مقارنة طرائق تقدير دالة المعولية لتوزيع رايلي المركب

د. ليلى مطر ناصر
layla_matter@yahoo.com
الجامعة المستنصرية - كلية الهندسة - قسم الهندسة الميكانيكية

المستخلص

يعتبر توزيع رايلي احد التوزيعات المهمة في مجال وصف الظواهر خصوصا في تحليل بيانات الحياة ويوفر توقعات جيدة لأوقات الفشل المحتملة. وتعتبر التوزيعات المركبة من توزيعين او اكثر احد الاساليب الحديثة للحصول على توزيعات جديدة قادرة على وصف ظواهر بشكل ادق من السابق.

يتم في هذا البحث دراسة التوزيع المركب الناتج من توزيع رايلي والتوزيع المنتظم، حيث اشتقاق دالة الكثافة الاحتمالية والتجميعية للتوزيع الجديد بعدها تم تقويم المعلمة ودالة المعولية باستخدام طريقة الإمكان الأعظم وطريقة المربعات الصغرى و طريقة بيز للتوزيع الجديد. ومن خلال دراسة المحاكاة سيتم المقارنة بين تلك الطرائق عددياً من خلال الاعتماد على المؤشر الإحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (MSE). وقد تبين تفوق طريقة العزوم مقارنتا بالطرائق الاخرى ولجميع أحجام العينات وقيم المعلمات وقيم ثابت المعلومات الأولية المستخدمة.

الكلمات الرئيسية: توزيع رايلي، التوزيعات المركبة، طريقة الامكان الاعظم، طريقة العزوم، اسلوب بيز، متوسط مربعات الخطأ.

المقدمة و هدف البحث

يتمتع توزيع رايلي بمكانة مهمة بين التوزيعات الاحتمالية ويعتبر حالة خاصة من توزيع ويبل وله دور كبير في التطبيقات الصناعية والطبية حيث يستخدم في اختبارات الحياة [1]، وتعتبر فكرة التوزيعات المركبة طريقة جديدة للحصول على توزيعات احتمالية جديدة تصف بشكل اكثر دقة الظواهر الطبيعية. ففي عام 2008 قدم الباحثون Akinsete، Famoye و Lee توزيع مركب من توزيع بيتا وتوزيع باريتو[2] وفي عام 2009 قدم الباحثون Barreto-Souza، Santos و Cordeiro توزيع مركب من توزيع بيتا والتوزيع الاسي العام[3]. وفي عام 2011 قدم الباحثان Cordeiro و Lemonte توزيع مركب من توزيع بيتا و توزيع نصف-كوشي[4]. وفي عام 2013 قدم الباحثان Al-Kadim توزيع مركب من التوزيع الاسي والتوزيع المنتظم وتم فيه التطرق الى خصائص التوزيع المقترح وطرائق تقدير معلمات التوزيع[5].

يهدف هذا البحث الى اشتقاق توزيع مركب من التوزيع المنتظم وتوزيع رايلي و التطرق الى ثلاث طرائق لتقدير دالة المعولية للتوزيع المقترح والمقارنة بين تلك الطرائق باستخدام المحاكاة .

الجانب النظري:

أن دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع رايلي بمعلمة (θ) تأخذ الشكل التالي:

$$f(x,\theta) = \frac{x}{\theta^2} e^{-\frac{x^2}{2\theta^2}} \qquad \theta > 0 \ \ ,0 < x < \infty \qquad \text{...............}(1)$$

إذ إن:

θ : تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

أن توزيع رايلي ممكن تطبيقه على المكائن والمعدات ذات معدل فشل متغير مع الزمن، أما دالة التوزيع التراكمية لتوزيع رايلي هي:

$$F(t;\theta) = \Pr[T \le t] = \int_0^t f(u)du$$

$$= \int_\infty^t f(u)du = 1 - \exp[-t^2/\theta^2] \qquad \theta > 0 \quad ...(2)$$

وبذلك فأن دالة المعولية لهذا التوزيع ستكون:

$$R(t) = \Pr\left[T > t\right] = 1 - F(t) = \int_t^\infty f(u;\alpha,\beta)du = \exp[-t^2/\theta^2] \qquad \theta > 0 \ ...(3)$$

وعليه فان دالة المخاطرة لهذا التوزيع ستكون كالآتي:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{2t}{\theta^2} \qquad \text{..............................}(4)$$

