

خاصيتين تصادفية للوحات سيطرة الـ EWMA من جانب واحد

م. د. جنان عباس ناصر
معهد الادارة/ الرصافة

Abstract

This study, establishes two stochastic monotonicity results concerning the run length of an upper one –sided Exponentially Weighted Moving Average (EWMA) control charts, based on the logarithm of the sample variance, for monitoring a process standard deviation, these properties cast interesting light on the control chart performance, and their extension to other one –sided EWMA control charts.

الخلاصة

هذا البحث يقيم نتيجتين تصادفية رتيبة متعلقة بطول التشغيل للوحة سيطرة المتوسط المتحرك الموزون اسيا (EWMA) من جانب واحد الاعلى، مستندة على اللوغاريتم لتباين العينة، لمراقبة الانحراف المعياري للعملية. تلك الخاصيتين تهتم بتسليط الضوء على اداء لوحة السيطرة، وامتداد تلك الخاصيتين للوحات سيطرة اخرى مثل الـ EWMA من الجانب الاعلى.

1. المقدمة

للكشف عن التزايد في الانحراف المعياري لعملية انتاجية، عندما يكون المتغير تحت السيطرة يتبع التوزيع الطبيعي، يمكن استخدام لوحة الانحراف المعياري لشيوارت من جانب واحد - σ . بالاعتماد على احصاءة التباين للعينة

$$S_N^2 = \sum_{i=1}^n (X_{iN} - \bar{X})^2 / (n-1)$$

عندما يكون S_N^2 يمثل تباين العينة (N^{th}). اما حدود السيطرة فهي

$$C_{\text{Shew}} = [LCL_{\text{Shew}}, UCL_{\text{Shew}}]$$

$$C_{\text{Shew}} = [0, \gamma_{\text{Shew}} \times \sigma_0^2 / (n-1)] \dots (1)$$



وان γ_{Shew} تكون قيمة موجبة وثابتة، يتم اختيارها بالطريقة التي تعطي قيمة كبيرة لمتوسط طول التشغيل (ARL) عندما تكون العملية تحت السيطرة وتعطي قيمة صغيرة لـ ARL عندما تكون العملية خارج السيطرة، اما قيمة σ_0 فتمثل قيمة الانحراف المعياري عند مستوى محدد او قيمة معلومة من البيانات السابقة لعملية تحت السيطرة. حيث ان $\theta \geq 1, \sigma = \theta \times \sigma_0$ ، وتحصل اشارة الخروج عن السيطرة عندما تأخذ العينة (N^{th}) الاحتمال

$$P[S_N^2 \notin C_{Shew} / \sigma = \theta \times \sigma_0] = 1 - F_{X^2(n-1)}(\gamma_{Shew} / \theta^2), \theta \geq 1 \quad \dots(2)$$

$F_{X^2(v)}$ تمثل دالة التوزيع التجميعية للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية (v)، و $RL_{Shew}(\theta)$ يمثل طول التشغيل ويتبع التوزيع الهندسي. ولهذا، فان دالة البقاء (survival function) لطول التشغيل $RL_{Shew}(\theta)$ تكون وفق الصيغة الاتية

$$\bar{F}_{RL_{Shew}}(\theta) = I_{(-\infty, 1)}(s) + [F_{X^2(n-1)}(\gamma_{Shew} / \theta^2)]^{[s]} \times I_{[1, \infty)}(s) \quad \dots(3)$$

حيث ان [s] تمثل عدد صحيح وهي جزء من القيم لحدود s التي تأخذ القيم ($1, \infty$).

وتكون $\bar{F}_{RL_{Shew}}(\theta)$ دالة غير متزايدة بـ θ ، اذ ان المتغير العشوائي X يكون تصادفيا أكبر من Y

$$y \geq_{st} X \text{ إذا تحقق دوال بقائها } \bar{F}_Y(y) \geq \bar{F}_X(x) \text{ , } -\infty < X < \infty \text{ , وبالتالي فان}$$

$$\dots (4) \quad 1 \leq RL_{Shew}(\theta) \geq_{st} \theta' \text{ , } \theta' < \theta$$

اي ان طول التشغيل يتناقص تصادفيا مع قيمة θ ، لذا اكبر تزايد في الانحراف المعياري للعملية، يعطي اصغر عدد من العينات المأخوذة لحين الكشف عن ذلك التغير، وهي نتيجة متوقعة وتتابع مباشر في حالة التعامل مع الاختبار الاكثر قوة بانتظام لـ σ . وعليه فان هدف البحث ان نقدم برهان النتيجة التصادفية في الصيغة (4)، التي تكون بديهية وتتضمن بان

$$\dots (5) \quad \theta' \leq ARL_{Shew}(\theta) \geq_{st} \theta' \text{ , } 1 \leq ARL_{Shew}(\theta) < \theta$$

وذلك بتعميم النتيجة اعلاه في الصيغة (4)، التي تتضمن الصيغة (5) للوحة السيطرة ال EWMA من جانب واحد الاعلى لـ σ (التوزيع الطبيعي) ولـ δ (لتوزيع Weibull min)، ثم الاستدلال التصادفي بوضع قيمة بداية اخرى لكلا اللوحتين التي تؤدي الى خاصية تصادفية رتيبة اخرى.



2. لوحة ال EWMA من جانب واحد الأعلى لـ σ

ان حدود السيطرة واحصاء ال EWMA المستخدمة لمراقبة الانحراف المعياري للعينة عند اوقات متعاقبة عددها N تكون وفق الصيغة التالية

$$C_{EWMA} = (LCL_{EWMA}, UCL_{EWMA}]$$

$$C_{EWMA} = (-\infty, \ln(\sigma_0^2) + \gamma_{EWMA} \times \sqrt{\{\lambda \times \psi'[(n-1)/2]\}/(2-\lambda)}] \quad \dots(6)$$

$$W_N = W_0, \quad N=0$$

$$W_N = (1-\lambda) \times \max \{ \ln(\sigma_0^2), W_{N-1} \} + \lambda \times \ln(S_N^2), \quad N=1,2,3,\dots \quad \dots(7)$$

وان γ_{EWMA} تكون قيمة موجبة وثابتة اكبر من الصفر اي ان $\gamma_{EWMA}(0, \infty)$ ، أما λ فهي قيمة ثابتة التعيم وقيمتها $(0 < \lambda \leq 1)$ وتمثل الوزن المعطى للمشاهدة الاكثردخاثة. ويتم اختيار قيم γ_{EWMA} و λ من قبل الباحث لتعطي خصائص طول التشغيل المرغوب بها لكلا الحالتين تحت وخارج السيطرة. وتمثل ψ' دالة trigamma، W_0 تمثل القيمة الاولية المعطاة لاحصاء ال EWMA، التي تكون في حدود السيطرة C_{EWMA} ، فاذا كانت قيمة W_0 اكبر من $\ln(\sigma_0^2)$ اعطت بداية اخرى للوحة السيطرة. وكما نلاحظ توجد فروق ضئيلة بين حدود السيطرة واحصاء الاختبار في (6) و(7) والمقترحة من قبل Crowder و Hamilton عام 1992 واستخدمت من قبل Gan عام 1995. وبين حدود السيطرة واحصاء الاختبار المعرفة وفق الصيغة التالية

$$C_{EWMA}^* = [\ln(\sigma_0^2), \ln(\sigma_0^2) + \gamma_{EWMA} \times \sqrt{\{\lambda \times \psi'[(n-1)/2]\}/(2-\lambda)}] \quad \dots(8)$$

$$W_N^* = \ln \sigma_0^2, \quad N=0$$

$$W_N^* = \max \{ \ln(\sigma_0^2), \lambda \times \ln(S_N^2) \} + (1-\lambda) \times W_{N-1}^*, \quad N=1,2,3,\dots \quad \dots(9)$$

