طريقة عددية مقترحة لحساب تكاملات احادية

أ.م علي حسن محمد م. اميرة نعمة الكفائي م.م. رحاب علي خضير
جامعة الكوفة . كلية التربية للبنات . قسم الرياضيات

الخلاصة :-

هدفنا الأساسي في هذا البحث هو أيجاد طريقة جديدة مقترحة لحساب تكاملات أحادية Single integrals تكاملاتها مستمرة ومحددة في فترات تكاملها ومقارنة نتائج هذه الطريقة مع نتائج طريقة شبه المنحرف Trapezoidal method ونتائج طريقة النقطة الوسطى Mid point Method . وسنبين مدى أفضيلتها على االطريقيتين(شبه المنحرف والنقطة الوسطى) مستعملين معها تعجيل رومبرك Romberg's acceleration، محمد[8] وفوكس[3] والمقارنة بين هذه الطرائق من حيث الدقة وسرعة أقتراب قيم هذه الطرائق الى القيم الحقيقية (التحليلية Analytical) للتكاملات وعدد الفترات الجزئية .

ABSTRACT

The main themes of this research is oriented about a new method of calculating single integrals which there integrals are continuous and specific periods of integration and compare the results of this method with the results of Trapezoidal and Mid – Point method.
We will clear merits to both methods (Trapezoidal and Mid – Point) users with Romberg's acceleration, Mohammed[8] and Fox[3] and the comparison between these methods in terms of accuracy and speed of approaching the values of them to the real values (analytical values) for those integrals and the number of partial periods.

1- المقدمة :-

من المعروف لدى الدارسين لموضوع التحليل العددي ان الحلول العددية للتكاملات تشكل جزءاً مهماً من هذا الموضوع ، أذ ان هذه الاهمية تكون واضحة ألأكثر في التطبيقات العملية التي يمارسها المهندسون والفيزيائيون . فأيجاد القيم التقربية للتكاملات كانت قد ظهرت منذ زمن بعيد ، على سبيل المثال ، رباعيات االاغريق Greek Quadature للدائرة بواسطة مضلع منتظم يمس محيطها ، فهذه العملية أوصلت أرخميدس Archimedes الى أيجاد الحد الاعلى والحد الاسفل لقيمة π بعد قرون
وقد عمل الكثير من العلماء في مجال التكاملات الاحادية نظراً لاهميتها في حساب المساحات المستوية وفي ايجاد حجوم الاجسام الدورانية ولايجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتي للسطوح المستوية آيرز[7]وشانكس[4] عام 1972 الذين تعاملوا مع هذا الموضوع من آوجه عدة .
نعمل في هذا البحث على أيجاد طريقة جديدة تعتمد بالذات على طريقتين أساسيتين هما طريقة النقطة الوسطى وطريقة شبه المنحرف عند اشتقاقها . وقد قمنا بتطبيق هذه الطريقة على التكاملات الأحادية التي تكاملاتها مستمرة ومحددة في فترات تكاملها ، وقد توصلنا بأن الطريقة بسيطة في التطبيق ومؤثرة تعطي (دقة في النتائج وسريعة نسبياً) وقد قمنا بأستخدام التعجيل في التقارب Accelerating the convergence .
وقد حددنا بأن الافضلية لهذه الطريقة أذا ما قورنت مع طريقة النقطة الوسطى وطريقة شبه المنحرف حيث تعطي نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة في الاقتراب الى القيمة الحقيقية .

2- التكامل الاحادي لمكاملات مستمرة [3,5]

نفرض أن التكامل J معرف كالأتي

$$J = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = G(h) + E_G(h) + R_G \;.........(1-1)$$

حيث أن $f(x)$ مكامل مستمر يقع فوق المحور x في الفترة $[x_0, x_n]$ ، $G(h)$ تمثل تقريب لاكرانج Lagrangian Approximation لقيمة التكاملJ ، $E(h)$ هي سلسلة حدود التصحيح الممكن أضافتها الى $G(h)$ ، J تمثل المساحة تحت المنحي $y = f(x)$ وفوق المحور x والمحصورة بين المستقيمين المتوازيين $x = x_n , x = x_0$.

