The Effect Of Non – Dimensional Parameter(*NE*)On The Velocity And Temperature For The Non- Newtonian Fluids During Its Flow Through Inside Square Enclosure

تأثير المقدار اللا بعدي على السرعة ودرجة الحرارة للموائع اللانيوتنية خلال جريانها في قناة مربعة المقطع

محمد عبد الصادق	كاظم خيون كحلول	راهي عبد الحسن
المعهد التقني كوفة	المعهد التقني كوفة	المعهد التقني كوفة

الخلاصـــة :-

تم في هذا البحث دراسة تأثير المقدار اللا بعدي (*NE*) لنموذج براندتل الرياضي في السرعة ودرجة الحرارة للموائع اللانيوتنية خلال جريانها في قناة مربعة المقطع وذلك بأجراء دراسة عددية لأنتقال الحرارة بالحمل الطبيعي المستقرعلى أن تكون الجدران العمودية مسخنة الى درجات حرارة مختلفة (منتظمة) والجدران الأفقية المتوازية معزولة حراريا كشروط حديـــة .

أستخدمت طريقة الفروق المحدودة (Finite Difference) لحل المعادلات الخاصة بالوسط المغلق بواسطة بناء برنامج بلغة فيجوال بيسك .

أظهرت نتائج الدراسة أن زيادة المقدار اللا بعدي (*NE*) يؤدي الى زيادة السرعة ودرجة الحرارة . كما أن زيادة قيمة المقدار اللا بعدي (*NE*) تؤدي الى زيادة قيمة دالة الأنسياب ψ_{max} لتصل عند قيمة عظمى مقدارها (25.32) لعدد رالي المعدل (Ra_E=110000) . وهذا ينطبق أيضا على قيم معدل عدد نسلت Nu_a حيث تصل أعلى قيمة له (11.42) عند عدد رالي المعدل (Ra_E=110000) و المقدار اللا بعدي (NE=10) . وقد أجريت جميع الأختبارات عند عدد براندتل المطور (Pr^*=15) .

Abstract :-

In this research the effect of non – dimensional parameter (*NE*) of Prandtl – Eyring model on the velocity and temperature for the inside square enclosure has been studied . The research used a numerical study for steady natural heat induction with some conditional , these are the perpendicular walls were heated in a different regular heat and the horizontal walls were isolated .

The finite difference method was used to solve the formulas related to the inside square enclosure by using visual basic program .

The results showed that the increase in the non-dimensional parameter(*NE*) increased the velocity and temperature , Also the increase in *NE* increased the value of flow ψ_{max} until the maximum value was reached at (25.32) for the modified Rayleigh number of (110000) .The same results appeared with the average Nusselt number Nu_a until it reaches its high value (11.42) at modified Rayleigh number of (110000) and NE =10 . All trials were performed at modified Prandtl number (Pr^*=15) .

الأسماء التعريفية(المصطلحات)

A & *B* = Fluid consistency indices for the Prandtl – Eyring model ($kg/m.s^2$) & (s)	(معاملات المائع لموديل براندتل)
g = Gravitational acceleration (m/s^2).	التعجيل الارضي
h = Heat transfer coefficient ($W/m^2.K$).	معامل أنتقال الحرارة
k = Thermal conductivity of fluid ($W/m.K$).	التوصيل الحراري للمائع
L = Width and Height of enclosure (m).	طول المربع
NE = Fluid index of Prandtl – Eyring model $= \dfrac{\alpha B}{L^2}$.	المقدار اللا بعدي للموديل الرياضي لبراندتل
Nu_a = Average Nusselt number.	معدل عدد نسلت
Nu = Nusselt number $= \dfrac{qL}{k(T_h - T_c)}$.	عدد نسلت
P = Pressure (*Pa*).	الضغط
Pr = Prandtl number = (υ/α).	عدد براندتل
Pr^* = Modified Prandtl number $= \dfrac{AB}{\rho_o \alpha}$.	عدد براندتل المطور، * تعني العلامة المطور
q = Heat flux (W/m^2)	حرارة الجريان
Ra = Modified Rayleigh number = $Ra_E = \dfrac{\rho_o g \beta L^3 (T_h - T_c)}{AB\alpha}$	عدد رالي المطور
T = Temperature (*K*).	درجة الحرارة
u = Fluid velocity in *x*-direction (*m/s*).	سرعة المائع بأتجاه x
v = Fluid velocity in *y*-direction (*m/s*).	سرعة المائع بأتجاه y
x& *y* = Cartesian coordinates.	الأحداثيات القطبية
Δx & Δy = Grid size in the *x* and *y* directions, respectively (*m*).	حجم الشبكة بأتجاه x و y

الرموز اللاتينيـــة

$$\tau_{yx} = \text{Shear stress } (Pa) = \begin{cases} \mu \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ A \sinh^{-1}\left(B \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

أجهاد القص للموائع النيوتنية

أجهاد القص للموائع غير النيوتنية

τ_{xx} = Normal stress in the *x* direction.	الأجهاد العمودي بأتجاه x
τ_{yy} = Normal stress in the *y* direction.	الأجهاد العمودي بأتجاه y
ρ = Density (kg/m^3).	الكثافة
α = Thermal diffusivity (m^2/s).	الأنتشار الحراري
β_T = Thermal expansion coefficient ($1/K$).	معامل التمدد الحراري
ψ = Stream function (m^2/s).	دالة الأنسياب
ω = Vorticity ($1/s$).	دوامة (أضطراب دوامي)
ΔT = Temperature difference (*K*).	الفرق بدرجات الحرارة
θ = Dimensionless temperature $= \dfrac{T - T_c}{T_h - T_c}$	درجة الحرارة لابعدية
T_h = Temperature of the heated wall(K).	درجة الحرارة على الجدارالمسخن
T_C = Temperature of the cold wall(K).	درجة الحرارة على الجدارالبارد
θ_h = The dimensionless Temperature of the heated wall .	درجة الحرارة لابعدية على الجدران المسخنة
μ = Dynamic viscosity, ($kg/m.s$).	اللزوجة الديناميكية
υ = Kinematic viscosity of fluid (m^2/s).	اللزوجة الحركية للمائع

