المقارنة بين مقدرات الإمكان الأعظم و Jackknif في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي ومارشال أولكن ليندلي

الباحثة: إقبال قاسم رمضان
كلية الإدارة والاقتصاد – جامعة كربلاء
eqbalqasim@yahoo.com

أ.م.د. ريسان عبدالإمام زعلان
كلية الإدارة والاقتصاد _ جامعة البصرة
Res.zalan@yahoo.com

المستخلص:

دراسة تحليل البقاء هي عبارة عن تحليل بيانات دالة البقاء التي تكون على شكل أوقات حدوث الحدث إلى مدة نهاية الحدث. وفي البحوث التي تخصص لدراسة البيانات الطبية يكون أصل الوقت هو تاريخ تسجيل المفردة أو المريض، إذ تكون بداية المفردة هي تاريخ دخول المريض إلى المشفى وانتهاء المفردة هي حالة الوفاة أو اختفاء المفردة. فالبيانات التي تجمع من هذه العملية تسمى أوقات البقاء إذ أن تحليل البقاء هو من الخطوات والإجراءات الإحصائية المهمة في تحليل بيانات البقاء. وقد تم في هذا البحث المقارنة بين مقدرات الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) وطريقة (Jackknife) لتقدير معلمات توزيع ليندلي والتوزيع الموسع مارشال أولكن ليندلي عن طريق إجراء المحاكاة باستعمال طريقة مونت كارلو (Monte carlo) وقد تم تحديد حجوم للعينات وتم تكرار التجربة ١٠٠٠ مرة لكل نموذج من نماذج القيم الافتراضية بهدف الحصول على أعلى تجانس للبيانات قيد الدراسة وقد تم الاعتماد على المقاييس الإحصائية لبيان متوسط مربعات الخطأ(MSE) ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) بهدف الحصول على أفضل تقدير لدالة البقاء .

الكلمات المفتاحية : دالة البقاء، توزيع ليندلي(Lindley Distribution)، توزيع مارشال أولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley Distribution)، طريقة الإمكان الأعظم ، طريقة Jackknife .

Comparison of Maximum Possibility and Jackknife estimators in estimating the survival function of a Lindley distribution and Marshall Olkin Lindley

Iqbal Qassem Ramadan
College of Administration and Economics - University of Karbala
Raysan Abdul-Imam zaealan
College of Administration and Economics - University of Basra

Abstract:

The study of survival analysis is the analysis of the data of the survival function, which is in the form of the times of an event to the occurrence of an end

The event and in the research that is to study medical data, the origin of the time is the date of registration of the item or the patient, as the beginning of the item is the date of the patient's admission to the hospital and the end of the item is the case of death or disappearance of the item. And the important statistical procedures in analyzing survival data. In this research, the comparison between the Maximum Likelihood Method and the Jackknife method for estimating the parameters of the Lindley distribution and the expanded distribution by Marshall Olkin Lindley by performing simulations using the Monte Carlo method. Sample sizes and the experiment was repeated 1000 times for each of the hypothetical value models in order to obtain the highest homogeneity of the data under study. The statistical measures mean mean squares error (MSE) and mean squares of integrated error (IMSE) were adopted in order to obtain the best estimate of the survival function.

Key words: survival function, Lindley distribution, Marshall-Olkin Lindley distribution, method of greatest possibility, Jackknife method.

المقدمة :

من المعلوم أن دراسة دوال تحليل البقاء على قيد الحياة لها دور أساس في مجال الطب إذ تشكل أهمية كبيرة في قياس طول فترة البقاء على قيد الحياة للمرضى وبذلك أصبحت دالة البقاء تؤدي دوراً أساسياً في التقدير والتنبؤ . وتعد مرحلة تمثيل ووصف البيانات من المراحل المهمة في التحليل الإحصائي والتي يكون اعتماد بقية المراحل عليها فإذا تم اختيار توزيع غير مناسب أو غير ملائم لتمثيل البيانات قيد الدراسة ستؤدي هذه العملية الى الحصول على نتائج غير صحيحة وبهذه الحالة يكون القرار غير دقيق وهنالك توزيعات مختلطة مستمرة نتيجة خلط متغيرين عشوائيين ليمكن من خلالها تمثيل بيانات الفشل أو بيانات البقاء بصورة دقيقة ومن بين هذه التوزيعات توزيع ليندلي(Lindley Distribution) وهو من التوزيعات المختلطة المستمرة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين أحدهما يتبع توزيع كاما (Gamma Distribution) بمعلمة قياس (θ) ومعلمة شكل (٢) والآخر يتبع التوزيع الأُسي بمعلمة قياس (θ) وهو توزيع احتمالي اشتق اسمه من الدالة الأُسية وهو توزيع احتمالي مستمر ويمكن استخدام هذا التوزيع في تخمين الفترات الزمنية لوقوع الأحداث. وقد أهتم كثير من الباحثين في دراسة هذا النوع من التوزيعات سواء أكانت مستمرة أم متقطعة ، لذا من المهم القيام بدراسة وتحليل بيانات البقاء للمرضى أو تقدير المعولية ولابد من معرفة التوزيع الاحتمالي الملائم لها وقدم توزيع ليندلي (Lindley Distribution) لتمثيل بيانات البقاء للبيانات قيد الدراسة لتخمين الفترات الزمنية لوقوع الأحداث والتوزيع الموسع مارشال أولكن ليندلي Marshall–Olkin (Lindley Distribution) عن طريق إضافة معلمة جديدة لتوزيع ليندلي Lindiey distribution) والتي تولد عائلة جديدة من خلال إضافة معلمة جديدة الى التوزيع الأساسي والتوزيع الجديد الناتج يسمى باسم عائلة مارشال أولكن وتكون هذه الطريقة باستعمال دالة البقاء لأي توزيع$\bar{F}(t)$ ، فنحصل على دالة البقاء للتوزيع الجديد $G(t;\alpha$.