ونلاحظ من المعادلة رقم (4) أن معدل الفشل سيكون متغير مع الزمن. اما دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المنتظم فتاخذ الشكل التالي:

$$f(x;a,b) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b \qquad \text{...............}(5)$$

تعتمد فكرة التوزيع المركب على التحويل التالي [5]:

$$G(x)=\int_{a}^{bF(x)}\frac{1}{(b-a)}dx=\frac{bF(x)-a}{(b-a)} \quad \ldots\ldots(6)$$
$$=1-\frac{be^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)}$$

اذ ان:

$G(x)$: هي دالة التوزيع التراكمية للتوزيع المركب باستخدام التوزيع المنتظم و توزيع رايلي.

$F(x)$: هي دالة التوزيع التراكمية لتوزيع رايلي.

وبذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع المركب ستكون:

$$g(x;a,b,\theta)=\frac{dG(x)}{dx}=\frac{-be^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}\left(-x/\theta^2\right)}{(b-a)} \quad \ldots\ldots..(7)$$
$$=\frac{b}{(b-a)}\frac{x}{\theta^2}e^{\frac{-x^2}{\theta^2}}$$
$$=w(a,b)\,f(x;\theta)$$

ولايجاد الحدود الدنيا والعليا وبالاعتماد على خصائص دالة التوزيع التراكمية فان الحد الادنى سيكون:

$$G(x;a,b,\theta)=0$$
$$1-\frac{be^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)}=0$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{\log\left(\frac{b}{b-a}\right)^{2\theta^2}}$$

والحد الاعلى سيكون:

$$G(x;a,b,\theta)=1$$

$$1-\frac{be^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)}=1$$

$$\frac{be^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)}=0$$

فان

$$\Rightarrow x=\infty$$

وباخذ التكامل للمعادلة رقم (7) بالاعتماد على الحد الادنى والاعلى فان التكامل يساوي الواحد الصحيح وبالتالي فان الدالة السابقة هي دالة كثافة احتمالية وكما يلي:

$$\int_{\sqrt{\log\left(\frac{b}{b-a}\right)^{2\theta^2}}}^{\infty}\frac{b}{(b-a)}\frac{x}{\theta^2}e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}dx$$

$$=\frac{b}{(b-a)\theta^2}\int_{\sqrt{\log\left(\frac{b}{b-a}\right)^{2\theta^2}}}^{\infty}x\quad e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}dx$$

وبعمل التحويل التالي:

$$\frac{1}{2}\frac{x^2}{\theta^2}=y$$

فان التكامل السابق يصبح:

$$\int_{\sqrt{\log\left(\frac{b}{b-a}\right)^{2\theta^2}}}^{\infty}\frac{b}{(b-a)}\frac{x}{\theta^2}e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}dx=\frac{b}{(b-a)\theta^2}\left[x\frac{e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{\frac{-x}{\theta^2}}\Bigg|_{\log(b/(b-a))}^{\infty}\right]=1$$

اي ان الدالة السابقة هي دالة كثافة احتمالية.

اشتقاق العزم للرتبة (r):

للحصول على العزوم للتوزيع المركب وللرتبة (r) نستخدم الصيغة التالية وكما يلي:

$$E\left[X^r\right]=\int_{\sqrt{\log\left(\frac{b}{b-a}\right)^{2\theta^2}}}^{\infty}\frac{b}{(b-a)}\frac{x^{r+1}}{\theta^2}e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}dx \qquad \text{..................(8)}$$

وباستخدام التحويل التالي:

$$\frac{1}{2}\frac{x^2}{\theta^2}=y\Rightarrow x^2=2\theta^2 y$$
$$\Rightarrow x=\theta\sqrt{2y}$$
$$\Rightarrow dx=\frac{\theta}{\sqrt{2y}}dy$$

فان:

$$E\left[X^r\right]=\frac{b}{(b-a)\theta^2}\int_{\log(b/(b-a))}^{\infty}\sqrt{2}^{r+1}\theta^{r+1}y^{(r+1)/2}e^{-y}\sqrt{2}\theta\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$$

$$E\left[X^r\right]=\frac{b\theta^r 2^{r/2}}{(b-a)}\int_{\log(b/(b-a))}^{\infty}y^{r/2}e^{-y}dy=\frac{b\theta^r 2^{r/2}}{(b-a)}(1-incomplete\ gamma(\log(\frac{b}{b-a}),r/2+1)) \qquad \text{.......(9)}$$

اذ ان:

Incomplete gamma (x,y): هي دالة كاما الغير كاملة.