المقدمـــة (Introduction) :-

أن أنتقال الحرارة بالحمل الطبيعي للموائع النيوتنية والغير نيوتنية في وسط مغلق كان موضوع دراسات عديدة في السنوات الأخيرة بسبب أستخدامها في تطبيقات هندسية واسعة مثل عزل الأبنية وتهوية الغرف وعزل المفاعل النووي والنمو البلوري في السوائل وتبريد المكونات الكهربائية [1] .

يصاحب عملية أنتقال الحرارة بالحمل الطبيعي في وسط مغلق العديد من المشاكل ، ومن المحتمل أن يكون مصدر هذه المشاكل هو أختلاف أبعاد القناة و نوع السائل وطبيعة تدفق (جريان) السائل وغيرها من المشاكل [2] .

من العوامل المؤثرة على جريان المائع وأنتقال الحرارة فيه هي عدد رالي المعدل وعدد براندتل المعدل والمقدار اللابعدي للموديل الرياضي (Prandtl – Eyring) والذي يصف الجريان للموائع اللانيوتنية[3] . أن نوع المائع يمكن أن يحدد من خلال المقدار اللابعدي(NE= Fluid index) حيث أن الموائع النيوتنية تكون فيها قيمة (NE=0) أما في حالة كون قيمة (NE>0) فأن المائع يكون مائع لانيوتني[3] .

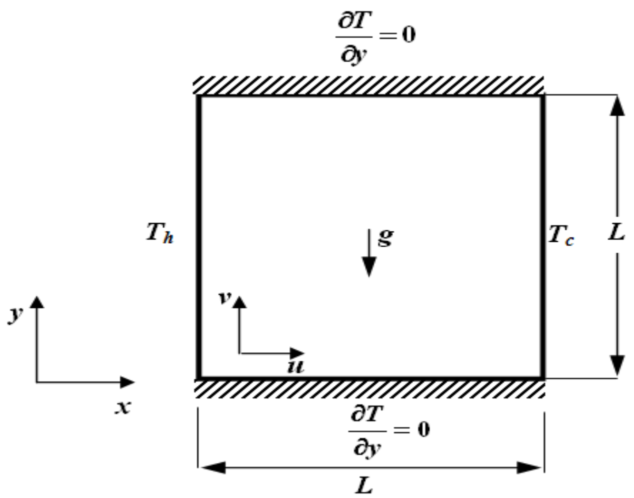
أن أغلب عمليات التحليل المستخدمة في دراسة جريان الموائع في قنوات مغلقة تعتمد على معادلات تغيرات الكتلة والعزم والطاقة والتي تكون في أغلب الأحيان معادلات ثنائية أو ثلاثية الأبعاد و في هذا البحث نحاول دراسة جريان الموائع اللانيوتنية فأن هذه المعادلات سوف يضاف لها حدود تجعل من هذه العادلات (معادلات الكتلة والعزم والطاقة) معادلات لاخطية يكون من الصعب في كثير من الأحيان حلها أويكون من المستحيل حلها في أحيان أخرى بالطرق التحليلية المعروفة . لذلك كان لابد من اللجوء الى أستخدام الطرق العددية لحل مثل هذه المعادلات اللاخطية ومن هذه الطرق هي طريقة الفروق المحدودة (Finite Difference)[4] .

المعادلات الرياضيـــة(Mathematical Formulation) :-

نفترض لدينا طبقة جريان مائع لانيوتني ثنائي البعد وبخواص فيزيائية ثابتة وهي اللزوجة الحركية(υ) والانتشار الحراري(α) و معامل التمدد الحراري(β_T) في حالة مستقرة مساحة مقطع وسطه مربع مغلق طوله الجانبي (L) كما في الشكل رقم (1) وبشروط حدية كمايلي :-

1- الجدران العمودية مسخنة بدرجات حرارية منتظمة ومختلفة(T_h &T_c).

2- الجدران الأفقية معزولة بالكامل.



شكل(1) جريان مستقرفي مقطع مربع Square cavity steady flow

يعبر عن الكثافة كقيمة ثابتة بمعادلة خطية كمايلي :-

$$\rho=\rho_o[1-\beta_T(T-T_o)] \tag{1}$$

حيث ρ_o تمثل الكثافة عند درجة حرارة الغرفة ، و β_T معامل التمدد الحراري لدرجة حرارة الغرفة T_o .

المعادلات التي تتحكم بالوسط المغلق ثنائي الأبعاد هي :-

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{2}$$

$$\rho_o\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \tag{3}$$

$$\rho_o(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y}-\rho g \tag{4}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \tag{5}$$

حيث أن (u, v, α, P, T) تمثل مركبات سرعة المائع والأنتشار الحراري والضغط ودرجة الحرارة . كما أن المعادلات من(2) الى (5) تمثل نظام المعادلات التفاضلية الجزئية . وأن معادلات الكتلة والعزم والطاقة تمثل الأساس لظاهرة الحمل الطبيعي الثنائي المغلق .