مشكلة البحث:

إن لدراسة المعولية اهتماما متزايدا لدى الباحثين للدور المهم الذي يلعبه علم الإحصاء في تقدير احتمالات البقاء ومتوسط الحياة، فكل من نظرية المعولية (Reliability Theory) ونظرية البقاء (Survival Theory) تهتمان في قياس طول فترة الحياة، فالأولى تختص بالمعدات والمكائن والثانية تختص بطول فترة البقاء للكائنات الحية . فنظرية البقاء هي أحد فروع علم الإحصاء المهمة التي تهتم بتحليل أية ظاهرة صحية أو أية ظاهرة طبيعية بالاعتماد على البيانات المتوفرة عن تلك الظاهرة وعليه فمن خلال عملية التقدير نحصل على مقدرات جديدة تحمل صفات المقدر المثالي الذي يعطي نتائج دقيقة في التقدير .

هدف البحث:

يهدف البحث الى المقارنة بين طريقة الإمكان الأعظم Maximum (Likelihood Method) وطريقة (Jackknife) لتقدير معلمـــات توزيع ليندلي (Lindley Distribution) وتوزيع مارشل أولكن ليندلي (Marshall-Olkin-Lindley Distribution) لاختيار أفضل طريقة لتقدير دالة البقاء وذلك عن طريق إجراء تجربة محاكاة باستعمال طريقة مونت كارلو(Monte Carlo) بأحجام عينات مختلفة وبالاعتماد على مقاييس متوسط مربعات الخطأ(MST) ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE).

١ - دالة البقاء(Survival Function)

دالة البقاء هي احتمال بقاء الفرد على قيد الحياة حتى الوقت المحدد t ، وهي مكملة لدالة التوزيع التراكمية $F(t)$، وغالبا ما يرمز لها بالرمز $S(t)$ ، وتعرف دالة البقاء رياضيا بحسب الصيغة الآتية:

$$S(t) = p_r(T > t) \ , t \geq 0$$

$$S(t) = 1 - p_r(T \leq t)$$

$$S(t) = 1 - F(t) \qquad (1-1)$$

إذ إنّ :

T : يمثل متغير زمن البقاء أو الزمن المستغرق لحدوث الحدث(time to events) وهو حدث الموت (المتغير العشوائي الذي يشير إلى وقت البقاء حتى حدوث الموت).

t : يمثل زمن البقاء على قيد الحياة (الوقت المحدد).

ومن خصائص دالة البقاء (Survival function) إنّها ستكون :

١- دالة غير متزايدة (non-increasing) (متناقصة مع الزمن)

٢- دالة احتمالية $0 \leq S(t) \leq 1$ أي أنّها كقيمة عددية محصورة بين الصفر (0) والواحد (1).

إذ إنّ دالة البقاء هي التي تعطي احتمال البقاء على قيد الحياة قبل الزمن t مباشرة ، أو بشكل عام هي احتمالية عدم وقوع الحدث موضوع الاهتمام بالزمن t ، على سبيل المثال يعطي احتمال بقاء المريض على قيد الحياة بعد الوقت المحدد.

عندما يكون الوقت مساويا للصفر اي (t=0) فان دالة البقاء تكون مساوية للواحد (S(t)=1) وهذا يعني احتمال بقاء الشخص المصاب على قيد الحياة عند الزمن (t=0) يساوي واحد.[11][17][16]

٢-الدوال المرتبطة بدالة البقاء

٢-١ دالة الكثافة الاحتمالية Probability Density function

تمثل احتمال حدوث الحدث (الموت) في المدة $(t,t+\Delta t)$، والتي يرمز لها $f(t)$، والتعبير الرياضي لها يكون على النحو الآتي:

$$f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{pr[t<T<t+\Delta t]}{\Delta t} \quad , \quad t \geq 0,\ \Delta t_i = t_i - t_{i-1}$$

إذ إنّ : Δt تمثل التغير في قيمة المتغير العشوائي T

ولدالة الكثافة الاحتمالية خصائص هي :

- ❖ $f(t) \geq 0$ موجبة
- ❖ مجموع المساحة تحت منحنى $f(t)$ مساوية دائما للواحد الصحيح أي إنّ :

$$\int_0^\infty f(t)dt = 1$$

٢-٢ دالة الكثافة التجميعية cumulative Densety function [٢٠]