ان الاحصاء W_N^* لا تسمح بوجود قيمة بداية اخرى، وتضع مباشرة قيمة اي مشاهدة للاحصاء ادنى من قيمة $\ln(\sigma_0^2)$ مساوية للقيمة $\ln(\sigma_0^2)$. وان W_N ليست لها الخاصية المتقدم ذكرها للاحصاء W_N^* ، لكن يبدووا انها اكثر ملائمة في تقييم خصائص لوحة السيطرة ال EWMA باستخدام الاسلوب الماركوفي (the markovian approach)، علاوة على ذلك، فان قيم الاحصاء W_N يمكن ان تكون ضمن الفترة $(-\infty, \ln(\sigma_0^2))$ والتي توضح الفرق بين حدود السيطرة المعرفة في الصيغتين (6) و(8).

3. الاسلوب الماركوفي

تكون الميزة الاساسية لهذا الاسلوب بتشخيص الحالات ومصفوفة الاحتمال الانتقالية لسلسلة ماركوف المتقطعة التي تقرب للاستمرارية المشتركة مع احصاء ال EWMA. في التطبيق للاسلوب المتقدم ذكره، نفترض الحالات الانتقالية الاتية

$$E_i = (e_i, e_{i+1}] , \quad i=1,2,\dots,v-1 ; \quad \dots(10)$$



وتكون الحدود لتلك الحالات

$$e_1 = -\infty \quad , \quad e_2 = \ln(\sigma_0^2) \quad \dots(11)$$

$$e_{i+1} = e_i + \Delta = \ln(\sigma_0^2) + (i-1)\Delta, \quad i=2,3,\dots,v-1 \quad \dots(12)$$

اذ ان $\Delta = \gamma_{EWMA} \times \sqrt{\{\lambda \times \psi'[(n-1)/2]\}/(2-\lambda)}$]/(v-2) واخيرا الحالة المنتهية (absorbing state) لسلسلة ماركوف تكون طبقا لـ $E_v = [UCL_{EWMA}, +\infty)$. اما مصفوفة الاحتمال الانتقالية للسلسلة، مثلت بصيغة مجزأة، وكما يأتي

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\theta) & \mathbf{[I-Q(\theta)] \times \mathbf{1}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \dots (13)$$

حيث ان \mathbf{I} مصفوفة الوحدة ذات رتبة $(v-1 \times v-1)$ ، متجة ذو رتبة $(1 \times v-1)$ ، $\mathbf{1}$ متجة ذو رتبة $(1 \times v-1)$ تكون قيمة كل عنصر من عناصره مساوية للواحد، $\mathbf{1}$ يمثل احتمال البقاء ضمن الحالة المنتهية. والمصفوفة $Q(\theta)$ ذات رتبة $(v-1 \times v-1)$ ومدخلاتها تعطى وفق الصيغة التالية:

$$q_{1j}(\theta) = p(W_N \in E_j / W_{N-1} \in E_1, \theta) \quad , \quad j=1,2,\dots,v-1 \quad \dots(14)$$

$$q_{ij}(\theta) = p(W_N \in E_j / W_{N-1} = (e_1 + e_{i+1})/2, \theta) \quad , \quad i=2,\dots,v-1, j=1,2,\dots,v-1 \quad \dots(15)$$

4. خاصيتين اساسية لمصفوفة $Q(\theta)$

المدخلات لمصفوفة $Q(\theta)$ يمكن ان تكتب بصيغة اخرى¹ وكماياتي

$$q_{ij}(\theta) = a_{ij}(\theta) - a_{ij-1}(\theta) \quad , \quad i, j=1,2,\dots,v-1 \quad \dots(16)$$

عندما

$$a_{i0}(\theta) = 0 \quad , \quad i=1,2,\dots,v-1 \quad ; \quad \dots(17)$$

$$a_{1j}(\theta) = F_{x_{(n-1)}^2} \{ [(n-1)/\theta^2] \times \exp[(j-1)\Delta/\lambda] \} \quad j=1,2,\dots,v-1; \quad \dots(18)$$

$$a_{ij}(\theta) = F_{x_{(n-1)}^2} \{ [(n-1)/\theta^2] \times \exp[(j-1) - (1-\lambda)(i-3/2)\Delta/\lambda] \}$$

$$i=2,3,\dots,v-1; j=1,2,\dots,v-1, \dots(19)$$

¹ لمزيد من التفاصيل أنظر المصدر رقم (1) .



وهكذا فان

$$a_{iv-1}(\theta) = \sum_{j=1}^{v-1} q_{ij}(\theta) \quad , \quad i=1,2,\dots,v-1 \quad \dots(20)$$

و تمتلك $a_{ij}(\theta)$ الخصائص الاتية

$$da_{ij}(\theta) / d\theta \leq 0 \quad ; \quad i, j=1,2,\dots,v-1; \quad \dots(21)$$

$$a_{ij-1}(\theta) < a_{ij}(\theta) \quad ; \quad i, j=1,2,\dots,v-1; \quad \dots(22)$$

$$a_{ij}(\theta) > a_{i+1j}(\theta) \quad ; \quad i=1,2,\dots,v-2; \quad j=1,2,\dots,v-1; \quad \dots(23)$$

بسبب تلك الخصائص الثلاثة المتقدم ذكرها اعلاه، فان المصفوفة $Q(\theta)$ تمتلك ميزتين خاصة.

$$e'_i \times (d[Q(\theta)]^{[s]} / d\theta) \times \underline{1} \leq e'_i \times \{ (d[Q(\theta)]^{[s-1]} / d\theta) \times Q(\theta) \} \times \underline{1} \leq 0$$

$$i=1,2,\dots,v-1, s=1, 2, \quad (24)$$

$$e'_i \times [Q(\theta)]^{[s]} \times \underline{1} > e'_j \times [Q(\theta)]^{[s]} \times \underline{1} \quad ; \quad 1 \leq i < j \leq v-1 \quad ; \quad s=1,2,\dots,v-1 \quad ; \quad \theta \geq 1 \quad \dots(25)$$

حيث ان e'_i يمثل المتجه (i^{th}) من الـ R^{v-1} orthonormal basis.