طرائق التقدير المستخدمة لتقدير معلمات ودالة المعولية للتوزيع المركب هي:

1. طريقة الإمكان الأعظم: Maximum Likelihood Method(M.L.E)

تهدف هذه الطريقة إلى جعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى،فإذا كانت لدينا عينة عشوائية $(t_1,t_2,...,t_n)$ تتوزع وفقا للتوزيع الموضح في المعادلة رقم (7)، فان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل دالة الإمكان في نهايتها العظمى ويمكن الحصول عليه باشتقاق لوغاريتم دالة الإمكان ومساواتها بالصفر،فإذا كانت (t) تتوزع توزيع رايلي-التوزيع المنتظم فان دالة الإمكان ستكون كالآتي:

$$L(a,b,\theta)=\frac{b^n}{(b-a)^n}\frac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\theta^{2n}}e^{\frac{-\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}} \qquad \text{................ (10)}$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين فان المعادلة تصبح كالأتي:

$$\log L = n\log b - n\log(b-a) + \sum_{i=1}^{n}\log x_i - 2n\log\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2\theta^2} \quad ; \; i=1,2,...,n \quad ......(11)$$

وباشتقاق المعادلة السابقة بالنسبة إلى θ ومساواتهما بالصفر نحصل على مقدر طريقة الإمكان الأعظم للمعلمة β:

$$\hat{\theta}_{MLE} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2n}} \quad ....(12)$$

وبالاعتماد على خاصية الثبات Invariant Property التي تمتاز بها هذه الطريقة فان مقدر دالة المعولية لطريقة الإمكان الأعظم سيكون كالأتي:

$$\hat{R}_{MLE}(t) = \frac{b e^{\frac{-t^2}{2\hat{\theta}_{MLE}^2}}}{(b-a)} \quad ....(13)$$

2. طريقة المربعات الصغرى :Method of Least Square (L.S)

تتميز طريقة المربعات الصغرى بسهولتها فهي تعتمد على تقدير العلاقة الخطية ما بين المتغير التوضيحي والمتغير التابع، ومن خلال الاعتماد على مقدر لا معلمي لدالة التوزيع التراكمية ومساواة هذا المقدر مع دالة التوزيع التراكمية واعادة ترتيب المعادلة لتصبح بشكل يشابه النموذج الخطي العام ومن خلال الحصول على تقديرات معلمات النموذج يتم الحصول على مقدرات التوزيع الاحتمالي وكما يلي:

$$G(x) = 1 - \frac{b e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)} \quad ....(14)$$

وباعتماد المقدر الامعلمي لدالة التوزيع التراكمية وكما يلي:

$$\hat{F} = \frac{i}{(n-1)} \quad ....(15)$$

$$\hat{F} = 1 - \frac{b e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)} \quad ....(16)$$

وباجراء الترتيب للمعادلة رقم (16) فان :

$$-2\log\left[\frac{(b-a)}{b}(1-\hat{F})\right] = \frac{1}{\theta^2} \quad x^2$$

ان الانموذج السابق يشبه الانموذج الخطي العام بافتراض ان:

$$y = -2\log\left[\frac{(b-a)}{b}(1-\hat{F})\right]$$

$$x = x^2$$

$$\beta = \frac{1}{\theta^2}$$

ومن خلال الحصول على مقدرات لمعلمه الانموذج الخطي العام سيكون:

$$\hat{\theta}_{LS} = \sqrt{\frac{1}{\hat{\beta}}} \qquad ....(17)$$

اذ ان

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{x})^2}$$

اما مقدر التقريبي لدالة المعولية لطريقة المربعات الصغرى سيكون كالأتي:

$$\hat{R}_{LS}(t) = \frac{b e^{\frac{-t^2}{2\hat{\theta}_{LS}^2}}}{(b-a)} \qquad .... (18)$$

3. طريقة بيز(Bayes) Method of Bayes

تقوم طريقة بيز بتوظيف المعلومات الاولية او المسبقة حول المعلمة المطلوب تقديرها بالاضافة الى بيانات العينة ،وهي بذلك تتعامل مع المعلمة كونها متغير عشوائي له اي توزيع في حال كون المعلومات الاولية "معلوماتية" او قد تاخذ اي دالة في حال كون المعلومات الاولية "غير معلوماتية" .وتدمج المعلومات الاولية مع بيانات العينة وفقا لصيغة بيز المعكوسة للحصول على التوزيع اللاحق للمعلمة والذي يستخدم للحصول على تقدير المعلمة وفقا لدالة خسارة معينة.

