta x_i + e_i)}{\sum {x_i}^2}$$

$$\widehat{\beta}_{ols} = \frac{\beta \sum {x_i}^2 + \sum x_i e_i}{\sum {x_i}^2} \times \frac{n}{n}$$

$$\widehat{\beta}_{ols} = \frac{\frac{\beta \sum {x_i}^2}{n} + \frac{\sum x_i e_i}{n}}{\frac{\sum {x_i}^2}{n}}$$

بما ان الخطأ العشوائي e_i (خطأ معادلة الانحدار) مستقل عن المتغير التوضيحي x_i وهذه احدى الفروض الاساسية لنموذج الانحدار الخطي ، وان $n \to \infty$ سيكون :

$$p\lim_{n\to\infty}\frac{\sum x_i e_i}{n}=0$$

$$p\lim_{n\to\infty}\frac{\sum {x_i}^2}{n}=\sigma_x{}^2$$

$$\therefore p\lim_{n\to\infty}\hat{\beta}_{ols}=\beta \qquad \ldots.(2.5.5)$$

نستنتج ان المُقدر $\hat{\beta}_{ols}$ تقدير متسق للمعلمة β .

(٣،١،٢) <u>طريقة نسبة المعولية</u> Reliability ratio Method

ان مُقدر طريقة نسبة المعولية ما هو الا عملية تصحيح لمُقدر طريقة المربعات الصغرى $\hat{\beta}_{ols}$ في حالة وجود أخطاء في قياس المتغير التوضيحي X وسنوضح كيفية الحصول على هذا المُقدر كما يلي :

$$Y_i=\alpha+\beta X_i+e_i \quad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

عندما يكون المتغير التوضيحي مُقاس بشكل غير دقيق نأخذ متغير بديل عنه ، هو Wi

إذ ان :

$$W_i=X_i+u_i \ldots\ldots.(2)$$

u_i: يمثل أخطاء القياس .

W_i: يمثل المتغير التوضيحي الذي يحتوي على أخطاء في القياس .

X_i: يمثل المتغير التوضيحي الذي لا يحتوي على أخطاء في القياس .

وبالتعويض (٢) في (١) نحصل على :

$$Y_i=\alpha+\beta W_i+e_i{}^* \qquad ,e_i{}^*=e_i-\beta u_i$$

وفي هذه الحالة انتُهك احد فروض طريقة المربعات الصغرى وينص على انه (لا يوجد ارتباط بين خطأ المعادلة e_i والمتغير التوضيحي الجديد W_i).مما يؤدي الى ان تكون مُقدرات المربعات الصغرى غير متسقة .

ولنُبين ان مُقدر المربعات الصغرى غير متسق نفرض ان w_i,x_i,y_i,u_i تمثل الانحرافات عن اوساطها وان مُقدر المربعات الصغرى يُعطى بالشكل التالي :

$$\hat{\beta}_{ols}=\frac{\sum w_i y_i}{\sum {w_i}^2} \qquad ,y_i=\beta x_i+e_{\ i} \quad ,w_i=x_i+u_i$$

$$\hat{\beta}_{ols}=\frac{\sum(x_i+u)(\beta x_i+e_i)}{\sum(x_i+u_i)^2}$$

$$\hat{\beta}_{ols}=\frac{\beta\sum {x_i}^2+\sum x_i e_i+\beta\sum u_i x_i+\sum u_i e_i}{\sum {x_i}^2+2\sum u_i x_i+\sum {u_i}^2}$$

$$\widehat{\beta}_{ols}=\frac{\beta\sum x_i^2/_n+\sum x_ie_i/_n+\beta\sum u_ix_i/_n+\sum u_ie_i/_n}{\sum x_i^2/_n+2\sum u_ix_i/_n+\sum u_i^2/_n}$$