والصيغة العامة ل $G(h)$ هي

$$G(h) = h(w_0 f_0 + w_1 f_1 + w_2 f_2 + ... + w_1 f_{n-1} + w_0 f_n) ....(1-2)$$

حيث أن w_i هي المعاملات الوزنية weight factors، وأن

$h = \frac{x_n - x_0}{n}$, $f_r = f(x_r)$, $x_r = x_0 + rh$, $r = 0,1,2,...,n$ ، ولتبسيط الصيغة (1-2) تكتب الاوزان بدلالة w_0 بشرط أن $w_1 = 2(1-w_0), w_2 = 2w_0$.

ألان نلاحظ عندما $w_0 = \frac{1}{2}$ نحصل على قاعدة شبه المنحرف وعندئذ نرمز للدالة $G(h)$ بالرمز

$$T(h) = \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + ... + 2f_{n-1} + f_n)$$

وعندما $w_0 = 0$ نحصل على قاعدة النقطة الوسطى ، ونرمز لها بالرمز $M(h)$ حيث :

$$M(h) = h(f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{n-1})$$

حيث أن n هو عدد التقسيمات أو عدد الفترات الجزئية .

ولايجاد حدود التصحيح $E_G(h)$ راجع المصدر [3,5] .

أن صيغة المتبقي $R_G(h)$ ، هي $R_G = \frac{2^n}{(2k)} B_{2k} \; h^{2k+1} \; f^{(2k)}(\lambda)$

حيث أن $x_0 \prec \lambda \prec x_n$ هو عدد برنولي Bernoulli number ، جميس وبيتر[2] .

(أعلى مشتقة موجودة ضمن مجموعة التصحيح $E_G(h)$ هي من الرتبة $(2k-3)$ فعندما تكون h ثابتة فالمتبقي على العموم سوف يؤول الى الصفر مع ازدياد k ، أذا كانت k ثابتة فأنه توجد قيمة صغيرة ل h تجعلنا نهمل $R_G(h)$ للحصول على الدقة المطلوبة) .

3- تكامل رومبرك Romberg integrations [6 ,8]

أن طريقة رمبروك هي عبارة عن تطبيق لطريقة ريتشاردسون [1] على مسالة أيجاد قيمة أفضل للتكامل J ، بأستعمال قاعدة شبه المنحرف وقاعدة النقطة الوسطى .

نفرض أننا طبقنا صيغ الخطأ لقيمتين مختلفتين من h هما h_2, h_1 نجد أن

$$J - G(h_1) = A_G h_1^2 + B_G h_1^4 + C_G h_1^6 + ...(1-3)$$
$$J - G(h_2) = A_G h_2^2 + B_G h_2^4 + C_G h_2^6 + ...(1-4)$$

بتعويض $h_2 = \frac{1}{2} h_1$ في الصيغة (1-4) ، وبحل الصيغة الناتجة والصيغة (1-3) لاستخراج قيمة A_G بعد إهمال الحدود التي تحتوي على $h^4, h^6,....$ من الصيغتين المذكورتين ينتج أن

$$J \cong \left(\frac{2^2 \, G(\frac{h}{2}) - G(h)}{(2^2 - 1)} \right) .... (1-5)$$

حيث أن $h = h_1$.

أن الصيغة (1-5) لا تمثل القيمة الحقيقة للتكامل وانما هي تقريبية أقرب الى قيمة التكامل من كلتي القيمتين $G(\frac{h}{2}) , G(h)$ ونرمز لها بالرمز

$$G(h,\frac{h}{2})=\left(\frac{2^2\,G(\frac{h}{2})-G(h)}{(2^2-1)}\right).......(1-6)$$

أذن

$$J-G(h,\frac{h}{2})=A'_G\,h_1^4+B'_G h_1^6+.....(1-7)$$

إذ أن $A'_G\,,B'_G,.......$ ثوابت .