للمتباينة في الصيغة (24) يتبع مباشرة ماياتي من الصيغة (21)

$$e'_i \times (d[Q(\theta)]^{[s]} / d\theta) \times \underline{1} = e'_i \times \{ (d[Q(\theta)]^{[s-1]} / d\theta) \times Q(\theta) \} \times \underline{1} + \sum_{j=1}^{v-1} [q_{ij}^{(s-1)}(\theta) \times \{ da_{jv-1}(\theta) / d\theta \}]$$

$$\leq \sum_{j=1}^{v-1} [\{ d q_{ij}^{(s-1)}(\theta) / d\theta \} \times a_{jv-1}(\theta)] \quad i=1, 2, \dots, v-1; s=1,2,\dots \quad \dots(26)$$

ولنبرهن بان الحد الايمن من الصيغة (26) يكون مقدار غير موجب (non-positive)، يجب البرهنة بالاستنتاج الرياضي بأن

$$\sum_{l=1}^{v-1} [\{ d q_{il}^{(s-1)}(\theta) / d\theta \} \times a_{lj}(\theta)] \leq 0 \quad \dots(27)$$

لـ $i, j=1,2, \dots, v-1; s=1, 2, \dots$ تكون المتباينة (27) صحيحة بوضوح لـ $s=1, \dots, v-1$ ، وباستخدام النتيجة (21) و(23)، يمكن بسهولة ان نبين بان المتباينة (27) لاتزال صحيحة لـ $s=2$ و $i, j=1,2, \dots, v-1$

$$\sum_{l=1}^{v-1} [(dq_{il}^{(2-1)}(\theta) / d\theta) \times a_{lj}(\theta)] = \sum_{l=1}^{v-1} [(da_{il}(\theta) / d\theta) \times a_{lj}(\theta)] - \sum_{l=2}^{v-1} [(da_{il-1}(\theta) / d\theta) \times a_{lj}(\theta)]$$

$$= \sum_{l=1}^{v-2} \{ (da_{il}(\theta) / d\theta) \times [a_{lj}(\theta) - a_{l+1j}(\theta)] \} + [(da_{iv-1}(\theta) / d\theta) \times a_{v-1j}(\theta)] \quad \dots(28)$$



الآن نعرف بان المتباينة (27) تكون صحيحة لـ $s-1$ و $i, j=1, 2, \dots, v-1$ يتبع ذلك

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{v-1} [(dq_{il}^{(s)}(\theta)/d\theta) \times a_{lj}(\theta)] &= \sum_{l=1}^{v-1} \{ (d/d\theta) [\sum_{m=1}^{v-1} q_{im}^{(s-1)}(\theta) q_{ml}(\theta)] \times a_{lj}(\theta) \} \\ &= \sum_{m=1}^{v-1} \sum_{l=1}^{v-1} \{ [(dq_{im}^{(s-1)}(\theta)/d\theta) \times a_{ml}(\theta) + q_{im}^{(s-1)}(\theta) \times (da_{ml}(\theta)/d\theta)] \times a_{lj}(\theta) \} \\ &\quad - \sum_{m=1}^{v-1} \sum_{l=1}^{v-1} \{ [(dq_{im}^{(s-1)}(\theta)/d\theta) \times a_{ml-1}(\theta) + q_{im}^{(s-1)}(\theta) \times (da_{ml-1}(\theta)/d\theta)] \times a_{lj}(\theta) \} \\ &= \sum_{m=1}^{v-1} \sum_{l=1}^{v-2} \{ [(dq_{im}^{(s-1)}(\theta)/d\theta) \times a_{ml}(\theta) + q_{im}^{(s-1)}(\theta) \times (da_{ml}(\theta)/d\theta)] \times [a_{lj}(\theta) - a_{l+1j}(\theta)] \} \\ &\quad + a_{v-1j}(\theta) \times \sum_{m=1}^{v-1} [(dq_{im}^{(s-1)}(\theta)/d\theta) \times a_{mv-1}(\theta) + q_{im}^{(s-1)}(\theta) \times (da_{mv-1}(\theta)/d\theta)] \\ &\leq \sum_{m=1}^{v-1} \sum_{l=1}^{v-2} \{ (dq_{im}^{(s-1)}(\theta)/d\theta) \times a_{ml}(\theta) \times [a_{lj}(\theta) - a_{l+1j}(\theta)] \} \\ &= \sum_{l=1}^{v-2} \{ [a_{lj}(\theta) - a_{l+1j}(\theta)] \times \sum_{m=1}^{v-1} [(dq_{im}^{(s-1)}(\theta)/d\theta) \times a_{ml}(\theta)] \} \leq 0 \dots (29) \end{aligned}$$

لـ $i, j=1, 2, \dots, v-1$ ، وهكذا فان $\underline{1} \times [Q(\theta)]^{[s]} \times \underline{1}$ تكون في الحقيقة دالة متناقصة لـ θ لكل لـ

$s=1, 2, \dots$ و $i=1, 2, \dots, v-1$.

اما برهان نتيجة (25) فانه يتطلب ايضا استخدام الاستنتاج الرياضي وكما ياتي

لنفرض $s=1$ ، $1 \leq i < j \leq v-1$ ، $\theta \geq 1$ ، ثم

$$\underline{e}'_i \times [Q(\theta)] \times \underline{1} = a_{iv-1} > a_{jv-1} = \underline{e}'_j \times [Q(\theta)] \times \underline{1} \dots (30)$$

بافتراض ان المتباينة (25) تكون صحيحة لـ $s-1$ ، $1 \leq i < j \leq v-1$ ، $\theta \geq 1$ ، يتبع ذلك

$$\underline{e}'_i \times [Q(\theta)]^{[s]} \times \underline{1} = \sum_{m=1}^{v-1} \sum_{l=1}^{v-1} q_{il}^{(s-1)}(\theta) \times q_{lm}(\theta) > \sum_{m=1}^{v-1} \sum_{j=1}^{v-1} q_{jl}^{(s-1)}(\theta) \times q_{lm}(\theta) = \underline{e}'_j \times [Q(\theta)]^{[s]} \times \underline{1}$$

... (31)

لـ $1 \leq i < j \leq v-1$ و $\theta \geq 1$. لهذا السبب فان $\underline{1} \times [Q(\theta)]^{[s]} \times \underline{1}$ تكون دالة متناقصة للحالة الانتقالية

الاولية i .



5. الرتبة التصادفية في θ

نفرض $RL_{EWMA}^i(\theta)$ يمثل طول التشغيل للوحة ال EWMA من الجانب الاعلى لـ σ مشروطة بـ θ ، وان القيمة الاولية لاحصاء W_0 تعود الى الحالة الانتقالية $i=1,2,\dots,v-1$ ، وان E_i ، وان $RL_{EWMA}^i(\theta)$ له دالة بقاء تكون وفق الصيغة التالية:

$$\bar{F}_{RL_{EWMA}^i}(\theta) = I_{(-\infty,1)}(s) + e_i' [Q(\theta)]^{[s]} \times I_{[1,\infty)}(s) \quad \dots(32)$$

ومن الصيغة (24) يمكن الاستنتاج بأن طول التشغيل يكون دالة متناقصة بـ θ . لهذا فان

$$RL_{EWMA}^i(\theta) \geq_{st} RL_{EWMA}^i(\theta'), \quad 1 \leq \theta, \quad i=1, 2, v-1 \quad \dots (33) \quad \theta' <$$