وان من الفروض . ان خطأ القياس u غير مرتبط بالمتغير التوضيحي Xi و كذلك غير مرتبطة مع الخطأ العشوائي e_i وان $n\to\infty$ فينتج ما يلي :

$$\underset{n\to\infty}{\text{p lim}}\frac{\sum u_ix_i}{n}=0$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{p lim}}\frac{\sum e_ix_i}{n}=0$$

$$\underset{n\to\infty}{\text{p lim}}\frac{\sum e_iu_i}{n}=0$$

$$\underset{n\to\infty}{p\lim}\frac{\sum x_i^2}{n}=\sigma_{xx}$$

$$\underset{n\to\infty}{p\lim}\frac{\sum u_i^2}{n}=\sigma_{uu}$$

$$\underset{n\to\infty}{p\lim}\widehat{\beta}_{ols}=\frac{\beta\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}+\sigma_{uu}}\qquad\text{....}(3.1.5)$$

$$K=\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}+\sigma_{uu}}\qquad\text{.....}(3.1.6)$$

حيث ان النسبة K تسمى نسبة المعولية reliability ratio

ان مُقدر ols سيكون غير متسق لذلك سنستبدله بمُقدر متسق الا وهو مُقدر طريقة نسبة المعولية وهذا المُقدر نحصل عليه من خلال ضرب معكوس نسبة المعولية K بمُقدر طريقة المربعات الصغرى ويعطى بالشكل التالي :

$$\widehat{\beta}_k=K^{-1}\widehat{\beta}_{ols}\qquad\text{....}(3.1.7)$$

ان نسبة المعولية غير معلومة ويمكن تقديرها من خلال العينة :

$$\widehat{K}=\frac{S_w^{\ 2}}{S_w^{\ 2}+\widehat{\sigma}_u^{\ 2}}\qquad\text{....}(3.1.8)$$

وان تباين المُقدر سيكون :

$$Var(\widehat{\beta}_{ols})=(K^{-1})^2Var(\widehat{\beta}_{ols})\quad\text{.....}(3.1.9)$$

وتعد هذه الطريقة من ابسط طرق تصحيح المُقدرات في ظل وجود أخطاء في القياس وتستعمل هذه الطريقة في مجالات متعددة منها علم النفس وان نسبة المعولية تكون معلومة في هذا المجال.

(٣,١,٣) طريقة المتغير المساعد Instrumental Variable Method

ان النظرية الاساسية في تحليل الانحدار تفترض ان المتغيرات التوضيحية قد قيست بدون أخطاء . ففي مجال التطبيق نادراً ما يوجد هذا النوع من البيانات وهذا يعني ان اغلب المتغيرات المقاسة قد تكون ملوثة بأخطاء القياس ME وخاصة في علم الاقتصاد وبعض العلوم الاخرى .

وكما هو معلوم ان وجود أخطاء في قياس المتغير التوضيحي يجعل مُقدرات طريقة المربعات الصغرى متحيزة وغير متسقة في العينات الصغيرة فضلاً عن العينات الكبيرة . ومع ذلك فأن اي محاولة للتعامل مع الأخطاء الموجودة في المتغيرات تبقى استثناء في التطبيق .
المُقدر المتسق البديل لمُقدر طريقة المربعات الصغرى في حالة وجود أخطاء قياس سيكون مُقدر طريقة المتغير المساعد الذي يحمل صفة الاتساق ويرمز لمُقدر هذه الطريقة بالرمز β_{iv} وتعطى بالشكل التالي :

$$\widehat{\beta_{iv}} = \frac{\sum(Ti - \overline{T})(Yi - \overline{Y})}{\sum(Ti - \overline{T})(Wi - \overline{W})} \qquad \dots(3.1.10)$$

إذ ان :
Yi: يمثل المتغير المعتمد .
Wi: يمثل المتغير التوضيحي المشاهد.
Ti: يمثل المتغير المساعد .

$$\beta_{iv} \sim N\left(\beta \,,\, \frac{(\sigma_{e^*e^*})(\sigma_{TT})}{{\sigma_{XT}}^2}\right)$$

إذ ان :
σ_{TT} : يمثل التباين للمتغير المساعد T.
$(\sigma_{e^*e^*})$: يمثل تباين الخطأ e^* .
${\sigma_{XT}}^2$: يمثل التباين المشترك بين XوT .
وان تقدير تباين المُقدر اعلاه يأخذ الشكل التالي :

$$Var(\widehat{\beta}_{iv}) = \frac{(S_{e^*e^*})(S_{TT})}{(n-1)(S_{wT})^2} \qquad \dots(3.1.11)$$

$$S_{e^*e^*} = \frac{\sum[(y_i - \overline{y}) - \beta_{iv}\,(w_i - \overline{w})]^2}{(n-2)}$$

ان هذا المُقدر يستعمل في حالة عدم معرفة تباين أخطاء القياس ؛ لأنه لا يعتمد على تباين أخطاء القياس لكنه يحتاج الى متغير خارجي الا وهو المتغير المساعد ويجب ان يكون هذا المتغير المساعد له ارتباط قوي مع المتغير التوضيحي لكي يكون مُقدر المتغير المساعد جيد ويمكن الاعتماد عليه .