وهي احتمالية حدوث الحدث (الموت) قبل الوقت t ويرمز لها $F(t)$ وتعرف على أنّها مكملة لدالة البقاء، بالإمكان التعبير عنها رياضيا كما يلي :

$$F(t) = pr\ (T \leq t) = \int_0^t f(u)du = 1 - S(t), \quad t \geq 0$$

إذ إن:

t يمثل الوقت حتى حدوث الحدث (الموت)

$f(u)$ دالة الكثافة الاحتمالية لزمن t

وإنّ دالة الكثافة التجمعية تمتلك عدة خصائص:

- ❖ تكون دالة متزايدة مع الزمن (تتناسب طرديا مع الزمن).
- ❖ محددة في الفترة $[0,t)$ وغير سالبة قيمتها موجبة بين الصفر والواحد.

٢–٣ دالة المخاطرة Hazard function [٢][٩]

دالة المخاطرة وهي الدالة التي يرمز لها بالرمز h(t) لوقت البقاء T وهي احتمالية وقوع حدث يحدث في مدة زمنية قصيرة، إذا كان T متغيراً عشوائياً له دالة توزيع تراكمية ودالة كثافة احتمالية فإن:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{P(T\le t+\Delta t|T>t)}{\Delta t} \quad ، \quad t>0$$

ويمكن كتابة دالة المخاطرة كنسبة بين دالة الكثافة الاحتمالية $f(t)$ ودالة البقاء $S(t)$ وحسب الصيغة الآتية:

$$h(t)=\frac{f(t)}{S(t)}=\frac{f(t)}{1-F(t)} \qquad (1-2)$$

٢–٤ متوسط زمن الفشل أو الوفاة (MTTF) (Mean Time To failure) [9] [15][18]

هو من المقاييس المستعملة في موضوع البقاء على قيد الحياة والذي يعرف على أنّه القيمة المتوقعة لزمن البقاء على قيد الحياة قبل حصول الوفاة ويعبر عنه رياضيا كما يلي:

$$MTTF=E(t)=\int_0^{\infty} tf(t)dt \qquad (3-2)$$

[15][18]

٣ – طرائق التقدير :

هناك العديد من الطرائق المستعملة لتقدير معلمات التوزيعات الاحتمالية، وفي هذه الدراسة سيتم استعمال طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood

Estimation(MLE) وطريقة Jackknife المعتمدة على مقدر الإمكان الأعظم لتقدير معلمات ودالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة.

٣-١ طريقة الإمكان الأعظم Maximum Likelihood Estimation(MLE)

تُعد هذه الطريقة واحدة من بين طرائق الاستدلال الاحصائي التي لها استعمالات واسعة في التقدير كونها تتميز بعدة خصائص تجعلها من طرق التقدير المميزة فضلاً عن كونها أكثر دقة بازدياد حجم العينة، وان مقدر الإمكان الأعظم هو الذي يجعل لوغارتيم دالة الإمكان في نهايتها العظمى.

لنفترض إنّ لدينا عينة عشوائية بالحجم n $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ من توزيع احتمالي معين، فإنّ دالة الإمكان الأعظم تعرف على النحو الاتي:

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i\,; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \qquad (1-3)$$

اما اللوغاريتم الطبيعي لدالة الإمكان الأعظم فهو

$$\ln\left(L(t_1, t_2, \dots, t_n)\right) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(t_i\,; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)\right) \qquad (2-3)$$

وللحصول على مقدرات الإمكان الأعظم $\hat{\theta}_j$ نعمل على اشتقاق المعادلة المذكورة آنفا بالنسبة لكل معلمة θ_j ومساواتها للصفر ثم حل المعادلات الناتجة بالطرائق التحليلية الاعتيادية أو الطرائق العددية.

$$\frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln\left(L(t_1, t_2, \dots, t_n)\right) = \frac{\partial}{\partial \theta_j}\left[\ln\left(\prod_{i=1}^{n} f(t_i\,; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)\right)\right] = 0 \qquad (3-3)$$

[6][5]

٣-٢ طريقة Jackknife

طبقت هذه الطريقة لأول مرة من قبل الباحث Quenouille في عام ١٩٤٩ إذ يستخرج مقدر Jackknife على النحو الآتي:

$\hat{\theta}_{Jackknife} = n\hat{\theta} - (n-1)\,\theta_*$

إذ إنّ:

$\hat{\theta}$ تمثل مقدر المعلمة باعتماد إحدى طرق التقدير .