يكون ذلك، تزايد تصادفي في قابلية لوحة السيطرة لكشف عن تزايد في σ ، وان هذا التغير يصبح اكثر حدة. هذه النتيجة التصادفية تكون متوقعة بطريقة ما، لانه يوجد بعض التشابه بين دوال البقاء لـ RL_{Shew}^i و RL_{EWMA}^i . وبالتتابع من الصيغة (33) فان دوال متوسط طول التشغيل تحقق ماياتي

$$, \quad i=1,2,\dots,v-1 \quad \dots (34)$$

$$< \theta \quad ARL_{EWMA}^i(\theta') \quad , \quad 1 \leq ARL_{EWMA}^i(\theta) \geq_{st} \theta' \quad \text{ويحسب } ARL_{EWMA}^i(\theta) \text{ وفق الصيغة ادناه}$$

$$ARL_{EWMA}^i(\theta) = ERL_{EWMA}^i(\theta) = e_i' \times [I - Q(\theta)]^{-1} \mathbf{1}$$

6. الاستدلال التصادفي لتبني بداية اخرى (A head start)

برهنت النتيجة في الصيغة (25) في المبحث 4، وتتضمن بان $\bar{F}_{RL_{EWMA}^i}(\theta)$ دالة متناقصة بـ (i)

لاية قيم ثابتة لـ θ و s . وهكذا فان

$$RL_{EWMA}^i(\theta) \geq_{st} RL_{EWMA}^j(\theta'), \quad 1 \leq i < j \leq v-1, \quad \theta \geq 1 \quad \dots(35)$$

$$ARL_{EWMA}^i(\theta) > ARL_{EWMA}^j(\theta'), \quad 1 \leq i < j \leq v-1, \quad \theta \geq 1 \quad \dots(36)$$

المتباينة في الصيغة (35) لها معنى مهم - ان اعطاء بداية اخرى لتلك اللوحة سيؤدي الى تناقص تصادفي في طول تشغيله. وهكذا، سيكون على الارجح لحدوث أنذارات زائفة، وسيتناقص العدد للعينات المفحوصة لحين الكشف عن تزايد في σ سيكون مخفض تصادفيا.

7. امتداد الخصائص التصادفية تلك للوحات سيطرة اخرى

للوحة سيطرة ال EWMA من جانب واحد الاعلى بدون استخدام ميزة اعادة بداية (restart)، فان مصفوفة ال $Q(\theta)$ لها خصائص مشابهة للصيغ (24)، (25)، وهكذا فان برهان النتيجتين الرتبية تصادفيا مبرهن هنا. فعلى سبيل المثال للوحة ال EWMA من جانب واحد الاعلى لمعلمة القياس (δ) لخاصية النوعية مع توزيع ويبيل $(\eta = \text{location}, \delta = \text{scale}, \alpha = \text{shape})$ Weibull_{min}. تكون حدود السيطرة واحصاء الاختبار لتلك اللوحة كما ياتي



$$C_{EWMA} = (-\infty, \ln(\delta_0^\alpha) + \gamma_{EWMA} \times \sqrt{\{\lambda \times \psi'(n)\} / (2-\lambda)}] \quad \dots(37)$$

$$W_N = W_0, \quad N=0$$

$$W_N = (1-\lambda) \times \max \{ \ln(\delta_0^\alpha), W_{N-1} \} + \lambda \times \ln(T_N^\alpha), \quad N=1,2,3,\dots \quad \dots(38)$$

اذ ان $T_N^\alpha = \left[\sum_{m=1}^{v-1} (X_{iN} - \eta)^\alpha / n \right]^{1/\alpha}$ يكون مقدر الامكان الاعظم لمعلمة القياس.

ل، $\theta = \delta / \delta_0, \theta \geq 1$ ، تكون المصفوفة $Q(\theta)$ وفق الصيغة (16) مع قيم $a_{ij}(\theta)$ المبينة في الصيغ ادناه

$$a_{i0}(\theta) = 0, \quad i=1,2,\dots,v-1; \quad \dots(39)$$

$$a_{ij}(\theta) = F_{x(2n)}^2 \{ [(2n) / \theta^\alpha] \times \exp[(j-1)\Delta / \lambda] \} \quad j=1,2,\dots,v-1; \quad \dots(40)$$

$$a_{ij}(\theta) = F_{x(2n)}^2 \{ [(2n) / \theta^\alpha] \times \exp[(j-1) - (1-\lambda)(i-3/2)\Delta / \lambda] \}$$

$$i=2,3,\dots,v-1; j=1,2,\dots,v-1, \dots(41)$$

لان تلك القيم لـ $a_{ij}(\theta)$ تحقق الصيغ (21) الى (23)، فان طول تشغيل اللوحة يتناقص تصادفيا بـ θ والحالة الانتقالية الاولية i .

8. الجانب التطبيقي

يتضمن هذا المبحث عرض الاساليب التي يتم من خلالها تسليط الضوء على اداء لوحات سيطرة ال EWMA من جانب واحد الاعلى لـ σ (التوزيع الطبيعي) ولـ δ (التوزيع Weibull min)، بدون استخدام ميزة اعادة بداية من خلال تطبيق الخصائص التصادفية المتقدم ذكرها في الجانب النظري. اما البيانات المعتمدة للتوزيع الطبيعي، فقد كانت القراءات لمتوسط فولتية الدائرة المفتوحة للبطارية الجافة من النوع 2G- من نتائج تجربة مقامة لهذا الغرض في المنشأة العامة لصناعة البطاريات الجافة. اذ تعتبر فولتية الدائرة المفتوحة عامل حاسم في تحديد جودة البطارية. فقد تم اجراء اختبار التوزيع الطبيعي لمنة قراءة لفولتية الدائرة المفتوحة للبيانات المتوفرة في قسم السيطرة على النوعية بهدف تحديد قيمة متوسط الفولتية والانحراف معياري ضمن الحدود المسموح بها وقد كانت $\mu_0 = 1650$ بانحراف معياري مساوي للواحد ($\sigma_0 = 1$). ثم تم سحب خمسة بطاريات في كل وقت ولفترة خمسة وعشرين يوم عمل فعلي لتسجيل فولتية الدائرة المفتوحة. اما لتوزيع Weibull min فقد تم افتراض ان قيمة معلمة القياس مساوية للواحد ($\delta_0^\alpha = 1$) وعندما تكون $\alpha = 1,2,3$. بهدف توضيح وتعميم تلك الخصائص التصادفية المتقدم ذكرها لتلك اللوحة والمبينة في الجانب النظري.



8.1 لوحات سيطرة شيوارت وال EWMA من جانب واحد الاعلى لـ σ

لغرض المقارنة بين اداء لوحة شيوارت ولوحة ال EWMA من الجانب الاعلى لـ σ (التوزيع الطبيعي)، وتوضيح الفرق في احتساب قيم احصاءة S_N^2 و W_N و W_N^* لفولتية الدائرة المفتوحة للبطارية 2G عندما تكون $\gamma_{Shew} = 16.891$ و $\lambda = 0.1$ و $\gamma_{EWMA} = 1.5$ و $n=5$ و $N=25$. إذ ان $W_0 = \ln \sigma^2_0$. فقد حسبت قيم حدود السيطرة للوحة شيوارت وفق الصيغة (1) تكون مساوية لـ $C_{Shew} = [0, 4.24525]$ ، اما قيم حدود السيطرة للوحة ال EWMA وفق الصيغتين (6) و (8) فهي $C_{EWMA} = (-\infty, 0.2764]$ و $C_{EWMA}^* = [0, 0.2764]$ وعلى التوالي. وكذلك تم حساب قيم احصاءة الاختبار للوحات الثلاثة المتقدم ذكرها، فقد تم حساب تباين العينة ولكل وقت للوحة شيوارت، ثم استخدمت الصيغ (7) و (9) لحساب قيم احصاءة ال EWMA. وقد لخصت قيم الاحصاءة للوحات الثلاثة لاول عشرة قيم في الجدول (1).