الموديل الرياضي (Prandtl – Eyring) للموائع اللانيوتنية يتمثل بالمعادلات التالية [5]:-

$$\tau = A\,sinh^{-1}(B\frac{\partial u}{\partial y}) \tag{6}$$

$$\tau_{xx}=2A\,sinh^{-1}(B\frac{\partial u}{\partial x}) \tag{7}$$

$$\tau_{yy}=2A\,sinh^{-1}(B\frac{\partial v}{\partial y}) \tag{8}$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=A\,sinh^{-1}[B(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})] \tag{9}$$

حيث أن A و B تمثل معاملات المائع للموديل الرياضي (Prandtl – Eyring) .

لأيجاد دالة الأنسياب (ψ =Stream function) والدوامة (ω=Vorticity) بصيغتهما النهائية نبدأ من دالة الأنسياب $\psi(x,y)$ بصيغتها الرياضية [6]:-

$$u=\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \& \quad v=-\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{10}$$

من المعادلة (10) نجد أن دالة الأنسياب تحقق معادلة الأستمرارية لمجال مستوي الجريان ولايكون صفر لمركبات الدوامة وكمايلي [7]:-

$$\omega=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y} \tag{11}$$

ومن جمع المعادلتين (10) و (11) نحصل على معادلة جديدة بدلالة دالة الأنسياب :-

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=-\omega \tag{12}$$

نقوم بتعويض المعادلة (12) في المعادلتين (3) و (4) للحصول على مجموعة جديدة من المعادلات :-

$$\rho_o[\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y}]=AB[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}]+AB[\frac{\partial S_1}{\partial x}-\frac{\partial S_2}{\partial y}-4\frac{\partial S_3}{\partial x}]+S_G \tag{13}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y}=\alpha(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}) \tag{14}$$

$$S_G=AB[\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4}+2\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}]+\rho_o g\beta\frac{\partial T}{\partial x} \tag{15}$$

$$S_1=\frac{\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}-\frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}}{\sqrt{1+(B(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}))^2}} \quad , \quad S_2=\frac{\frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2}}{\sqrt{1+(B(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}))^2}} \quad , \quad S_3=\frac{\frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}}{\sqrt{1+(B\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y})^2}} \tag{16}$$

وكتابة المعادلات الرياضية أعلاه بصيغتها اللابعدية (Dimensionless) نحصل على تعريف جديد للمتغيرات [8]:-

$$x^* = \frac{x}{L} \;,\; y^* = \frac{y}{L} \;,\; \theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c} \;,\; \psi^* = \frac{\psi}{\alpha} \;,\; \omega^* = \frac{\omega L^2}{\alpha}$$

نستخدم المتغيرات اللابعدية (Dimensionless Parameter) على المعادلات من (12) الى (16) نحصل على المعادلات التالية :-

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} = -\omega^* \tag{17}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}\frac{\partial \omega^*}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}\frac{\partial \omega^*}{\partial y^*} = Pr^*[\frac{\partial^2 \omega^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \omega^*}{\partial y^{*2}}] + Pr^*[\frac{\partial S_1^*}{\partial x^*} - \frac{\partial S_2^*}{\partial y^*} - 4\frac{\partial S_3^*}{\partial x^*}] + S_G^* \tag{18}$$

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial y^*}\frac{\partial \theta}{\partial x^*} - \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*}\frac{\partial \theta}{\partial y^*} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^{*2}} \tag{19}$$

حيث أن :-

$$S_G^* = Pr^*[\frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*4}} + \frac{\partial^4 \psi^*}{\partial y^{*4}} + 2\frac{\partial^4 \psi^*}{\partial x^{*2}\partial y^{*2}}] + Pr^* Ra \frac{\partial \theta}{\partial x^*} \tag{20}$$

$$S_1^* = \frac{\dfrac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}} - \dfrac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^{*3}}}{\sqrt{1 + (NE(\dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}}))^2}} \tag{21}$$

$$S_2^* = \frac{\dfrac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^{*3}} - \dfrac{\partial^3 \psi^*}{\partial y^* \partial x^{*2}}}{\sqrt{1 + (NE(\dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^{*2}} - \dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^{*2}}))^2}} \tag{22}$$

$$S_3^* = \frac{\dfrac{\partial^3 \psi^*}{\partial x^* \partial y^{*2}}}{\sqrt{1 + (NE(\dfrac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^* \partial y^*}))^2}} \tag{23}$$

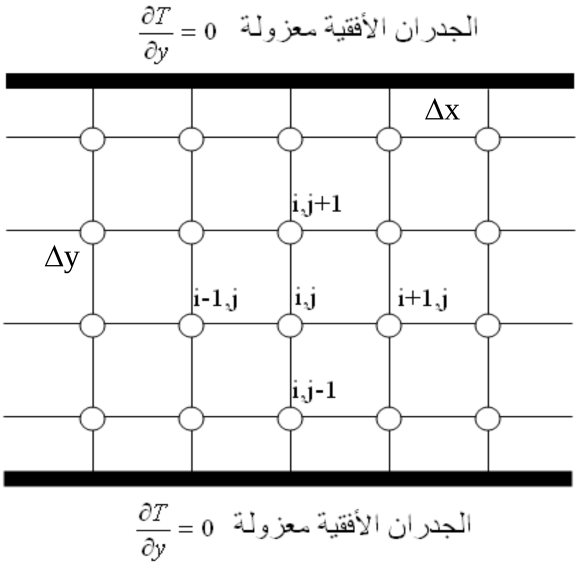
$Pr* = \dfrac{AB}{\rho_o \; \alpha}$ عدد براندتل المطور , $Ra = Ra_E = \dfrac{\rho_o g \beta L^3 (T_h - T_c)}{AB\alpha}$

$NE = \dfrac{\alpha \, B}{L^2}$ المقدار اللا بعدي (NE) للموديل الرياضي (Prandtl – Eyring)