لتكن $(t_1, t_2, ..., t_n)$ عينة عشوائية تتوزع توزيع رايلي المركب، فان معلومات جيفري الأولية يتم حسابها وفق العلاقة التالية:

$$B(\theta) = \frac{1}{\theta^k} \qquad .... (19)$$

اذ ان :

K=0,1,2,3,…

وللحصول على التوزيع اللاحق بالاعتماد على المعلومات الأولية سوف نطبق صيغة بيز التالية:

$$\pi(\theta \setminus X)=\frac{L(a,b,\theta)B(\theta)}{\int_0^\infty L(a,b,\theta)B(\theta)d\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(20)$$

وبذلك فان:

$$\int_0^\infty L(a,b,\theta)B(\theta)d\theta=\int_0^\infty \frac{b^n}{(b-a)^n}\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\theta^{2n}}e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2}}\frac{1}{\theta^k}d\theta \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(21)$$

$$=\frac{b^n}{(b-a)^n}\prod_{i=1}^n x_i\int_0^\infty \theta^{-2n-k}e^{\frac{-\sum_{i=1}^n x_i^2}{2\theta^2}}d\theta$$

وباستخدام التحويل التالي:

$$\frac{1}{2}\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\theta^2}=Z$$

$$\Rightarrow \theta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}Z^{-1/2}$$

$$d\theta=\frac{-1}{2}Z^{-3/2}\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}}dZ$$

$$\int_0^\infty L(a,b,\theta)B(\theta)d\theta=\frac{bn\prod_{i=1}^n x_i\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\right)^{-n-0.5k+0.5}\Gamma\left(n+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)}{(b-a)^n 2} \qquad \ldots\ldots..(22)$$

وبذلك فان دالة الكثافة الاحتمالية الشرطية اللاحقة للمعلمة θ بوجود بيانات العينة $(t_1,t_2,...t_n)$ ستكون:

$$\pi(\theta \setminus x)=\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\right)^{n+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^{n+k/2}e^{-(\sum_{i=1}^n x_i^2)\frac{1}{\theta^2}}}{\Gamma(n+k/2-1/2)} \quad ; \quad \theta>0 \qquad \ldots\ldots.(23)$$

وبالاعتماد على دالة الخسارة التربيعية squared Error Loss Function والتي تعتبر من دوال الخسارة الشائعة، فان مقدر بيز سوف يكون التوقع للتوزيع اللاحق السابق:

$$\hat{\theta}_{Bay} = \underset{post}{E}(\theta/x) = \int_0^{\theta} \theta \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{n+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\theta^2}\right)^{n+k/2} e^{-(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\frac{1}{\theta^2}}}{\Gamma(n+k/2-1/2)} d\theta \qquad \text{.......(24)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{n+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+k/2-1/2)} \int_0^{\theta} \theta^{-2n-k+1} e^{-(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\frac{1}{\theta^2}} d\theta$$

وباجراء التحويل التالي:

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)\frac{1}{\theta^2} = Z$$

$$\Rightarrow \theta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{Z}}$$

$$d\theta = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{1/2} \frac{-1}{2} Z^{-3/2} dz$$

فان مقدر بيز يكون

$$\hat{\theta}_{Bay} = E(\theta/x) = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right)^{1/2} \Gamma\left(n+\frac{k}{2}-1\right)}{\Gamma\left(n+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}\right)} \qquad \text{.............(25)}$$

كما أن مقدر بيز لدالة المعولية سيكون أيضاً التوقع لدالة المعولية بالاعتماد على التوزيع اللاحق وكما يلي:

$$\hat{R}_{Bay}(t)=\underset{post}{E}\left(\frac{be^{\frac{-t^2}{2\theta^2}}}{(b-a)}\right)=\int_0^{\theta}\frac{be^{\frac{-t^2}{2\hat{\theta}_{LS}^2}}}{(b-a)}\frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2}\right)^{n+\frac{k}{2}-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\theta^2}\right)^{n+k/2}e^{-(\sum_{i=1}^{n}x_i^2)\frac{1}{\theta^2}}}{\Gamma(n+k/2-1/2)}d\theta$$

$$=\frac{b}{(b-a)}\left[\frac{1}{1+t^2/\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\right] \qquad ....(26)$$