جدول (1) يبين قيم احصاءة S_N^2 و W_N و W_N^* لفولتية الدائرة المفتوحة للبطارية الجافة 2G لاول عشرة قيم عندما تكون $\gamma_{Shew} = 16.891$ و $\lambda = 0.1$ و $\gamma_{EWMA} = 1.5$.

N	S_N^2	W_N	W_N^*
1	0.120	-0.21203	0
2	1.935	0.06601	0.06601
3	1.967	0.12706	0.12706
4	2.203	0.19334	0.19334
5	2.451	0.26365	0.26365
6	1.857	0.29918	0.29918
7	1.373	0.30096	0.30096
8	1.063	0.27698	0.27698
9	2.011	0.31914	0.31914
10	0.761	0.25992	0.25992

نلاحظ ان احصاءة W_N^* لا تسمح بوجود قيمة بداية اخرى وتضع قيمة المشاهدة التي تكون ادنى من قيمة $(\ln \sigma^2_0)$ مساوية لقيمة $(\ln \sigma^2_0)$. وباستخدام ال Matlab فقد رسمت اللوحات الثلاثة المتقدم ذكرها، انظر الاشكال (1-1,2,3) في الملحق. إذ نلاحظ في كلا لوحتين ال EWMA في الشكلين (1.2) و (1.3) وجود إشارة الخروج عن السيطرة الاحصائية عند المشاهدة السادسة، في حين لا تعطي لوحة شيوارت إشارة الخروج عن السيطرة انظر الشكل (1.1). مما يعني ان اداء لوحة ال EWMA يكون اكثر فاعلية منه للوحة شيوارت للكشف عن التزايد في الانحراف المعياري للعملية تحت السيطرة .

8.2 الاسلوب الماركوفي للوحة ال EWMA من جانب واحد الاعلى لـ σ

اولا : في هذا المبحث تم حساب الصيغ (33) و (34) المتقدم ذكرها في المبحث (5) والمتعلقة بقيم دالة البقاء لطول التشغيل ومتوسطه وعلى التوالي وبالاتماد على الصيغ في المبحث (3,4). عندما تكون $n=5$ ، $\gamma_{EWMA} = 1.5$ ، $\lambda = 0.1$ ، وقيم θ في المدى [1-2]، بافتراض ان عدد الحالات تحت السيطرة $v-1=51$ ، $W_0 = \ln \sigma^2_0$ تعني $(i=1)$ و $(\sigma_0 = 1)$ مع العلم بان اداء تلك اللوحة لا يعتمد على قيمة σ_0 كما مبين في الصيغ (18) و (19) ويمكن عموما استخدام اية قيمة لـ σ_0 .



فقد تم حساب قيم دالة البقاء $RL_{EWMA}^1(\theta)$ لبعض من قيم s ، قيمة $ARL_{EWMA}^1(\theta)$ ولقيم θ في المدى [1-2]. باستخدام برنامج كتب بلغة ال Matlab، وقد لخصت النتائج في الجدول (2). نلاحظ ان قيم متوسط طول التشغيل تتناقص تصادفياً بزيادة مستوى الانحراف المعياري (بزيادة θ). أنظر قيمة الاحتمال في الخلايا المضللة، والتي تمثل احتمال اخذ عينات اكثر من $s = [ARL_{EWMA}^1(\theta)]$ لحين اعطاء اشارة الخروج عن السيطرة لا يتجاوز 50% لكل الحالات المفترضة، ويوجد فرق ضئيل عن $\bar{F}_{Geometric(1/ARL_{EWMA}^1(\theta))}([ARL_{EWMA}^1(\theta)])$. ومع ذلك الرسم ثلاثي الابعاد لدالة البقاء

لـ $RL_{EWMA}^1(\theta)$ في الشكل (2) في الملحق، يبين السلوك لهذا المتغير العشوائي، بعكس $RL_{Shew}^1(\theta)$ الذي يكون بوضوح لا يتبع التوزيع الهندسي خاصة لحالات الخروج عن السيطرة.

جدول (2) يبين قيم دالة البقاء لطول التشغيل $RL_{EWMA}^1(\theta)$ التشغيل لبعض من قيم s لقيمة $ARL_{EWMA}^1(\theta)$ عندما تكون $\lambda = 0.1$ و $\gamma_{EWMA} = 1.5$ ولكل قيم θ المفترضة*.

θ	$ARL_{EWMA}^1(\theta)$	$s = [ARL_{EWMA}^1(\theta)]$									
		1	3	4	5	7	9	13	24	69	458
1.0	441.210	1.000	1.000	0.999	0.998	0.994	0.990	0.981	0.957	0.863	0.354
1.1	71.381	1.000	0.998	0.992	0.983	0.960	0.934	0.880	0.746	0.379	0.001
1.2	24.932	1.000	0.988	0.965	0.934	0.860	0.784	0.647	0.378	0.042	
1.3	13.337	1.000	0.963	0.905	0.834	0.689	0.561	0.368	0.114	0.001	
1.4	8.916	1.000	0.914	0.807	0.692	0.491	0.342	0.164	0.022		
1.5	6.733	1.000	0.841	0.682	0.534	0.314	0.181	0.060	0.003		
1.6	5.466	1.000	0.748	0.548	0.386	0.184	0.086	0.019			
1.7	4.648	1.000	0.646	0.423	0.265	0.101	0.038	0.005			
1.8	4.079	0.999	0.542	0.314	0.175	0.052	0.015	0.001			
1.9	3.663	0.999	0.444	0.227	0.112	0.026	0.006				
2.0	3.346	0.999	0.357	0.161	0.070	0.013	0.002				

*الخلايا الفارغة تكون فيها قيم دالة البقاء مساوية لثلاثة اصفار بعد الفارزة اي (0.000).
ثانياً : في هذا المبحث تم حساب الصيغ (35) و (36) المتقدم ذكرها في المبحث (6) والمتعلقة بقيم دالة البقاء لطول التشغيل ومتوسطه وعلى التوالي والمتضمنة الاستدلال التصادفي لتبني قيمة بداية اخرى. فالتباينة (36) استخدم ال Matlab لحساب قيم $ARL_{EWMA}^i(\theta)$ لكل قيم θ المفترضة واختيرت عدة قيم لبدايات اخرى (i=11,21,31,41,51) وقد لخصت النتائج في الجدول (3)، ونلاحظ بان قيم متوسط طول التشغيل تتناقص بزيادة قيمة i ، بالاحص، لقيم $\theta = 1.1-1.3$.