الطـرق العدديـــة (Numerical Method) :-

تطورت الطرق العددية كثيرا في الأونة الأخيرة وأصبحت تعالج مشاكل المعادلات اللاخطية أو المعادلات المعقدة التي تحتوي على شروط حدية معقدة . وكان هذا التطور من خلال أستخدام أساليب برمجية معينة كأساليب المعاودة (Iteration) والتي تعتمد بشكل أساسي كيفية الحصول على التقارب (Convergent) في الحل العددي للمعادلات الخطية واللاخطية وخاصة عند أستخدام طريقة الفروق المحدودة (Finite Difference) . أن طريقة الفروق المحدودة تستطيع أن تحل المعادلات الخاصة بالوسط المغلق ، وعليه فأن المعادلات الثلاثة (17) و (18) و (19) سيتم حلها ضمن شروط دالة الأنسياب و درجة الحرارة و الدوامة . أن أسلوب التقارب في طريقة الفروق المحدودة للمعادلات الخاصة بالوسط المغلق تستند على تقسيم هذه الفترة ($0 \le x^* \le 1$) الى (m) من الأقسام المتساوية وتفصل هذه الأقسام بواسطة عقد (m+1) . ولغرض الحصول على شكل المعادلة التفاضلية الجزئية بطريقة الفروق المحدودة هو تقريب جميع الأشتقاقات الجزئية في المعادلة بواسطة متسلسلة تايلور [9] .

يمكن تقريب المعادلة رقم (17) بأستعمال نقطة داخل الشبكة المنتظمة $(i\ ,j)$ تمثل الأختلاف المركزي(Centeral – Difference) لجميع النقط كما في الشكل (2) ، وتكتب المعادلة بالشكل التالي[9] :-



شكل(2) يمثل حركة العناصر المتكونة داخل الشبكة المنتظمة

$$\psi^*_{i,j}=[2(\psi^*_{i+1,j}+\psi^*_{i\text{-}1,j})(\Delta y^2)+2(\psi^*_{i,j+1}+\psi^*_{i,j\text{-}1})(\Delta x^2)+2(\Delta x^2)(\Delta y^2)\omega^*_{i,j}]/[4(\Delta y^2)+4(\Delta x^2)] \quad (24)$$

ولضمان حصول التقارب في الحل العددي كان لابد من أستخدام طريقتي الفروق الأمامية (Forward) والفروق الخلفية (Backward) لما توفره هذه الطريقة من بساطة ومرونة في التعامل مع كتابة المعادلتين (18) و (19) ، حيث يمكن كتابة هاتين الطريقتين بالشكل التالي[10] :-

$$\gamma=\psi^*_{i+1,j}-\psi^*_{i\text{-}1,j} \quad \text{and} \quad \beta=\psi^*_{i,j+1}-\psi^*_{i,j\text{-}1} \qquad \text{(Central differences)} \qquad (25)$$

وتصبح المعادلتين (18) و (19) كمايلي[11] :-

$$\begin{aligned}&-(2(\Delta y^2)+2(\Delta x^2))\omega^*_{i,j}+Pr^*((\Delta y^2)(\omega^*_{i+1,j}+\omega^*_{i\text{-}1,j})+(\Delta x^2)(\omega^*_{i,j+1}+\omega^*_{i,j\text{-}1}))+\\&(\Delta x^2)(\Delta y^2)[Pr^*(\frac{\partial S_1^*}{\partial x^*}-\frac{\partial S_2^*}{\partial y^*}-4\frac{\partial S_3^*}{\partial x^*})+S_G^*+(\frac{\gamma}{2\Delta x^2}\frac{\partial\omega^*}{\partial y^*}-\frac{\beta}{2\Delta y^2}\frac{\partial\omega^*}{\partial x^*})]=0\end{aligned} \qquad (26)$$

$$\begin{aligned}&-(2(\Delta y^2)+2(\Delta x^2))\,\theta_{i,j}+((\Delta y^2)(\theta_{i+1,j}+\theta_{i-1,j})+(\Delta x^2)(\theta_{i,j+1}+\theta_{i,j-1}))\\&+(\Delta x^2)(\Delta y^2)[\frac{\gamma}{2\Delta x^2}\frac{\partial\theta}{\partial y^*}-\frac{\beta}{2\Delta y^2}\frac{\partial\theta}{\partial x^*}]=0\end{aligned} \qquad (27)$$

الشروط الخاصة γ

$\gamma\geq 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f_{i,j+1}-f_{i,j}}{\Delta y},\ (b_1=1),$ **and** $(b_2=0)$ (Forward differences)

$\gamma<0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{f_{i,j}-f_{i,j-1}}{\Delta y_r},\ (b_1=0),$ **and** $(b_2=1)$ (Backward differences)

الشروط الخاصة β

$\beta\geq 0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_{i,j}-f_{i-1,j}}{\Delta x_r},\ (a_1=1),$ **and** $(a_2=0)$(Backward differences)

$\beta<0,\ \frac{\partial f}{\partial x}=\frac{f_{i+1,j}-f_{i,j}}{\Delta x},\ (a_1=0),$ **and** $(a_2=1)$(Forward differences)