الجانب التجريبي:

تم إجراء البحث باستخدام المحاكاة لغرض المقارنة بين الطرائق المختلفة تجريبياً،حيث يتميز هذا الأسلوب بالمرونة ويوفر الكثير من الوقت والجهد والمال وفيه يتم توليد البيانات نظرياً من دون الحصول عليها عملياً وأيضاً دون الإخلال بدقة النتائج المطلوبة وتتلخص هذه الطريقة بالخطوات التالية:

1. تحديد القيم الافتراضية: لقد تم اختيار خمسة أحجام للعينة هي (100،25،50،15،10) تمثل حالة حجم العينة الصغيرة المتوسطة والكبيرة وقيم المعلمات الافتراضية والثابت k كما في الجدول التالي:

جدول رقم (1) يبين القيم الافتراضية لتجارب المحاكاة

Case	θ	a	b	k
1	1	1	2	1
2	1.5	1	2	1
3	2	1	2	1
4	1	2	3	1
5	1.5	2	3	1
6	2	2	3	1
7	1	2	3	3
8	1.5	2	3	3
9	2	2	3	3
10	2	1	3	3
11	2	1	3	2
12	3	1	3	2
13	3	2	3	1
14	3	1	3	2
15	3	2	3	3

2. توليد البيانات: يتم توليد البيانات التي تخضع لتوزيع رايلي- المنتظم المركب ووفقاً لكل قيمة من قيم المعلمات الافتراضية وحجم العينة المحدد في الخطوة (1) من خلال:

أ. توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة $(0,1)$.

$$U_i \sim U(0,1) \quad , \quad i = 1,...,n \qquad ....(27)$$

U_i: يمثل متغير عشوائي مستمر يتم توليده باستخدام الحاسبة الالكترونية وفقاً للصيغة $U = Rand$.

ب. تحويل البيانات المولدة في الخطوة (أ) والتي تتبع التوزيع المنتظم إلى بيانات تتبع توزيع رايلي المركب، وباستخدام دالة التوزيع التجميعية وحسب طريقة التحويل المعكوس ينتج:

$$U = 1 - \frac{b e^{\frac{-x^2}{2\theta^2}}}{(b-a)} \qquad ......(28)$$

وبإجراء بعض العمليات الجبرية البسيطة ينتج:

$$\Rightarrow t_i = \sqrt{\log\left[\frac{(b-a)}{b}(1-U)\right]^{-2\theta^2}} \qquad ....(29)$$

ج. في هذه المرحلة يتم تقدير معلمات توزيع رايلي المركب ولكافة الطرائق المبينة سابقاً واستخدامها في تقدير دالة المعولية بالاعتماد على (t_i) المولدة في الخطوة (ب) لغرض الوصول للمقدر الأفضل فقد تم الاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ Mean Squared Error(MSE) وصيغة هذا المقياس تكون كما يلي:

$$MSE(R^{\wedge}(t)) = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\{\frac{1}{n_t}\sum_{j=1}^{n_t}(R_i^{\wedge}(t_j) - R_i^{\wedge}(t_j))^2\right\} = \frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L} MSE(R_i^{\wedge}(t)) \qquad \ldots.(30)$$

إذ إن:

n_t: تمثل عدد قيم المتغير (t_i) من الحد الأدنى إلى الحد الأعلى.

L: تمثل عدد مرات تكرار التجربة.

ولحجم مكرر(L=1000) وبالاعتماد على البرنامج الذي تم كتابته باستخدام تطبيق MATLAB-R2015a الحديث، فان الجدول رقم (2) يبين نتائج هذه البحث.

الاستنتاجات:

من جدول رقم (2) تبين الأتي:

أظهرت نتائج المحاكاة بان طريقة المربعات الصغرى كانت أكفاء طريقة لأنها حققت اقل MSE بنسبة تفوق عالي تصل الى 96% من مجموع الحالات وحجوم العينات المستخدمة في البحث ثم تليها طريقة الامكان الاعظم بنسبة 3% واخيراً طريقة بيز بنسبة 1%.