(٤,١) المعلومات الاضافية Extra Information

لحساب أخطاء القياس يجب ان تتوفر بعض المعلومات الاضافية .فكل طريقة من طرائق تقدير معالم نموذج الانحدار الخطي تحتاج الى معلومات خاصة تساعد في تقدير المعلمات الواجب

تقديرها . فمثلا طريقة نسبة المعولية تحتاج الى توفر تباين أخطاء القياس والذي لا نستطيع الحصول عليه اذا لم يتم تكرار المتغير المتأثر بأخطاء القياس، كما ان طريقة المتغير المساعد تحتاج الى متغير يساعد المتغير التوضيحي ويجب ان يكون هذا المتغير ذو كفاءة جيدة للحصول على مُقدر جيد . وسنوضح هذه المعلومات اكثر كما يلي :

(٤,١,١) تباين أخطاء القياس Variance of Measurement Error

يرمز لتباين أخطاء القياس عادة بالرمز($\sigma_u{}^2$) أو(σ_{uu}) ليمثل او ليُعبر عن مقدار او حجم أخطاء القياس الموجودة في المتغير المُقاس .
الكثير من الآلات له نسبة خطأ في القياس معلوم . فعلى سبيل المثال من المعلوم ان للمتغير المشاهد قيمة متوسطة للخطأ من 100 والتي غالبا ما تكون نسبة الخطأ في الآلات لا تتجاوز 10% .
او يمكن ان يأخذ رأي خبير عن أخطاء القياس عن متغير ما، تحت اختصاصه او مجال عمله .
لحساب تباين أخطاء القياس هناك طرائق يمكن من خلالها تقدير تباين أخطاء القياس وهي :-

- اذا كانت هناك قيم حقيقية او دقيقة جدا (اي بيانات مؤكدة) ل m من الوحدات فإن تباين أخطاء القياس سيكون:

$$\hat{\sigma}_{uu} = \frac{\sum(Wi-Xi)^2}{m} \quad \ldots\ldots\ldots(4.1.1)$$
$$i = 1,2,\ldots\ldots,m \ ; m \le n$$

اذ ان :
wi : تمثل قيم المتغير المشاهد.

- اذا كانت هناك r من المكررات متوفرة لكل وحدة اي ان المشاهدة الواحدة لها متعددة قياسات . فأن تقدير تباين أخطاء القياس في هذه الحالة سيكون :

$$\hat{\sigma}_{uu} = \frac{\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}(m_{ij}-\bar{m}_i)^2}{n(r-1)} \quad \ldots(4.1.2)$$

(٤,١,٢) المتغير المساعد Instrumental Variable

المتغير المساعد او المتغير الجوهري و يرمز للمتغير المساعد بالرمز T وان هذا المتغير له ارتباط قوي مع المتغير التوضيحي X الصحيح (اي غير ملوث بالأخطاء) وغير مرتبط مع خطأ المعادلة (e) ولا مرتبط مع خطأ القياس (u)، وكمثال على هذا المتغير (الأنفاق Expenditure) يمكن ان يعمل كمتغير مساعد لمتغير الدخل . او اذا كان هناك قياس اخر للمتغير مأخوذ من آلة قياس مستقلة عن التي قيس بها المتغير التوضيحي المشاهد فأن هذا القياس يمكن ان يُعامل على انه متغير مساعد .