θ_* تساوي $\theta_* = \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\theta}_i}{n}$

اذ يتم تقدير المعلمات ودالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة بحسب أسلوب Jackknife

بالاعتماد على طريقة الإمكان الأعظم وعلى النحو الاتي:

$\hat{\theta}_{Jackknife} = n\hat{\theta}_{mle} - (n-1)\,\theta_*$

إذ إنّ:

$\hat{\theta}_{mle}$: مقدر المعلمة بطريقة الإمكان الأعظم

$\hat{\theta}_i$:(المشاهدة الأولى) يتم ايجادها على وفق الاسلوب التالي:

١- ايجاد $\hat{\theta}_1$ وذلك بحذف المشاهدة الأولى t_1 من مجموعة المتغيرات $(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)$ وايجاد $\hat{\theta}_1$ حسب طريقة الإمكان الأعظم بدون المشاهدة الأولى .

٢- ايجاد $\hat{\theta}_2$ وذلك بترجيع المشاهدة الأولى t_1 الى مجموعة المتغيرات $(t_1,t_2,\ldots\ldots,t_n)$ وحذف المشاهدة الثانية t_2 من هذه المشاهدات وايجاد $\hat{\theta}_2$ بحسب طريقة الإمكان الأعظم بدون المشاهدة الثانية.

٣- وهكذا نستمر بإيجاد $\hat{\theta}_i$ إلى أن نجد $\hat{\theta}_n$.

٤- ايجاد θ_*

٥- نطبق صيغة Jackknife

$\hat{\theta}_{Jackknife} = n\hat{\theta}_{mle} - (n-1)\,\theta_*$ [7]

وعليه يمكن إيجاد مقدر دالة البقاء $\hat{S}_{Jackknife(mle)}(t)$ للتوزيعات الاحتمالية الآتية:

4- توزيع ليندلي (Lindley Distribution)

توزيع ليندلي (Lindley Distribution) أحد التوزيعات المختلطة المستمرة الناتجة من خلط متغيرين عشوائيين أحدهما يتبع توزيع كاما (GammaDistribution) بمعلمة قياس(θ) ومعلمة شكل (٢) والآخر يتبع التوزيع الاسي بمعلمة قياس (θ).

لذا فإن المتغير العشوائي (t) الذي يتبع توزيع ليندلي Lindley Distribution بدالتي كثافة احتمالية ودالة توزيع تراكمية بالمعادلات الآتية:

$$f(t;\theta) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+t)e^{-\theta t}, \qquad t > 0, \qquad \theta > 0 \qquad (1-4)$$

$$F(t;\theta) = 1 - \left(1 + \frac{\theta\, t}{1+\theta}\right)e^{-\theta t} \qquad (2-4)$$

أما دالة البقاء فتعرف بالمعادلة (٤-٣)

$$S(t;\theta) = \left(1 + \frac{\theta\, t}{1+\theta}\right)e^{-\theta t} \qquad (3-4)$$

وللحصول على تقدير معلمة ودالة البقاء توزيع ليندلي Lindley Distribution باستعمال طريقة الإمكان الأعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1, t_2 \dots t_n;\ \theta) = f(t_1;\ \theta).f(t_2;\theta) \dots f(t_n;\ \theta)$$

$$L(t_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(t_i;\ \theta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ليندلي (4-1) في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\theta^2}{1+\theta}(1+t)e^{-\theta t}\right]$$

$$L\ (t_i;\theta) = \frac{\theta^{2n}}{(1+\theta)^n} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i} \prod_{i=1}^{n}(1+t_i) \qquad (4-4)$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي (٤-٤) آنفاً نحصل على:

$$\ln L(t_i;\theta) = 2n\ln\theta - n\ln(1+\theta) + \sum_{i=1}^{n}\ln(1+t_i) - \theta\sum_{i=1}^{n} t_i \qquad (5-4)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة المرقمة (٤-٥) آنفاً بالنسبة للمعلمة (θ) ومساواتها للصفر:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{2n}{\theta} - \frac{n}{1+\theta} - \sum_{i=1}^{n} t_i = 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{2n(1+\theta) - n\theta - \theta(1+\theta)\sum_{i=1}^{n} t_i}{\theta(1+\theta)} = 0$$

$$2n(1+\theta) - n\theta - \theta(1+\theta)\sum_{i=1}^{n} t_i = 0 \qquad (6-4)$$

قسمة الطرفين على n :

$$2(1+\hat{\theta}) - \hat{\theta} - \hat{\theta}(1+\hat{\theta})\bar{t} = 0 \qquad (7-4)$$

وبحل المعادلة (٤-٦) آنفا نحصل على مقدر طريقة الإمكان الأعظم للمعلمة (θ):

$$\hat{\theta}_{MLE} = \frac{-(1-\bar{t}) + \sqrt{(\bar{t}-1)^2 + 8\bar{t}}}{2\bar{t}} \qquad (8-4)$$

وبعد تعويض المقدر ($\hat{\theta}$) في دالة البقاء (٤-٩) نحصل على مقدر الإمكان الأعظم لدالة بقاء توزيع ليندلي.

$$\hat{S}(t;\theta) = \left(1 + \frac{\hat{\theta}_{MLE}\, t}{1+\hat{\theta}_{MLE}}\right) e^{-\hat{\theta}_{MLE}\, t} \qquad (9-4)$$

[4][14][1]

5- توزيع مارشال اولكن ليندلي Marshall-Olkin Lindley distribution

قدم توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall-Olkin Lindley Distribution) عام ٢٠١٢ من قبل الباحث (Ghitane) واخرين عن طريق اضافة معلمة جديدة الى توزيع ليندلي (Lindley distribution).