وبعد أستخدام الشروط السابقة فأن المعادلتين (26) و (27) تصبحان كالأتي[11] :-

$$\omega^*_{i,j} = [(0.5\gamma b_1(\Delta x)(\Delta y) + Pr^*(\Delta x^2))\omega^*_{i,j+1} + (0.5\beta a_1(\Delta x)(\Delta y) + Pr^*(\Delta y^2))\omega^*_{i-1,j}$$
$$-(0.5\beta a_2(\Delta x)(\Delta y) - Pr^*(\Delta y^2))\omega^*_{i+1,j} - (0.5\gamma b_2(\Delta x)(\Delta y) - Pr^*(\Delta x^2))\omega^*_{i,j-1} +$$
$$Pr^*(\Delta x^2)(\Delta y^2)(\frac{S^*_{1)i+a_2,j} - S^*_{1)i-a_1,j}}{(\Delta x)} - \frac{S^*_{2)i,j+b_1} - S^*_{2)i,j-b_2}}{(\Delta y)} - 4\frac{S^*_{3)i+a_2,j} - S^*_{3)i-a_1,j}}{(\Delta x)})$$
$$+ S^*_{G)i,j}(\Delta x^2)(\Delta y^2)]/[2(\Delta y^2) + 2(\Delta x^2) + (\Delta x^2)(\Delta y^2)(\frac{\gamma}{2(\Delta x)(\Delta y)^{b_1}(-\Delta y)^{b_2}}$$
$$+ \frac{\beta}{2(\Delta y)(\Delta x)^{a_1}(-\Delta x)^{a_2}})] \qquad (28)$$

$$\theta_{i,j} = [(0.5\gamma b_1(\Delta x)(\Delta y) + (\Delta x^2))\theta_{i,j+1} + (0.5\beta a_1(\Delta x)(\Delta y) + (\Delta y^2))\theta_{i-1,j}$$
$$-(0.5\beta a_2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta y^2))\theta_{i+1,j} - (0.5\gamma b_2(\Delta x)(\Delta y) - (\Delta x^2))\theta_{i,j-1}]/$$
$$[2(\Delta y^2) + 2(\Delta x^2) + (\Delta x^2)(\Delta y^2)(\frac{\gamma}{2(\Delta x)(\Delta y)^{b_1}(-\Delta y_r)^{b_2}} + \frac{\beta}{2(\Delta y)(\Delta x_r)^{a_1}(-\Delta x)^{a_2}})] \qquad (29)$$

ولتسريع عملية الحل العددي كان لابد من أستخدام تقنية تعجل من التقارب في الحل العددي للمعادلتين (29 و 28) وهذه التقنية هي طريقة تحت – التراخي (Under – Relaxation Method) والتي يمكن تمثيلها بالشكل التالي[9] :-

$$\omega^{*k+1}_{i,j} = (1 - Fv)\omega^{*k}_{i,j} + (Fv)\omega^*_{i,j} \qquad (30)$$

حيث أن ($\omega^*_{i,j}$) تكون عبارة عن القيم المحسوبة من المعادلة (28) و (Fv) يمثل عامل التراخي للدوامة ومـــداه من (2 – 0) .

المعادلات الثلاثة (24) و(28) و (29) تم تطبيق الشروط الحدية الأتية عليها[12] :-

$$0 \le x^* \le 1 \quad y^* = 0 \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = 0$$

$$0 \le x^* \le 1 \quad y^* = 1 \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial y^*} = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial y^*} = 0$$

$$x^* = 0 \quad 0 \le y^* \le 1 \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad \theta = \theta_h$$

$$x^* = 1 \quad 0 \le y^* \le 1 \quad \psi^* = \frac{\partial \psi^*}{\partial x^*} = 0 \quad \theta = \theta_c$$

ويمكننا كتابة الشروط الحدية الخاصة بالدوامة بأستخدام طريقة الفروق المحدودة بالشكل التالي :-

$$\omega_o = \frac{3(\psi_o - \psi_1)}{\Delta n^2} - \frac{\omega_1}{2} \qquad (31)$$

حيث أن :- $\Delta n = \Delta y$ أو Δx

الكميات الفيزيائية المهمة في هذه المسألة هي عدد نسلت الموجود على أمتداد الجدار المسخن ويعرف بواسطة المعادلة التالية[13] :-

$$Nu = \frac{qL}{k(T_h - T_c)} \qquad (32)$$

ويعرف معدل عدد نسلت بالمعادلة التالية :-

$$Nu_a = \int_0^1 \frac{\partial\theta}{\partial x^*}\bigg|_{x^*=0\,\mathrm{or}\,1} dy \qquad (33)$$

تمّ بناء برنامج بلغة الفجوال بيسك لحساب الأمور الأتية :-

1- المعادلة (24) تستعمل لحساب قيم جديدة للمجال (ψ^*) من خلال نقطة معتمدة على نقطة .

2- المعادلة (28) تستعمل لحساب قيم جديدة لـ (ω^*) .

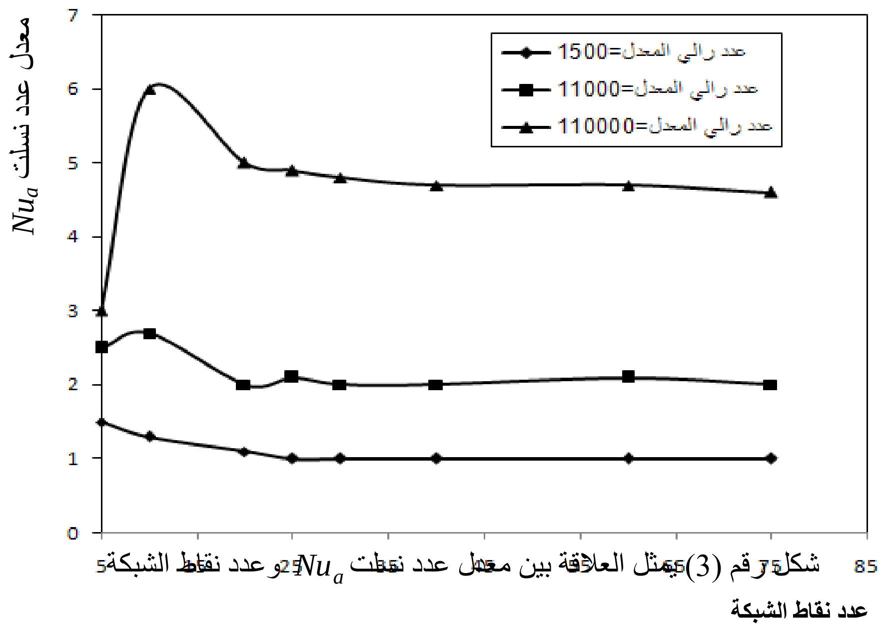
3- معادلة الطاقة (29) تستعمل لحساب قيم جديدة للمجال (θ) .