التوصيات:

1. يمكن اعتماد طريقة المربعات الصغرى في البحوث التي تتطلب تقدير دالة المعولية لتوزيع رايلي-المنتظم المركب.

2. يوصي الباحث بتطوير البحث ليشمل حالة البيانات المفقودة والبيانات تحت المراقبة و تحت المراقبة التتابعية .

جدول رقم (2) يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لجميع الطرائق وأحجام العينات المستخدمة في تجربة المحاكاة

Case	n	MLE	OLS	BAYES	Best
1	10	0.012595	0.007421	0.015187	OLS
	15	0.011082	0.006214	0.012676	OLS
	25	0.01084	0.003268	0.011792	OLS
	50	0.010881	0.001786	0.011354	OLS
	100	0.011232	0.000843	0.011472	OLS
2	10	0.015795	0.010703	0.019401	OLS
	15	0.015975	0.008153	0.018377	OLS
	25	0.016152	0.005025	0.017603	OLS
	50	0.017024	0.001866	0.017765	OLS
	100	0.01554	0.00139	0.015894	OLS
3	10	0.024784	0.013596	0.030084	OLS
	15	0.021948	0.009397	0.025333	OLS
	25	0.022459	0.004712	0.024504	OLS
	50	0.022216	0.003739	0.023228	OLS
	100	0.021566	0.001414	0.022067	OLS
4	10	0.051848	0.012914	0.059873	OLS
	15	0.051115	0.007351	0.056359	OLS
	25	0.047423	0.00657	0.050442	OLS
	50	0.050656	0.002645	0.052201	OLS
	100	0.048782	0.001964	0.049538	OLS
5	10	0.079423	0.015143	0.092185	OLS
	15	0.067294	0.013685	0.075138	OLS
	25	0.069742	0.006711	0.074514	OLS
	50	0.073017	0.003989	0.075431	OLS
	100	0.07064	0.001845	0.071826	OLS
6	10	0.101735	0.015702	0.118832	OLS
	15	0.094359	0.015288	0.105196	OLS
	25	0.091193	0.009816	0.097544	OLS
	50	0.088329	0.00579	0.091446	OLS
	100	0.089621	0.002308	0.091187	OLS
7	10	0.050815	0.013968	0.044512	OLS
	15	0.050764	0.009166	0.046434	OLS
	25	0.049484	0.006116	0.04686	OLS
	50	0.04892	0.002733	0.047594	OLS
	100	0.049178	0.001511	0.048506	OLS

8	10	0.070121	0.015429	0.061571	OLS
	15	0.076332	0.008385	0.070087	OLS
	25	0.071921	0.007045	0.068243	OLS
	50	0.072096	0.00467	0.070221	OLS
	100	0.071285	0.002051	0.070345	OLS
9	10	0.097064	0.021069	0.085776	OLS
	15	0.096562	0.012338	0.088834	OLS
	25	0.088583	0.010158	0.08412	OLS
	50	0.094025	0.003511	0.091645	OLS
	100	0.09186	0.00208	0.09068	OLS
10	10	0.005909	0.008568	0.004875	OLS
	15	0.006499	0.006048	0.005686	BAYES
	25	0.005514	0.003687	0.005039	OLS
	50	0.005291	0.001811	0.005045	OLS
	100	0.005001	0.000928	0.004877	OLS
11	10	0.006603	0.008154	0.006795	MLE
	15	0.00579	0.005651	0.005925	OLS
	25	0.005188	0.003466	0.005273	OLS
	50	0.005406	0.001805	0.005452	OLS
	100	0.004767	0.000689	0.00479	OLS
12	10	0.031883	0.021705	0.032874	OLS
	15	0.037014	0.012983	0.03769	OLS
	25	0.03609	0.007334	0.036514	OLS
	50	0.031896	0.004817	0.032113	OLS
	100	0.033656	0.00253	0.033765	OLS
13	10	0.141298	0.021373	0.168056	OLS
	15	0.153092	0.019819	0.171262	OLS
	25	0.138503	0.014428	0.148866	OLS
	50	0.143182	0.0081	0.148411	OLS
	100	0.144137	0.004416	0.14675	OLS
14	10	0.009435	0.015533	0.009748	MLE
	15	0.007945	0.007756	0.00818	OLS
	25	0.0091	0.005218	0.009249	OLS
	50	0.008306	0.002885	0.008382	OLS
	100	0.007766	0.001375	0.007805	OLS
15	10	0.14216	0.026156	0.125569	OLS
	15	0.142258	0.021786	0.130884	OLS
	25	0.14968	0.010516	0.142394	OLS
	50	0.141587	0.007071	0.138035	OLS
	100	0.144894	0.003412	0.143069	OLS

المصادر

[1] Palovko, A. M., "Fundamental of Reliability Theory", Academic Press, New York, 1968.