ان دالة الكثافة الاحتمالية pdf (probability density function) للمتغير العشوائي T الذي يتبع توزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall–Olkin Lindley distribution) تكون على الشكل الاتي:

$$f(t;\theta,\alpha)=\frac{\alpha\,\dfrac{\theta^2(1+t)e^{-\theta t}}{\theta+1}}{\left[1-\bar{\alpha}\left(1+\dfrac{\theta t}{\theta+1}\right)e^{-\theta t}\right]^2}\;,t>0,(\theta,\alpha)>0, \qquad (1-5)$$

وان دالة البقاء (Survival function) لتوزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall–Olkin Lindley distribution) تكون على النحو الاتي:

$$S(t;\theta,\alpha)=\frac{\alpha\left(1+\dfrac{\theta t}{\theta+1}\right)e^{-\theta t}}{1-\bar{\alpha}\left(1+\dfrac{\theta t}{\theta+1}\right)e^{-\theta t}}\;, \qquad \bar{\alpha}=1-\alpha \qquad (2-5)$$

وللحصول على تقدير معلمة ودالة البقاء لتوزيع مارشال اولكن ليندلي (Marshall–Olkin Lindley distribution) باستعمال طريقة الامكان الاعظم نتبع الخطوات الآتية:

$$L(t_1,t_2\ldots t_n;\alpha,\theta)=\ f(t_1;\alpha,\theta).f(t_2;\alpha,\theta)\ldots\ f(t_n;\alpha,\theta)$$

$$L(t_i;\alpha,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(t_i;\ \alpha,\theta)$$

تعويض دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع مارشال اولكن ليندلي$(1-5)$ في الصيغة المذكورة آنفاً:

$$L(t_i;\alpha,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha\,\dfrac{\theta^2(1+t_i)e^{-\theta t_i}}{\theta+1}}{\left[1-\bar{\alpha}\left(1+\dfrac{\theta t_i}{\theta+1}\right)e^{-\theta t_i}\right]^2}\right]$$

بالإمكان كتابة الصيغة المذكورة آنفا بالشكل الآتي:

$$L(t_i;\alpha,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{\alpha\ f(t_i;\theta)}{[1-\bar{\alpha}\ S(t_i;\theta)]^2}\right]$$

وبأخذ اللوغارتم لطرفي الصيغة آنفاً نحصل على:

$$L(t_i;\alpha,\theta) = \alpha^n \prod_{i=1}^{n} \frac{f(t_i;\theta)}{[1-\bar{\alpha}\, S(t_i;\theta)]^2} \quad (3-5)$$

$$\ln L(t_i;\alpha,\theta) = n \ln \alpha + \sum_{i=1}^{n} \ln[f(t_i;\theta)] - 2\sum_{i=1}^{n} \ln[1-\bar{\alpha}\, S(t_i;\theta)] \qquad (4-5)$$

وبأخذ المشتقة الجزئية الأولى للمعادلة (٥-٤) بالنسبة للمعلمة (θ,α) ومساواتها للصفر:

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{n}{\alpha} - 2\sum_{i=1}^{n} \frac{S(t_i;\theta)}{1-\bar{\alpha}\, S(t_i;\theta)} = 0 \qquad (5-5)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\acute{f}(t_i;\theta)}{f(t_i;\theta)} - 2\bar{\alpha}\sum_{i=1}^{n} \frac{f(t_i;\theta)}{1-\bar{\alpha}\, S(t_i;\theta)} = 0 \qquad (6-5)$$

Where $\acute{f}(t_i;\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} f(t_i;\theta)$

المعادلات (٥-٥) و(٥-٦) معادلات غير خطية لا يمكن حلها بالطرائق التحليلية الاعتيادية ولذلك تم حلها باستعمال الطريقة العددية (نيوتن رافسون) للحصول على مقدرات طريقة الامكان الاعظم $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\theta}_{MLE})$، وتعويض المقدرات $(\hat{\alpha}_{MLE}, \hat{\theta}_{MLE})$ في دالة البقاء (٥-٢) نحصل على مقدر الامكان الاعظم لهذه الدالة.

$$\hat{S}(t;\theta,\alpha) = \frac{\hat{\alpha}_{MLE}\left(1+\frac{\hat{\theta}_{MLE}\, t}{\hat{\theta}_{MLE}+1}\right)e^{-t\hat{\theta}_{MLE}}}{1-\bar{\alpha}\left(1+\frac{\hat{\theta}_{MLE}\, t}{\hat{\theta}_{MLE}+1}\right)e^{-t\hat{\theta}_{MLE}}} \qquad (7-5)$$ [10][13]

٦-معايير اختيار أفضل توزيع :