4- توقف تكرار الحساب في البرنامج من خلال حساب نسبة الخطأ المتبقي المقبولة من خلال المعادلة التالية :-

$$\left[\sum_{i,J} \left|\tau^{r+1}{}_{i,j} - \tau^{r}{}_{i,j}\right| \Big/ \sum_{i,J} \tau^{r+1}{}_{i,j} \right] \;<= 10^{-5} \qquad (34)$$

حيث أن (r) قيمة توقف التكرار ، (τ) المتغير المتكرر وهو أما (ψ^* أو ω^* أو θ).

لغرض أختيار حجم الشبكة تم أجراء تجارب لشبكات متعددة ألاحجام يتراوح بين (5×5) الى (75×75) مع قيم متغيرة لعدد رالي المطور($1500 \le Ra \le 110000$) مع وضع قيمة ثابتة لعدد براندتل المطور(15) ، وتم رسم علاقة كما في الشكل رقم (3) بين معدل عدد نسلت المحسوب وعدد نقاط الشبكة ، ومن هذا الشكل تم أختيار الشبكة ذات الحجم (40×40) لأعطاء سرعة ودقة في الحساب وعدم شذوذ النتائج .



شكل رقم (3) يمثل العلاقة بين معدل عدد نسلت Nu_a وعدد نقاط الشبكة

المنــاقشـــــــــــــة (Discussion) :-

الشكلين (4) و (5) يمثلان دالة الأنسياب ψ_{max} ومعدل عدد نسلت Nu_a لقيم مختلفة لمتغيرات النظام وللحالات المذكورة في الشروط الحدية . حيث أن الطاقة تنتقل من الجدار الساخن الى الجدار البارد بواسطة التوصيل عندما يكون معدل عدد نسلت Nu_a يساوي (1) وعدد رالي المطور (Ra_E) أقل من (1500) والمقدار اللابعدي (NE) أقل من (1) .

من الشكل رقم (4) يلاحظ أن القيمة العظمى لدالة الأنسياب ψ_{max} تساوي (9.8) عند قيم Ra_E=110000 وعدد براندتل Pr^*=15 و NE=0 وهذا يتطابق مع ماتوصل اليه الباحثين للموائع النيوتنية للجريان [14,15] .

يتضح من الشكل رقم (4) أيضا عند قيم قليلة لرالي (Ra_E < 1500) فأن دالة الأنسياب تكون ثابتة تقريبا بسبب هيمنة التوصيل الحراري كما ذكر سابقا ، بينما عند قيم عالية Ra_E فأن دالة الأنسياب تزداد بزيادة NE وتصل الى قيمة ثابتة عندما يكون

$NE \geq 1$ وقيم رالي $Ra_E \geq 11000$ ، وتستمر زيادة دالة الأنسياب وتصل أعلى قيمة لها (25.32) عند Ra_E=110000 وPr^*=15 وNE=1 بمعنى زيادة السرعة . ومن هنا يتبين بأن دالة الأنسياب ψ_{max} تعتمد على عدد رالي المعدل والمقدار اللابعدي وثبوت عدد براندتل [16].

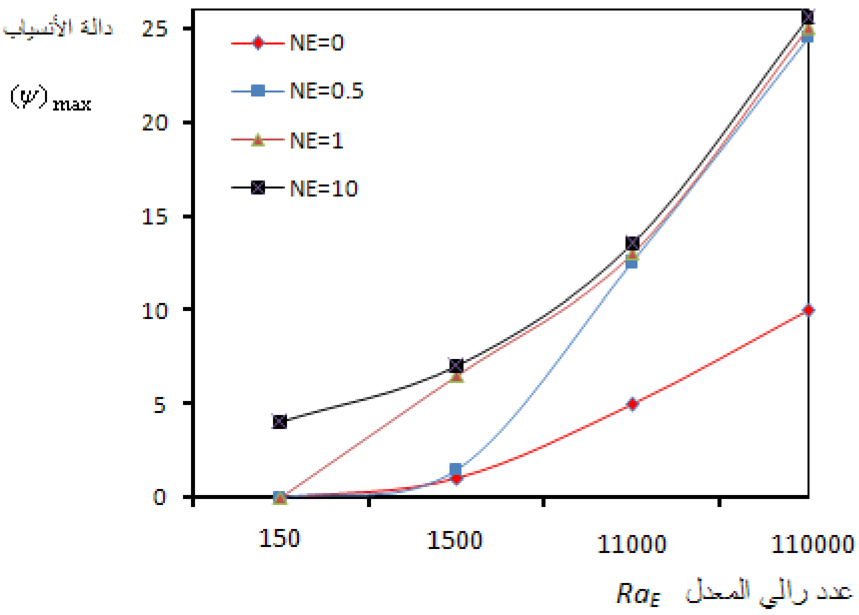
أن أنتقال الحرارة بالحمل الطبيعي يتم من خلال تقيم أداء معامل أنتقال الحرارة (h) والذي يكون عن طريق معدل عدد نسلت Nu_a كدالة لتأثير المتغيرات [17] . حيث يبين شكل رقم (5) تباين معدل عدد نسلت Nu_a مقابل عدد رالي المعدل مع قيم مختلفة للمقدار اللابعدي(NE) وعدد براندتل (Pr^*=15) بسبب كون قوة اللزوجة أعظم من قوة الطفو(Buoyancy) لذا تكون الحرارة منقولة بالتوصيل . لوحظ أن الزيادة تكون صغيرة نسبيا لمعدل عدد نسلت Nu_a عندما يكون عدد رالي المعدل Ra_E أقل من (1500) لقيم مختلفة للمقدار اللابعــدي NE وثبوت عدد براندتل Pr^* ، بينما تكون الزيادة سريعة لمعدل عدد نسلت Nu_a بسبب زيــادة (NE) وتصل أعلى قيمـــة لها (11.42) عند Ra_E = 110000 بمعنى زيادة أنتقال الحرارة بالتوصيل . حيث يلاحظ تأثير(NE) على Nu_a يكون أكثر وضوحا عند زيادة عدد رالي المعدل Ra_E .