وبالطريقة نفسها يمكن أيجاد قيمة أقرب للتكامل بأستعمال $G(h,\frac{h}{2})$ وهكذا نحصل على جدول من القيم جدول رومبرك وبصورة عامة يمكن حساب قيم هذا الجدول من الصيغة الاتية

$$G=\frac{(2^k\,G(\frac{h}{2})-G(h))}{2^k-1}.........(1-8)$$

حيث $k=2,4,6,...$ و G قيمة من العمود الجديد من جدول رومبرك وكل من $G(\frac{h}{2}),G(h)$ قيمتان في العمود السابق ، فضلاً عن أن العمود الاول من جدول رومبرك يمثل قيم قاعدة شبه المنحرف RT ،أو قيم قاعدة النقطة الوسطى RM .
أن القيمة النهائية من جدول رومبرك تتحدد تبعاً للدقة المطلوبة نسميها Eps التي يكون فيها الخطأ النسبي Relative Error كالأتي $0\neq G_1,$ $\left|\frac{G_2-G_1}{G_1}\right|\le Eps$ حيث أن $G_1,\ G_2$ قيمتين تقريبيتين للتكامل في صف واحد من جدول رومبرك مع أحدى طرائق التكامل العددية .

4- أشتقاق الطريقة المقترحة .

بشكل عام يمكن كتابة J بصيغة النقطة الوسطى للتكامل كالأتي

$$J=h(f_1+f_3+f_5+...+f_{n-1})+\frac{1}{6}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{7}{360}h^4(f^{(3)}_{2n}-f^{(3)}_0)+\frac{31}{15120}h^6(f^{(5)}_{2n}-f^{(5)}_0)....+R_M\ ......(1-9)$$

حيث أن $h=\frac{(x_n-x_0)}{n},$ $i=1,2,....,n$ وان $f_i=\frac{2i-h}{2}$ وان R_M هو المتبقي لقاعدة النقطة الوسطى .

وكذللك قيمة التكامل J باستخدام قاعدة شبه المنحرف يكون كالأتي :-

$$J=\int_{x_0}^{x_n}f(x)\,dx=h(\frac{1}{2}f_0+f_1+....+\frac{1}{2}f_n)+\frac{-1}{12}h^2(f'_{2n}-f'_0)+\frac{1}{720}h^4(f^{(3)}_{2n}-f^{(3)}_0)-\frac{1}{30240}h^6(f^{(5)}_{2n}-f^{(5)}_0)+...+R_T....(1-10)$$

حيث أن $h=\frac{(x_n-x_0)}{n},$ $i=1,2,....,n$ وأن $f_i=x_0+ih$ وأن R_T هو المتبقي لقاعدة شبه المنحرف .

ولايجاد القيمة التقربية للتكامل بأستخدام الطريقة المقترحة ، نجمع المعادلتين $(1-9),(1-10)$ ينتج :-

$$2J=\frac{h}{2}(f_0+f_n+2\sum_{i=1}^{n-1}f_i+2\sum_{i=1}^{n}f(x_0+(i-\frac{1}{2})h)+\frac{1}{12}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{13}{720}h^4(f^{(3)}_{2n}-f^{(3)}_0)+\frac{61}{30240}h^6(f^{(5)}_{2n}-f^{(5)}_0)....+R_J$$

$$2J=\frac{h}{2}\Big(f_0+f_n+2f(x_0+(n-\frac{1}{2})h)+2\sum_{i=1}^{n-1}(f_i+f(x_0+(i-\frac{1}{2})h))+\frac{1}{12}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{5}{720}h^4(f^{(3)}_{2n}-f^{(3)}_0)+....+R_J$$

$$J=\frac{h}{4}\Big(f_0+f_n+2f(x_0+(n-\frac{1}{2})h)+2\sum_{i=1}^{n-1}(f_i+f(x_0+(i-\frac{1}{2})h))+\frac{1}{24}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{5}{1440}h^4(f^{(3)}_{2n}-f^{(3)}_0)+\frac{61}{60480}h^6(f^{(5)}_{2n}-f^{(5)}_0)+....+R_J$$

حيث أن $h=\frac{(x_n-x_0)}{n}$, $i=1,2,....,n,\ f_i=x_0+ih$ وان R_J هومجموع المتبقي لكل من قاعدة النقطة الوسطى وشبه المنحرف .