أما للمتباينة (35) استخدم ال Matlab لرسم قيم $RL_{EWMA}^1(\theta)$ لعدة قيم لبدايات اخرى 0% (i=1) و 60% (i=31) و 100% (i=51). وثلثاً قيم لـ θ عندما يزداد الانحراف المعياري بنسبة $(\theta = 1)$ 0% و $(\theta = 1.5)$ 50% و $(\theta = 2)$ 100%، المبينة في الاشكال (3-1,2,3) في الملحق. أذ نلاحظ ان اختيار قيم بدايات اخرى يعطي سلوك مختلف لدالة البقاء وفي كلا الحالتين تحت وخارج السيطرة، بالاضافة الى جعل اللوحة حساسة اكثر تصادفياً لتزايد في الانحراف المعياري (يعطي حماية اضافية للكشف عن المشاكل في النوعية عندما تكون العملية في مبدئها).



جدول (3) يبين قيم $ARL_{EWMA}^i(\theta)$ لبعض من البدايات اخرى ($i=11,21,31,41,51$) عندما تكون $\lambda=0.1$ و $\gamma_{EWMA}=1.5$ ولكل قيم θ المفترضة.

$\theta \backslash i$	11	21	31	41	51
1.0	438.96	432.950	417.370	374.270	287.030
1.1	69.813	66.678	60.859	50.131	34.971
1.2	23.743	21.764	18.747	14.378	9.484
1.3	12.383	10.974	9.060	8.667	4.362
1.4	8.120	7.035	5.657	4.096	7.744
1.5	6.051	5.167	4.091	2.960	2.059
1.6	4.869	4.118	3.232	2.358	1.708
1.7	4.116	3.459	2.701	1.998	1.505
1.8	3.600	3.009	2.345	1.763	1.376
1.9	3.226	2.683	2.092	1.601	1.289
2.0	2.942	2.435	1.903	1.483	1.228

8.3 الاسلوب الماركوفي للوحة ال EWMA من جانب واحد الاعلى لـ δ (لتوزيع $Weibull_{min}$) اولاً: في هذا المبحث تم حساب الصيغ (33) و(34) المتقدم ذكرها في المبحث (5) المتعلقة بقيم دالة البقاء لطول التشغيل ومتوسطه وعلى التوالي، وبالاعتماد على الصيغ في المبحث (3,7). عندما تكون $\gamma_{EWMA}=1.25$ ، $\lambda=0.05$ ، $n=5$ ، $\alpha=1,2,3$ لقيم θ في المدى [1-2]، بافتراض ان عدد الحالات تحت السيطرة $v-1=51$ ، $W_0 = \ln(\delta_0^\alpha)$ تعني ($i=1$). فقد تم حساب قيمة دالة البقاء $RL_{EWMA}^1(\theta)$ لبعض من قيم S ، لقيمة $ARL_{EWMA}^1(\theta)$ ولكل قيم θ المفترضة باستخدام برنامج كتب بلغة ال Matlab، وقد لخصت النتائج في الجدول (4). أذ نلاحظ ان قيم $ARL_{EWMA}^1(\theta)$ تتناقص تصادفياً بزيادة مستوى الانحراف المعياري (بزيادة θ) بثبات قيمة α ، وتتناقص تصادفياً بزيادة قيمة معلمة الشكل (α). اما قيمة الاحتمال في الخلايا المضللة، التي تمثل احتمال اخذ عينات اكثر من $S = [ARL_{EWMA}^1(\theta)]$ نحين اعطاء اشارة الخروج عن السيطرة لايتجاوز 50% لكل الحالات المفترضة، فانها تتناقص تصادفياً بزيادة قيمة α .

ثانياً: في هذا المبحث تم حساب الصيغ (35) و(36) المتقدم ذكرها في المبحث (6) المتعلقة بقيم دالة البقاء لطول التشغيل ومتوسطه وعلى التوالي، والمتضمنة الاستدلال التصادفي لتبني قيمة بداية اخرى. فالمتبينة (36) استخدم ال Matlab لحساب قيم $ARL_{EWMA}^i(\theta)$ لكل قيم θ المفترضة واختيرت عدة قيم لبدايات اخرى ($i=11,21,31,41,51$) وقد لخصت النتائج في الجدول (5)، ونلاحظ بان قيم متوسط طول التشغيل تتناقص بزيادة قيمة i بثبات قيمة معلمة الشكل (α)، وتتناقص تصادفياً بزيادة قيمة معلمة الشكل (α). أما للمتبينة (35) استخدم ال Matlab لرسم قيم $RL_{EWMA}^i(\theta)$ لعدة قيم لبدايات اخرى ($i=1$) 0% و ($i=31$) 60% و ($i=51$) 100%. ولقيمة θ عندما يزداد الانحراف المعياري بنسبة 50% المبينة في الاشكال (3,1,2,5) في الملحق. أذ نلاحظ ان اختيار قيم بدايات اخرى يعطي سلوك مختلف لدالة البقاء. ومع ذلك، لاحظ الرسم ثلاثي الابعاد لدالة البقاء لـ $RL_{EWMA}^1(\theta)$ عندما تكون قيمة $\alpha=1$ ، في الشكل (4) في الملحق، الذي يبين السلوك لهذا المتغير العشوائي.






جدول (4) يبين قيم دالة البقاء لطول التشغيل $RL_{EWMA}^1(\theta)$ لبعض من قيم S لقيمة $ARL_{EWMA}^1(\theta)$ عندما تكون $\lambda=0.05$ ، $\gamma_{EWMA}=1.25$ ، ولكل قيم α ، θ المفترضة*.

θ	$ARL_{EWMA}^1(\theta)$	$S = \alpha = 1 [ARL_{EWMA}^1(\theta)]$									
		1	3	4	5	7	9	13	24	69	458
1.0	133.260	1.000	0.999	0.997	0.994	0.983	0.970	0.942	0.864	0.607	0.029
1.1	42.079	1.000	0.997	0.988	0.975	0.938	0.895	0.806	0.597	0.179	
1.2	20.649	1.000	0.989	0.966	0.932	0.846	0.755	0.589	0.291	0.016	
1.3	13.058	1.000	0.974	0.925	0.859	0.710	0.571	0.360	0.098		
1.4	9.525	1.000	0.947	0.862	0.757	0.552	0.388	0.186	0.024		
1.5	7.560	1.000	0.908	0.779	0.638	0.399	0.239	0.083	0.004		
1.6	6.327	1.000	0.856	0.683	0.516	0.271	0.136	0.033	0.001		
1.7	5.488	1.000	0.792	0.582	0.401	0.174	0.072	0.012			
1.8	4.882	1.000	0.721	0.484	0.302	0.107	0.036	0.004			
1.9	4.423	1.000	0.646	0.393	0.221	0.064	0.018	0.001			
2.0	4.065	1.000	0.570	0.313	0.158	0.037	0.008				
θ	$ARL_{EWMA}^1(\theta)$	$S = \alpha = 3 [ARL_{EWMA}^1(\theta)]$									
		1	3	4	5	7	9	13	24	69	458
1.0	133.260	1.000	0.999	0.997	0.994	0.983	0.970	0.942	0.864	0.607	0.029
1.1	11.702	1.000	0.967	0.908	0.830	0.662	0.512	0.298	0.065		
1.2	5.299	1.000	0.773	0.554	0.372	0.153	0.060	0.009			
1.3	3.548	0.999	0.430	0.191	0.078	0.012	0.002				
1.4	2.761	0.992	0.166	0.041	0.009						
1.5	2.332	0.965	0.049	0.006	0.001						
1.6	2.065	0.902	0.012	0.001							
1.7	1.864	0.767	0.002								
1.8	1.690	0.664									
1.9	1.532	0.522									
2.0	1.396	0.393									
θ	$ARL_{EWMA}^1(\theta)$	$S = \alpha = 5 [ARL_{EWMA}^1(\theta)]$									
		1	3	4	5	7	9	13	24	69	458
1.0	133.260	1.000	0.999	0.997	0.994	0.983	0.970	0.942	0.864	0.607	0.290
1.1	6.224	1.000	0.849	0.673	0.503	0.259	0.128	0.030	0.001		
1.2	3.051	0.997	0.266	0.086	0.025	0.002					
1.3	2.190	0.940	0.025	0.002							
1.4	1.771	0.730	0.001								
1.5	1.440	0.435									
1.6	1.209	0.208									
1.7	1.086	0.086									
1.8	1.032	0.032									
1.9	1.012	0.012									
2.0	1.004	0.004									

*الخلايا الفارغة تكون فيها قيم دالة البقاء مساوية لثلاثة أصفار بعد الفارزة أي (0.000).