(٥,١) دراسة المحاكاة Simulation Study

سنقوم بعمل دراسة محاكاة حيث ان البرنامج تضمن بناء نموذج الانحدار الخطي البسيط ونموذج للمتغير المساعد وتوليد المتغيرات بأستخدام الايعازات الجاهز في برنامج (MatLab) وهي كما يلي :

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + e_i$$

$e_i \sim N(0, \sigma_e^2)$, $X_i \sim N(\mu, \sigma_x^2)$, $\alpha \& \beta$: قيم اولية

$$W_i = X_i + u_i \;\; ; \; u_i \sim N(0, \sigma_u^2)$$

$T_i = a_0 + a_1 X_i + v_i$, $v_i \sim N(0, \sigma_v^2)$, $a_0 \& a_1$: قيم اولية

بعد توليد المتغيرات نقوم بحساب مُقدرات الميل وهي $\widehat{\beta}_{iv}, \widehat{\beta}_k, \widehat{\beta}_{ols}$ ، ومن ثم نقوم بحساب متوسط مربعات الخطأ(MSe) الذي يعتبر من اهم المؤشرات التي تُساعد في المفاضلة بين المُقدرات . و بأحجام عينات مختلفة، وقد تم تكرار البرنامج ل *1000* دورة .

(٥,٢) نتائج المحاكاة

الجدول $(1-1)$يُبين هذا الجدول مُقدرات الميل $(\widehat{\beta})$ للطرائق المدروسة بالاضافة الى متوسط مربعات الخطأ($MSe(\widehat{\beta})$) .

n	Methods	$\widehat{\beta}$	$MSe(\widehat{\beta})$
25	Ols	1.1592	0.081771
	K	1.4232	0.014257.
	Iv	1.1581	0.08905
50	Ols	1.1659	0.068054
	K	1.4213	0.005309
	Iv	1.1654	0.07015
100	Ols	1.1631	0.064471
	K	1.4132	0.002517
	Iv	1.1624	0.065655

(٥,٣) تحليل النتائج

نلاحظ من الجدول (1-1) لكل احجام العينات، تفوق طريقة نسبة المعولية (*k*) على نظيرتيها كل من طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (*ols*) وطريقة المتغير المساعد (*iv*) على التوالي ،وان الطرائق الثلاثة متقاربة من حيث المُقدرات ، ونلاحظ ايضا ان بزيادة حجم العينة تقل قيمة متوسط مربعات الخطأ وهذه يدعم النظرية الاحصائية .

(٥,٤) الاستنتاجات و التوصيات

نستنتج من خلال هذا البحث ان طريقة نسبة المعولية ذات كفاءة عالية مقارنة بطريقة المربعات الصغرى الاعتيادية وطريقة المتغير المساعد . وان حجم العينة له تأثير واضح على متوسط مربعات الخطأ ، وان طريقة المتغير المساعد ليست ذات كفاءة عالية .

من ما تقدم نوصي بتعميم طريقة نسبة المعولية لكفاءتها على اختلاف حجم العينة.

المصادر

المصادر العربية

1. العزاوي، دجلة ابراهيم مهدي و الشمري، نذير عباس ابراهيم (2011) "الاقتصاد القياس وتطبيقاته " دار الكتب و الوثائق ببغداد .

2. الحسناوي، د، أموري هادي والقيسي، باسم شليبة مسلم "القياس الاقتصادي المتقدم، النظرية والتطبيق" (2002) دار الكتب والوثائق ببغداد.

المصادر الأجنبية

3. Singh, S. , Jain, K. , Suresh, S. ,(2012) ," Using Stochastic prior information in Consistent Estimation of Regression Coefficients in replicated Measurement Error Model" , Journal of Multivariate Analysis 111, 198-212 .

4. Carroll, R. J. , Ruppert .D. and Stefanski L.A. (2006),*Measurement Error in Nonlinear Models* , NewYork : Chapman & Hall.

5. Fuller, W.A.(1987),*Measurement Error Models* ,New York: John Wiley.

6. Johnston J. ,(1997), *Econometric Methods* (4th edition), New York : McGrow-Hill.

7. Stefanski, L.A.(1985),"The effects of measurement error on parameter estimation,"*Biometrika,*72,583-592.

8. Shalabh , Garg, G. , Misra, N. , (2009) ," Use of prior information in the consistent estimation of Regression coefficients in measurement error Models" , Journal of Multivariate Analysis 100: 1498-1520 .

9. Cochran, W. , (1968), "Errors of measurement in statistics," *Technometrics* , 10, 637-666.