تعد عملية اختيار التوزيع الملائم لبيانات العينة من العمليات المهمة جداً في الاستدلال الإحصائي ،وللحصول على أفضل توزيع من التوزيعات الاحتمالية لتمثيل ووصف البيانات سيتم استعمال بعض المعايير الإحصائية للمفاضلة بين التوزيعات في هذه الدراسة ، إذ أن التوزيع الذي يمتلك أقل قيمة لهذه المعايير يكون الأفضل :

معيار معلومات اكايكي (AIC) (Akaike information criterion)

اقترح من قبل الباحث Akaike عام ١٩٧٣ وتقوم فكرته على حساب قيمة AIC لكل توزيع من التوزيعات، والتوزيع الذي يمتلك أقل قيمة لهذه المعايير يكون الأفضل وصيغته العامة كالآتي:

$$AIC = -2Log(L) + 2r \qquad (1-1)$$

اذ ان:

$Log(L)$: لوغاريتم دالة الإمكان الأعظم (Log Likelihood function) لمشاهدات العينة.

r: عدد معلمات التوزيع .[34][36]

معيار معلومات اكايكي المصحح (AIC_c) (correction Akaike information Criterion)

وهو معيار لاختيار أفضل توزيع من مجموعة التوزيعات وصيغته الرياضية كالآتي:

$$AIC_C = AIC + \frac{2(r+1)}{n-r-1} \qquad (1-2)$$

اذ ان:

AIC : معيار اكايكي

r : عدد معلمات التوزيع

n : حجم العينة

٧- المقاييس الاحصائية (متوسط مربعات الخطأ (MSE)، متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE)) . [١٨][٢٣]

١ – متوسط مربعات الخطأ (MSE)

تكون صيغته بالنسبة لمعلمات التوزيع احتمالي على الشكل الآتي:

$$MSE[\theta] = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{\theta}_i - \theta\right)^2 \qquad (1-7)$$

إذ إن : θ : تمثل القيم الافتراضية لمعلمات التوزيع.

$\hat{\theta}_i$: تمثل القيم المقدرة للمعلمات حسب الطريقة المستعملة للتقدير.

R: تمثل عدد تكرارات التجربة.

أما صيغة متوسط مربعات الخطأ (MSE) بالنسبة لدالة بقاء التوزيع احتمالي فتكون على الشكل الآتي:

$$MSE[\hat{S}(t_j)] = \frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{S}_i(t_j) - S_i(t_j)\right)^2 ، \quad j = 1،2، \ldots \ldots ،K \qquad (2-7)$$

إذ إن:

$S_i(t_j)$ تمثل القيم الحقيقية لدالة بقاء التوزيع.

$\hat{S}_i(t_j)$: تمثل القيم المقدرة لدالة بقاء التوزيع حسب الطريقة المستعملة للتقدير.

R: تمثل عدد تكرارات التجربة.

K: تمثل عدد مشاهدات التجربة (قيم t_j).

٢ـمتوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) بالنسبة لدالة بقاء التوزيع احتمالي:

لكون متوسط مربعات الخطأ (MSE) يحسب لكل (t_i) من الزمن فان (IMSE) يمثل تكامل للمساحة الكلية (t_i) واختزالها بقيمة واحدة تعد عامة للزمن وإنّ صيغة هذا المقياس هي:

$$IMSE[\hat{S}(t_j)] = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K}[\frac{1}{R}\sum_{i=1}^{R}\left(\hat{S}_i(t_j) - S_i(t_j)\right)^2]$$

$$IMSE[\hat{S}(t_j)] = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{K} MSE[\hat{S}(t_j) \qquad (3-7)$$

<u>٢-١- مفهوم المحاكاة:</u>

المحاكاة هي عبارة عن أسلوب رياضي يستخدم لحل الكثير من المشاكل التي تواجه الباحثين من حيث عدم توافر البيانات أو صعوبة الحصول على هذه البيانات أو صعوبة إجراء عملية التحليل والتقدير حيث تقوم المحاكاة بتكوين نموذج افتراضي مشابه للنموذج الحقيقي من خلال تكوين المشاهدات ثم يتم استحصال النتائج عن طريق برنامج يتم إعداده وتوضع الاستنتاجات على أساسه ففهم الانموذج يحقق لنا قدراً من الأدراك للعملية الأصلية أو الواقع الحقيقي عن طريق محاكاة الأنموذج. ويعتمد أسلوب المحاكاة على توليد الإعداد العشوائية التي تكون في كل سلسلة من الأعداد العشوائية مستقلة عن الأخرى، أي إنّ تجربة المحاكاة ما هي الا عبارة عن نوع معين من أنواع المعاينة، إذ تحسب هذه العينة من المجتمع الافتراضي الممثل للظاهرة المدروسة بدلاً من أن تسحب من المجتمع الحقيقي ومن ثم يتم تطبيق الأساليب الإحصائية والرياضية المناسبة للوصول إلى النتائج المطلوبة لغرض اجراء المقارنة والتحليل.وتوجد أكثر من طريقة للمحاكاة مثل (التناظرية Analog، المختلطة Mixed، مونت كارلو Monte Carlo) إلا أنّ (طريقة مونت كارلو Monte Carlo)) أكثر استعمالا وتمتاز بالمرونة عن طريق تكرار العملية لمرات عدة