جدول (5) يبين قيم $ARL_{EWMA}^i(\theta)$ لبعض قيم البدايات المتبقية ($i=11,21,31,41,51$) عندما تكون $\lambda=0.05$ و $\gamma_{EWMA}=1.25$ ولكل قيم α ، θ المفترضة.

 i	$\alpha=1$				
	11	21	31	41	51
1.0	131.090	126.030	115.670	95.151	63.482
1.1	40.416	37.276	32.180	24.403	15.018
1.2	19.308	17.120	14.054	10.075	5.998
1.3	11.935	10.283	8.173	5.692	3.418
1.4	8.559	7.238	5.647	3.893	2.412
1.5	6.711	5.610	4.331	2.988	1.925
1.6	5.569	4.623	3.549	2.463	1.652
1.7	4.801	3.969	3.037	2.127	1.483
1.8	4.253	3.507	2.679	1.897	1.371
1.9	3.843	3.164	2.415	1.731	1.292
2.0	3.526	2.900	2.212	1.606	1.235
 i	$\alpha=3$				
	11	21	31	41	51
1.0	131.090	126.030	115.670	95.151	63.482
1.1	10.634	9.600	7.182	4.980	3.014
1.2	4.630	3.824	2.924	2.054	1.447
1.3	3.075	2.523	1.926	1.436	1.160
1.4	2.397	1.949	1.504	1.205	1.066
1.5	2.014	1.616	1.284	1.101	1.029
1.6	1.749	1.398	1.160	1.051	1.014
1.7	1.544	1.252	1.090	1.026	1.006
1.8	1.383	1.156	1.050	1.013	1.003
1.9	1.261	1.095	1.028	1.007	1.002
2.0	1.173	1.057	1.016	1.004	1.001
 i	$\alpha=5$				
	11	21	31	41	51
1.0	131.090	126.030	115.670	95.151	63.482
1.1	5.474	4.542	3.485	2.420	1.631
1.2	2.646	2.162	1.658	1.285	1.097
1.3	1.876	1.499	1.215	1.072	1.020
1.4	1.455	1.197	1.066	1.018	1.004
1.5	1.200	1.068	1.019	1.005	1.001
1.6	1.076	1.022	1.005	1.001	1.000
1.7	1.026	1.007	1.002	1.000	1.000
1.8	1.009	1.002	1.000	1.000	1.000
1.9	1.003	1.000	1.000	1.000	1.000
2.0	1.001	1.000	1.000	1.000	1.000



9. الأستنتاجات

- أن أهم الاستنتاجات التي تم التوصل اليها من خلال هذا البحث هي كالاتي :
1. يتناقص طول التشغيل تصادفيا مع الانحراف في المعلمة المسيطر عليها، اي ان تلك اللوحات تصبح حساسة اكثر بالاستمرارية للانحراف كلما تكبر السعة.
 2. اذا كانت العملية في ميتهنها تحت السيطرة او اعادة لبدء العملية بعد اجراء تصحيح غير فعال للعملية، فان طول التشغيل يتناقص تصادفيا عند تبني قيمة بداية اخرى للوحة السيطرة .
 3. اذا كانت العملية خارج السيطرة، فان طول التشغيل يتناقص (طول تشغيل قصير) تصادفيا عند تبني قيمة بداية اخرى للوحة السيطرة .

References:

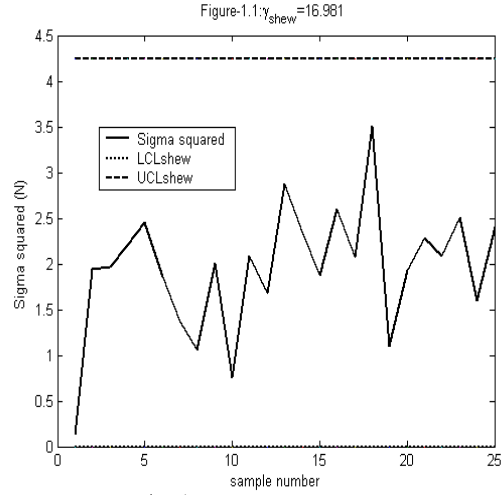
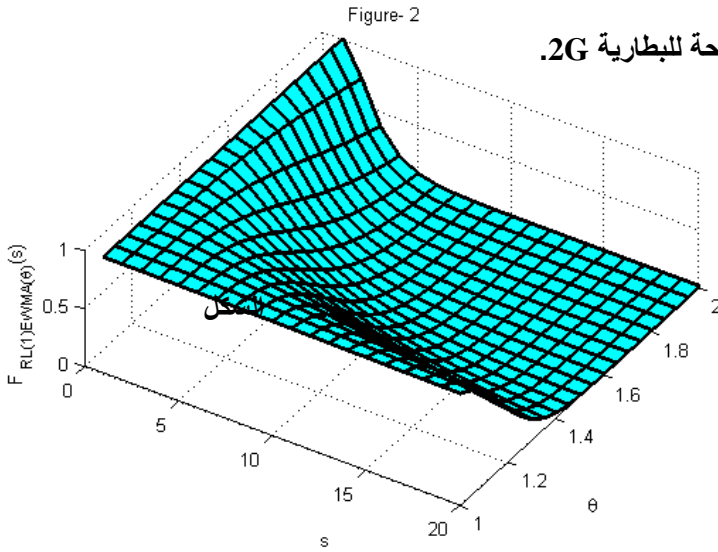
1. Cabral Morais, M.and Pacheco, A. (1998). "Two stochastic properties of one sided -Exponentially weighted Moving Average control charts," Communications in Statistics- Simulation and Computation, 27,937-952.
2. Chengalur, I.N.,Aronold ,J.C.and Reynolds Jr,M.R.(1989) , " Variable sampling intervals for multiparameter Shewart charts, " Communications in Statistics –Theory and Methods , 18,1769-1792.
3. Crowder, S.and Hamilton, M. (1992). "An EWMA for monitoring a process standard deviation," Journal of Quality Technology, 24, pp.12-21.
4. Gan, F. (1995). "Joint monitoring of process Mean and Variance using exponentially weighted Moving Average control charts," Technometrics, 37,446-453.
5. Reynolds Jr., M., Amin, R., and Arnold, J. (1990), "CUSUM charts with Variable Sampling Intervals," Technometrics, 32,371-384.
6. Shaked, M.and Shanthikumar, J.G. (1994) .Stochastic order and Their Applications, Academic Press.
7. Wolfram, S. (1996) .The mathematica Book -3rd edition (mathematica Version 3.0), Wolfram Media, Cambridge University Press.