نلاحظ من الشكل (6) أن معدل عدد نسلت على أمتداد الجدار المسخن للقناة المربعة المغلقة في حالة مستقرة لقيم رالي المعدل من (1500 الى 110000) بثبوت عدد براندتل Pr^*=15 وأعطت أختلاف قليل مع ماتوصل أليه الباحث (Elba وأخرون) [2] وكذلك (Hortmann وأخرون) [15] و (Davis) [16] . وأن مقدار الأختلاف لايتجاوز (±5%) .

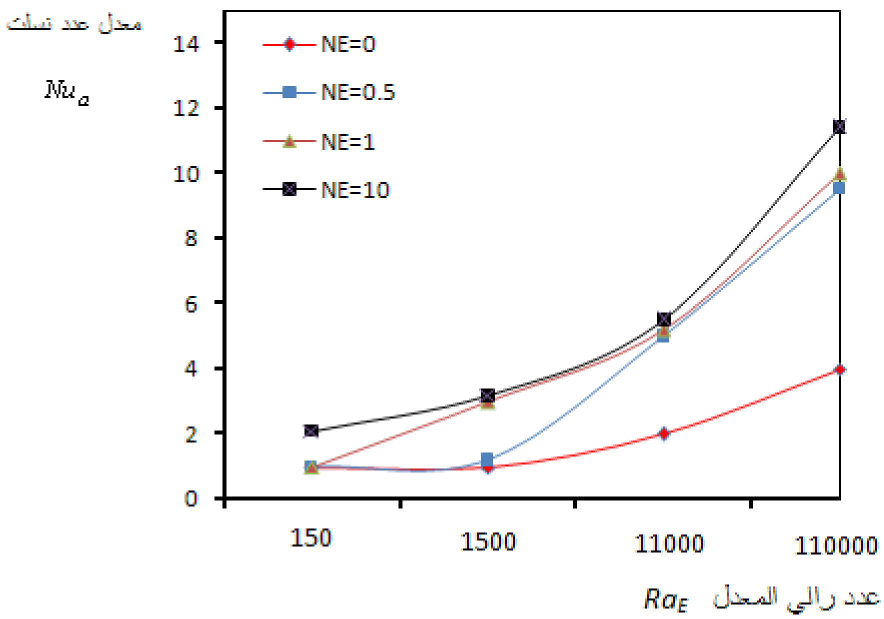
الاستنتاجــات (Conclusions) :-

من خلال النتائج و المخططات التي تم أستعراضها سابقا يمكننا أن نصل الى الاستنتاجات التالية :-