والتي عن طريقها يتم توليد عينة من المشاهدات تتبع سلوك توزيع احتمالي معين وتتمتع هذه المشاهدات بخاصية الاستقلالية.[3][2]

٢-٢ وصف تجربة المحاكاة:

تم تنفيذ المحاكاة باعتماد اربعة حجوم للعينات (200,100,50,30) لمعرفة مدى تأثير حجم العينة في دقة نتائج طرائق التقدير، وكذلك تم اعتماد مجموعة نماذج من القيم الافتراضية لمعلمات توزيع ليندلي (Lin)، وتوزيع مارشال أولكن ليندلي M–O–Lin)) والمبينة في الجدول (٣-١) الآتي، وتكرار التجربة ١٠٠٠ مرة لكل نموذج من نماذج القيم الافتراضية وذلك بهدف الحصول على أعلى تجانس ممكن .

جدول (٣-١)

نماذج القيمة الافتراضية لمعلمة **توزيع ليندلي (Lin) وتوزيع مارشال أولكن ليندلي(M–O–Lin)**

Model	Lin	M-O-Lin	
	θ	Θ	A
1	0.2	0.2	0.5
2	1	0.2	2
3	2	1	0.5
4	-	1	2
5	-	2	0.5
6	-	2	٢

وقد تم استعمال طريقة معكوس دالة التوزيع التراكمية لتوليد المشاهدات العشوائية (البيانات) بطريقة التحويل المعكوس لتوزيع ليندلي (Lin) وتوزيع مارشال أولكن ليندلي(M–O–Lin) **كما يأتي** :

اولا: توليد أرقام عشوائية U_i تتبع التوزيع المنتظم ضمن الفترة (٠,١)

$$U_i \sim U(0،1)، \qquad i = 0،1،2،......،n \ .$$

U_i : يمثل متغيرا عشوائيا مستمرا يتبع التوزيع المنتظم يتم توليده باستعمال البرنامج على وفق الصيغة الآتية :

$$U = [0 \leq p \leq 1]،p \sim \text{UniformDistribution}[]$$

ثانيا: تحويل البيانات المولدة من الخطوة (أولاً) التي تتبع التوزيع المنتظم الى بيانات تتبع **توزيع ليندلي (Lin)** وكما هو مبين أدناه باستخدام مفهوم معكوس الدالة (Inverse Function)، فإذا كانت لدينا الدالة F الآتية:

$$u = F(x) \qquad (١-٣)$$

فان معكوس الدالة F^{-1} يمكن كتابتها على النحو الآتي:

$$x = F^{-1}(u) \qquad (2-3)$$

$$x = \frac{-1-\theta-product\log[e^{-1-\theta}(-1+u)(1+\theta)]}{\theta}$$

وبعد تنفيذ برنامج المحاكاة الذي تم كتابته باستعمال برنامج Mathematica تم الحصول على النتائج والتي تمثل مقدرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) وطريقة Jackknife (S_Jac) ومتوسط مربعات الخطأ MSE

ومتوسط مربعات الخطأ التكاملي IMSE، ثم تحدد أفضلية طريقة تقدير دالة البقاء بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE).

٢-٣ مناقشة نتائج المحاكاة

٢-4 نتائج محاكاة توزيع ليندلي

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع ليندلي في الجدول(٣-2) والشكل (٣-٣) ادناه.

جدول (٣-٢)