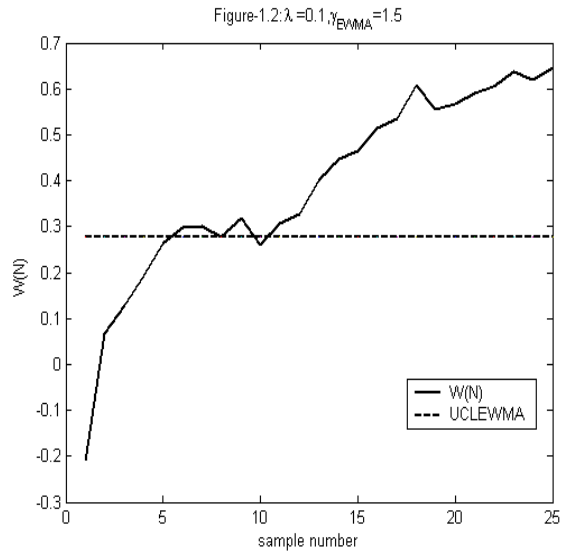
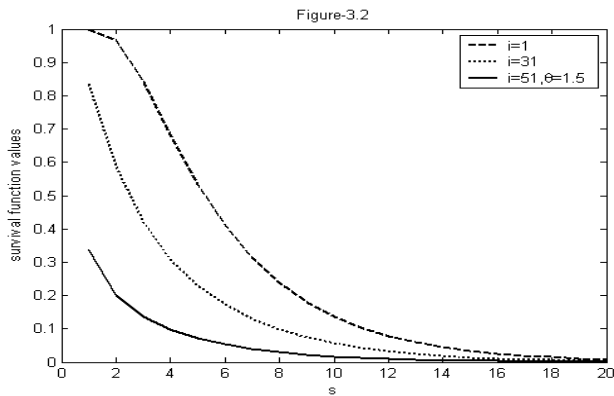
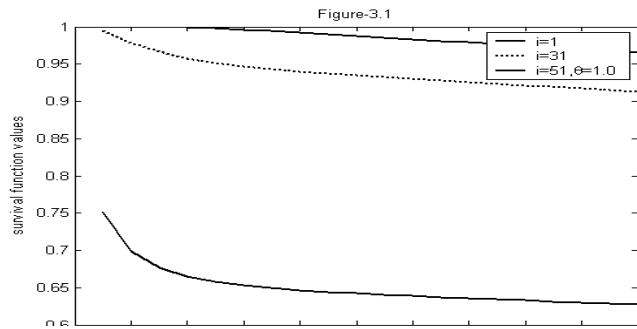
الملحق

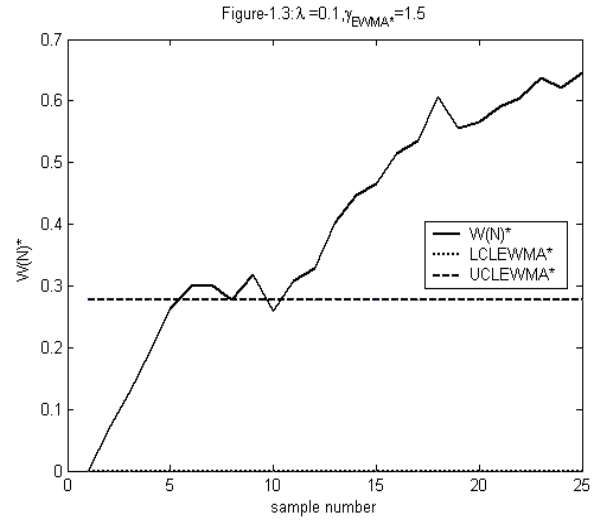
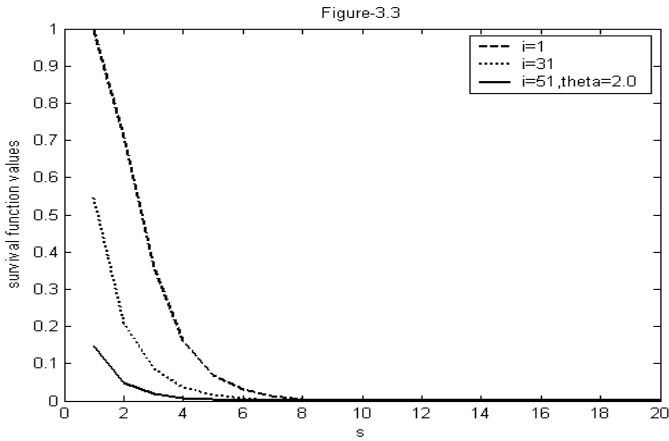
الشكل (2) يبين الرسم

الاشكال (1-1,2,3) تبين لوحة سيطرة شيوارت و لوحة ال EWMA

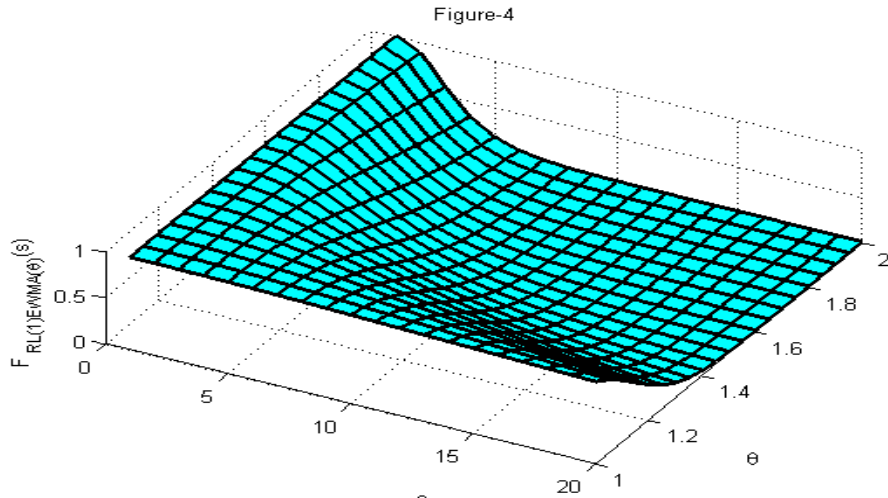
3D لقيم دالة البقاء $RL_{EWMA}^1(\theta)$.من جانب واحد الاعلى لـ σ لفولتية الدائرة المفتوحة للبطارية 2G.

الاشكال (3-1,2,3) تبين منحنيات دالة البقاء لطول التشغيل
لبدايات اخرى (i=1,31,51) عندما تكون $\theta = 1, 1.5, 2$.





الشكل (4) يبين الرسم 3D لقيم دالة البقاء لـ $RL_{EWMA}^1(\theta)$ عندما تكون $\alpha = 1$.



الاشكال (3, 2, 1-5) تبين منحنيات دالة البقاء لطول التشغيل لقيم بدايات اخرى ($i=1, 31, 51$) عندما تكون $\theta=1.5$ و $\alpha=1$.