5- الأمثلة

الجداول (1-1) و (1-2) و(1-3) تبين طريقة رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى ومع قاعدة شبه المنحرف ومع القاعدة المقترحة على التوالي للتكامل $\int_2^3 \ln x\,dx = 0.909542504884438$

N	قيم النقطة الوسطى	K=2	K=4	K=6	K=8
1	0.916290731874155				
2	0.911265563947404	0.909590507971821			
4	0.909975702538971	0.909545748736160	0.909542764787116		
8	0.909650959711221	0.909542712101970	0.909542509659691	0.909542505610049	
16	0.909569628359480	0.909542517908900	0.909542504962696	0.909542504888140	0.909542504885309

جدول (1-1) جدول رومبرك لحساب التكامل المحدد $\int_2^3 \ln x\,dx$ بأستخام طريقة النقطة الوسطى

N	قيم شبه المنحرف	K=2	K=4	K=6	K=8
1	0.895879734614027				
2	0.906085233244091	0.909487066120779			
4	0.908675398595748	0.909538787046300	0.909542235108001		
8	0.909488255139290	0.909542267891230	0.909542499947559	0.909542504151361	
16	0.909528941749385	0.909542489996600	0.909542504803625	0.909542504880705	0.909542504883565

جدول (1-2) جدول رومبرك لحساب التكامل المحدد $\int_2^3 \ln x\,dx$ بأستخام طريقة شبه المنحرف

N	قيم الطريقة المقترحة	K=2	K=4	K=6	K=8
1	0.906085233244091				
2	0.908675398595748	0.909538787046300			
4	0.909325550567360	0.909542267891230	0.909542499947559		
8	0.909488255139290	0.909542489996600	0.909542504803625	0.909542504880705	
16	0.909528941749385	0.909542503952750	0.909542504883160	0.909542504884423	0.909542504884437

جدول (1-3) جدول رومبرك لحساب التكامل المحدد $\int_2^3 \ln x\,dx$ بأستخام الطريقة المقترحة

نستنتج من الجدول (1-1) عندما n=16 فان القيمة التقريبية لقاعدة النقطة الوسطى صحيحة لخمس مراتب عشرية بفارق (27123457042) وحدة في المرتبة السادسة وما بعدها , بينما قيمة طريقة رومبرك صحيحة لاثنى عشر مرتبة بفارق (871) في المرتبة الثالثة عشر وما بعدها .
بينما في الجدول (2-1) عندما n=16 فان القيمة التقريبية لقاعدة شبه المنحرف صحيحة لاربع مراتب عشرية بفارق (54249745148) وحدة في المرتبة الخامسة وما بعدها , بينما قيمة طريقة رومبرك صحيحة لاثنى عشر مرتبة بفارق (873) في المرتبة الثالثة عشر وما بعدها .
اما في الجدول (3-1) عندما n=16 فان القيمة التقريبية لقاعدة الطريقة المقترحة صحيحة لخمس مراتب عشرية بفارق (13563135053) وحدة في المرتبة السادسة وما بعدها , بينما قيمة طريقة رومبرك صحيحة لاربعة عشر مرتبة بفارق وحدة واحدة في المرتبة السادسة عشر وما بعدها .
يلاحظ من الجداول الثلاثة اعلاه بالنسة للعمود الاول فيها والخاص بطريقة شبه المنحرف والنقطة الوسطى والطريقة المقترحة أن الطريقة المقترحة أسرع في الاقتراب الى القيمة الحقيقية من قاعدتي شبه المنحرف والنقطة الوسطى , فعندما n=16 مثلاً يلاحظ القيمة بقاعدة الطريقة المقترحة صحيحة لخمس مراتب عشرية , بينما بقاعدة النقطة الوسطى صحيحة لخمس مراتب عشرية لكن بفارق أكبر من الخطأ , كذلك فان القيمة بقاعدة شبه المنحرف صحيحة لاربع مراتب عشرية .