[2] A., Akinsete, F. Famoye and C. Lee, "The Beta-Pareto Distribution". Statistics, 42:6(2008), 547–563.

[3] W., Barreto-Souza, A.H.S. Santos, and G.M. Cordeiro."The beta generalized exponential distribution", Journal of Statistical Computation and Simulation, 80:2(2009), 159 - 172.

[4] Cordeiro, Gauss M.; Lemonte, Artur J., "The Beta-half-Cauchy Distribution", Journal of probability and statistic, 2011.

[5] AL Kadim, K. A., "New Proposed Uniform-Exponential Distribution", Applied Mathematical Sciences, Vol. 7, 2013, no. 141, 7015 – 7026

الملحق: الكود البرمجي الخاص بالبحث

```
%%%%% programme of estimating methods of compound Rayleigh
distribution %%%%%%
clear all
clc
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
n=100;
theta=3;
a=2;
b=3;
k=3;
L=1000;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for q=1:L
u=rand(1,n);
x=sqrt((-2*(theta^2)).*log(((b-a)/b).*(1-u))) ;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
theta_mle(q)=sqrt(sum(x.^2)/(2*n));                %%%%% mle
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
theta_bay(q)= sqrt(sum(x.^2)/2)*gamma(n+k/2-1)/gamma(n+k/2-0.5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
i=1:n;
F=(i)./(n-1);
y=-2*log(((b-a)/b).*(1-F));
X=(sort(x)).^2;
theta_ols(q)=sqrt(1/abs(sum((y-mean(y)).*(X-mean(X)))/sum((X-
mean(X)).^2)))  %%%ols
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T=sqrt((2*theta^2)*log(b/(b-a))):20;
R_real(:,q)=(b/(b-a)).*exp(-0.5.*(T.^2)./(theta^2));
R_mle(:,q)=(b/(b-a)).*exp(-0.5.*(T.^2)./(theta_mle(q)^2));
R_ols(:,q)=(b/(b-a)).*exp(-0.5.*(T.^2)./(theta_ols(q)^2));
R_bay(:,q)=(b/(b-a)).*(1./(1+(T.^2)./sum((x.^2))    ) ).^(n+k/2-
0.5);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
end
Rhat=[T' mean((R_real),2) mean((R_mle),2) mean((R_ols),2)
mean((R_bay),2)];
mseR=[ mean(mean((R_real- R_mle).^2,2)) mean(mean((R_real-
R_ols).^2,2))  mean(mean((R_real-R_bay).^2,2))]
plot(T', mean((R_real),2),T', mean((R_mle),2),T',
mean((R_ols),2),T',
mean((R_bay),2),'LineWidth',2,'MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceCo
lor','g','MarkerSize',10)
xlabel('time')
ylabel('Reliability Function')
title('Plot of Reliability Function for Different Methods')
grid
legend('Real','MLE','OLS','Bayes',1);
```

A Comparison among Estimation Methods of Reliability Function for compound Rayleigh Distribution

Dr. Layla Matter Nassir
layla_matter@yahoo.com
Al-Mustansiriyah University - College of Engineering
Mechanical Engineering Department

Abstract: *Rayleigh distribution is one of important distributions that used to describe phenomenon and analysis of failure times. Recently the compound distribution is used to generate new distributions that used to accurately describe practical situations.*

This paper used to derive new probability distribution from Rayleigh distribution and uniform distribution . The probability density distribution and the cumulative distribution functions are also derived. The maximum likelihood function and moment method and Bayes method were used to estimate the reliability function. Through simulation technique and using mean square error it is concluded that moment method was a superior method for all sample sizes and parameters values that are used.

Keywords: Rayleigh distribution for compound Distributions, maximum likelihood function, Moment method and mean square error.