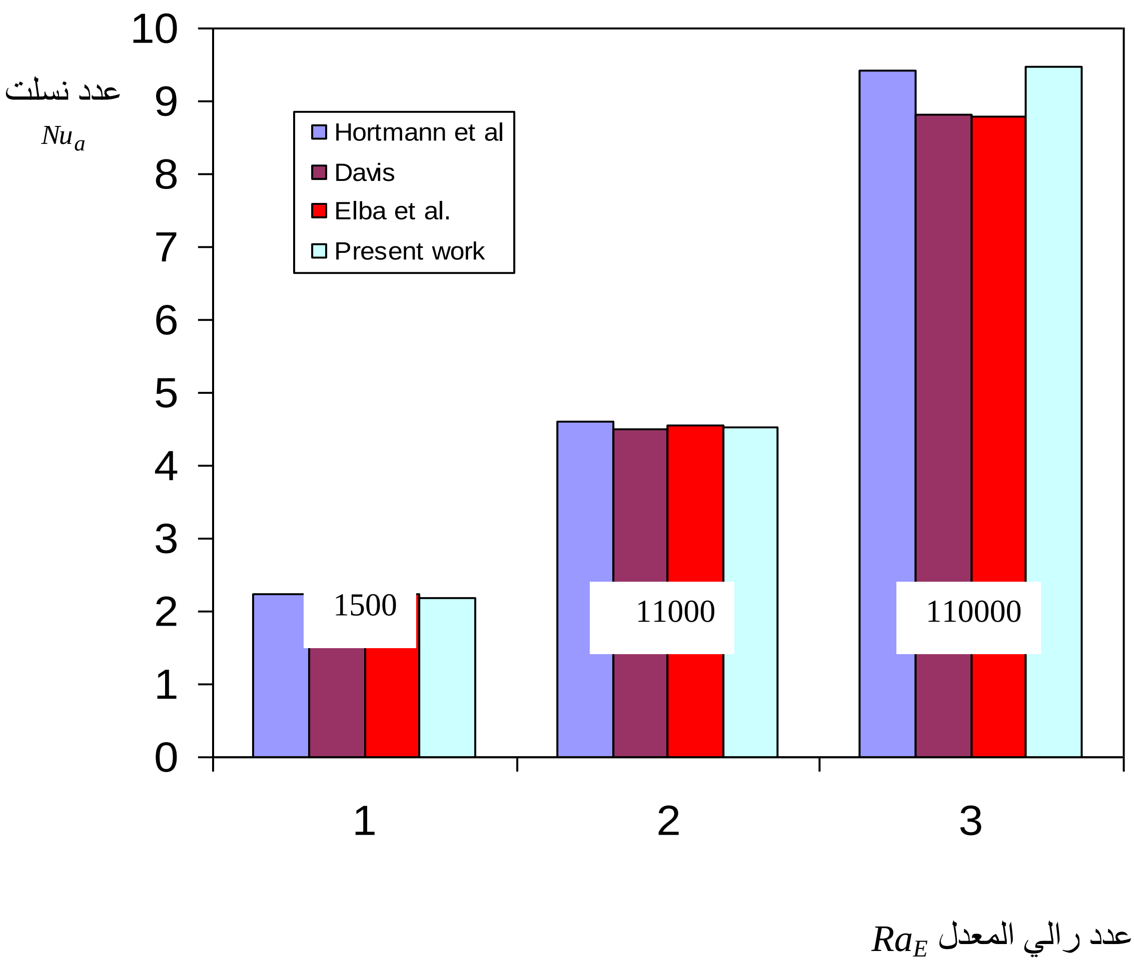
1- زيادة المقدار اللا بعدي (NE) يؤدي الى زيادة معدل عدد نسلت Nu_a ويصل أعلى قيمة له (11.42) ، وهذا يعني زيادة درجة الحرارة بسبب زيادة معامل أنتقال الحرارة بالحمل (h) .
2- زيادة المقدار اللا بعدي (NE) يؤدي الى زيادة دالة الأنسياب ψ_{max} وتصل أعلى قيمة لها (25.32) ، وهذا يعني زيـادة السرعة بسبب تأثيرات درجات الحرارة وتأثيرات الطفو(Buoyancy) .
3- عدد رالي المعدل له تأثير كبير على معدل أنتقال الحرارة .
4- أمكن الحصول على تصور لكفاءة النظام المغلق للقناة المربعة من خلال أنتقال الحرارة أو كفاءة التصميم .



شكل رقم (4) يمثل العلاقة بين دالة الأنسياب $(\psi)_{max}$ مع عدد رالي المعدل Ra_E لقيم مختلفة لـ NE و Pr^*=15



شكل رقم (5) يمثل العلاقة بين معدل مع لقيم مختلفة لـ NE و Pr^{*}=15



شكل رقم (6) يمثل مقارنة بين معدل عدد نسلت Nu_a مع الدراسات السابقة

References :-

[1] http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/thermo/heatra.htm/. For general information on Heat Transfer , Thermodynamics and Conduction >

[2] Elba , O. B . , Julio , C . R. , and Obidio , R. , " Numerical Simulation for the Natural Convection Flow", Int. Journal of Numerical methods in Fluids, Vol. 30, PP. 237-254, 2000.

[3] Miomir, R., "Numerical Investigation of Laminar Natural Convection in Inclined Square Enclosures", J. Appl . Phys., Chemistry and Technology, Vol. 2, PP.149-157, 2001.

[4] Chanson,h. ," Applied Hydrodynamics : An Introduction to ideal and Real Fluid Flows ",Oxford University , Press , Taylor and Francis Group, Leiden ,The Netherlands , pp . 478 , 2009 .

[5] J. M. Coulson, and J. S. Richardson, "Chemical Engineering", Bergamon, International Library, Vol. 3, 1983.

[6] B.S.Massey and J.ward-Smith , "Mechanics of Fluid",7th ed.,Nelson Thomes,UK,1998 .

[7] Ohkitani , K.,"Elementary Account of Vorticity Related Equations ",Cambridge University press.January 30, pp .58-63,2005.

[8] Myers, E., "Analytical Methods in Conduction Heat Transfer", Mc Graw – Hill Book Company, Inc., 1971.

[9] Bejan, A., "Convection Heat Transfer", Wiley, Inter Science Publication, John Wiley and Sons, Inc., 1984.

[10] Najdat N., "Laminar Flow Separation in Constructed Channel", Ph.D. Thesis, Michigan State University, 1987.

[11] Dr. Ala′a A. Mahdi , "Laminar Natural Convection of Newtonian and Non – Newtonian Fluids Inside Triangular Enclosure ", University of Kufa , 2007.

[12] G., Lauriat, "Numerical Study of the Interaction of Natural Convection with Radiation in Nongray Gases in a Narrow Vertical Cavity", Int. Journal of Heat Transfer, Vol. 2, PP. 153-158, 1982.

[13] Frank, K., and Mark, S., "Principles of Heat Transfer", 5th Edition, PWS Publishing Company, 1997.

[14] Subba, R., "Numerical Simulation of Laminar Natural Convection in Shallow Inclined Enclosures", Int. Journal of Heat Transfer, Vol. 2, PP. 263-268, 1982.

[15] M. Hortmann, M. Peric, and G. Scheuerer, "Finite Volume Multi grid Prediction of Laminar Natural Convection: Bench-Mark Solutions", Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 11, PP. 189-207, 1990.

[16] G., Davis , "Natural Convection of Air in a Square Cavity: A Bench Mark Numerical Solution", Int. Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 3, PP. 249-264, 1983.

[17] F.M.White ," Fluid Mechanics",5thed.,McGraw-Hill Book Company, Inc., New York , 2003.