الجداول (1-4) ،(1-5) ، (1-6) تبين طريقة رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى ومع قاعدة شبه المنحرف ومع الطريقة الجديدة على التوالي للتكامل المحدد $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = 1.218951416497460$

N	قيم النقطة الوسطى	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	1.224744871391589					
2	1.220454822141095	1.219024805724264				
4	1.2193313345974198	1.218956853918565	1.218952323798185			
8	1.210946668128064	1.218951775512686	1.218951436952294	1.218951422875375		
16	1.218975246490008	1.218951439277322	1.218951416861632	1.218951416542732	1.218951416517898	
32	1.218957375067558	1.218951417926742	1.218951416503370	1.218951416497683	1.2189514164497507	1.218951416497487

جدول (1-4) جدول رومبرك لحساب التكامل المحدد $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = 1.218951416497460$ بأستخام طريقة النقطة الوسطى

N	قيم شبه المنحرف	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	1.207106781186548					
2	1.215925826289068	1.218865507989908				
4	1.218190324215082	1.218945156857086	1.218950466781565			
8	1.218760835094640	1.218951005387826	1.218951395289875	1.218951410028102		
16	1.218903751611352	1.218951390450256	1.218951416121085	1.218951416451739	`1.218951416476930	
32	1.218939499050680	1.218951414863789	1.218951416491358	1.218951416497235	1.218951416497414	1.218951416497434

جدول (1-5) جدول رومبرك لحساب التكامل المحدد $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = 1.218951416497460$ بأستخام طريقة شبه المنحرف

N	قيم الطريقة المقترحة	K=2	K=4	K=6	K=8	K=10
1	1.215925826289068					
2	1.218190324215082	1.218945156857086				
4	1.218760835094640	1.218951005387826	1.218951395289875			
8	1.218903751611352	1.218951390450256	1.218951416121085	1.218951416451739		
16	1.218939499050680	1.218951414863789	1.218951416491358	1.218951416497235	1.218951416497414	
32	1.218948437059119	1.218951416395266	1.218951416497364	1.218951416497459	1.218951416496460	1.2189514197460

جدول (1-6) جدول رومبرك لحساب التكامل المحدد $\int_1^2 \sqrt{x}\, dx = 1.218951416497460$ بأستخام الطريقة المقترحة

نستنتج من الجدول (4-1) عندما n=32 فان القيمة التقريبية لقاعدة النقطة الوسطى صحيحة لخمس مراتب عشرية بفارق (5958570098) وحدة في المرتبة السادسة وما بعدها , بينما قيمة طريقة رومبرك صحيحة لثلاثة عشر مرتبة بفارق (27) في المرتبة الرابعة عشر وما بعدها .
بينما في الجدول (5-1) عندما n=32 فان القيمة التقريبية لقاعدة شبه المنحرف صحيحة لاربع مراتب عشرية بفارق (11917446780) وحدة في المرتبة الخامسة وما بعدها , بينما قيمة طريقة رومبرك صحيحة لاربعة عشر مرتبة بفارق (26) في المرتبة الرابعة عشر وما بعدها .
اما في الجدول (6-1) عندما n=32 فان القيمة التقريبية للطريقة المقترحة صحيحة لخمس مراتب عشرية بفارق (2979738341) وحدة في المرتبة السادسة وما بعدها وهو اقل من كلا الطريقتين (النقطة الوسطى وشبه المنحرف) , بينما قيمة طريقة رومبرك صحيحة لستة عشر مرتبة(مطابقة للقيمة التحليلية) .

المصادر

[1] Anthony Ralston , "A first course in Numerical Analysis " Mc Grow-Hill Book company 1965 , pp-87-94 , 114-133 , 347-348 .

[2] James.I.Buchanan and Peter R, Turner , " Numerical Method and Analysis ", Mc Grow- Hill, Inc ., pp-463-467 , 1994 .

[3] L.Fox , " Romberg Integration for a class of Singular Integrands " compute. J .10(1967) .pp.87-93.

[4] Shanks J.A. , " Romberg Tables for singular Integrands" Compute J.15 . Pp . 360 , 361 ,1972 .

[5] عذراء ، محمد ضياء " طرائق عددية لايجاد التكاملات الاحادية والثنائية والثلاثية بأستخدام لغة Matlab " أطروحة ماجستير غير منشورة (2009) .

[6] علية ، شاني حسن " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات آحادية وثنائية معتلة " أطروحة ماجستير غير منشورة (2005) .

[7] فرانك آيرز " سلسلة ملخصات شوم ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " ، دار ماكجردهيل للنشر ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ، ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين .

[8] محمد ، علي حسن " أيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " أطروحة ماجستير غير منشورة (1983).