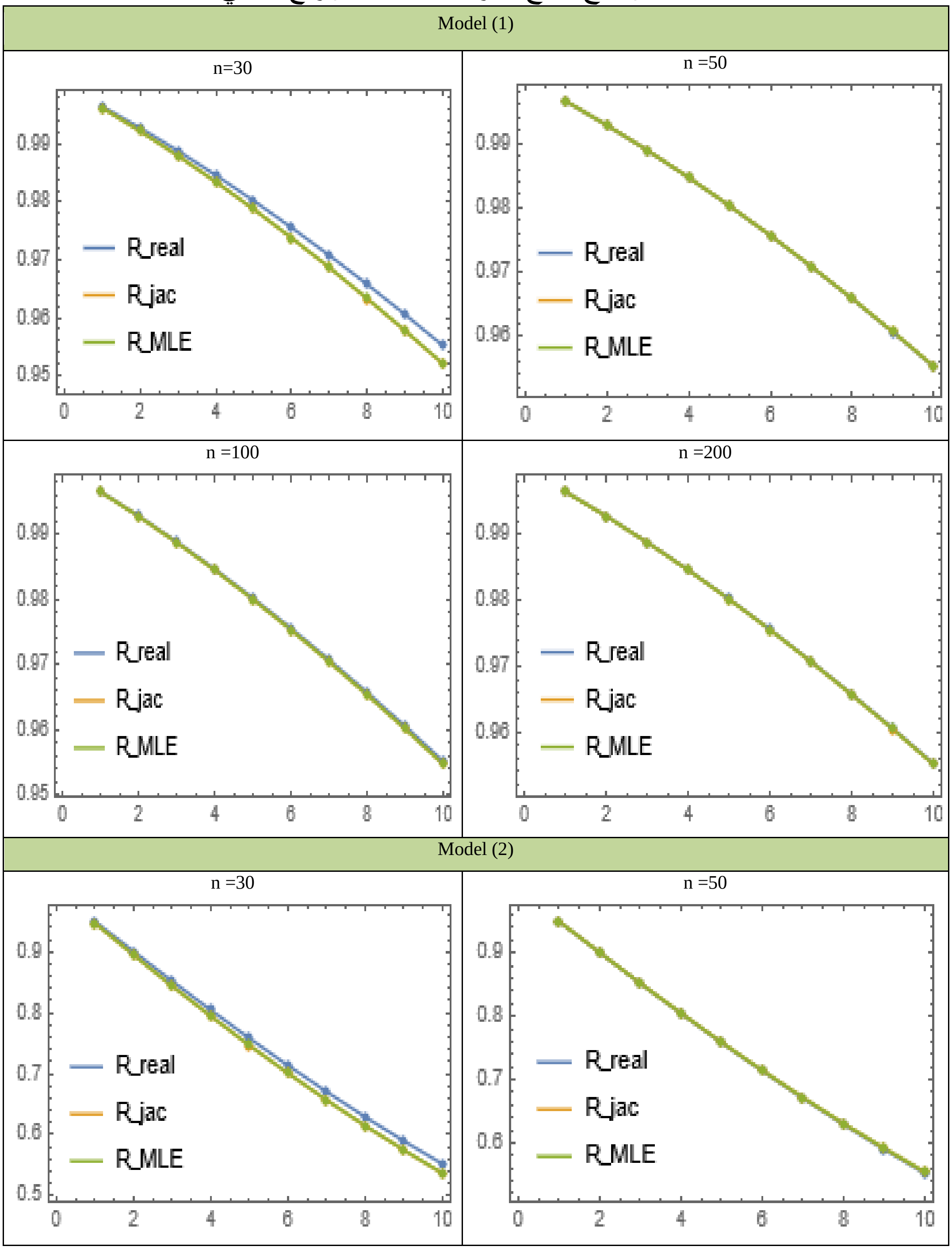
نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع ليندلي

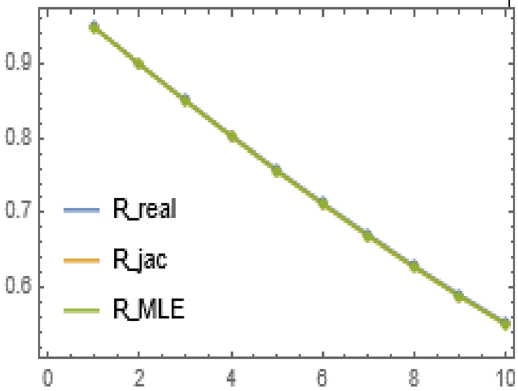
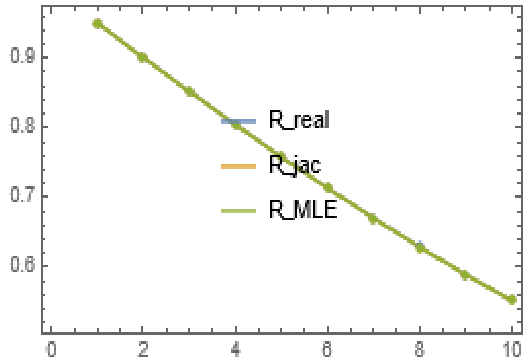
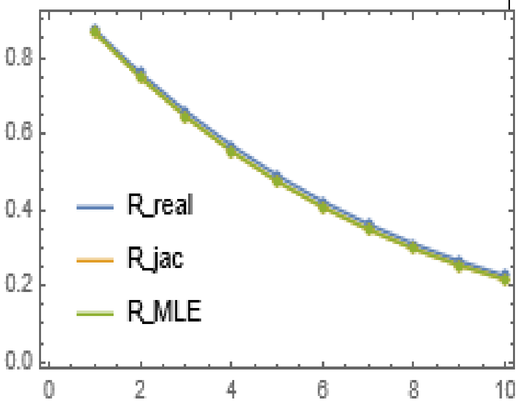
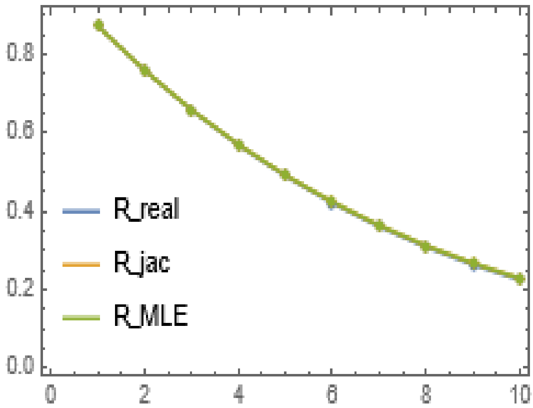
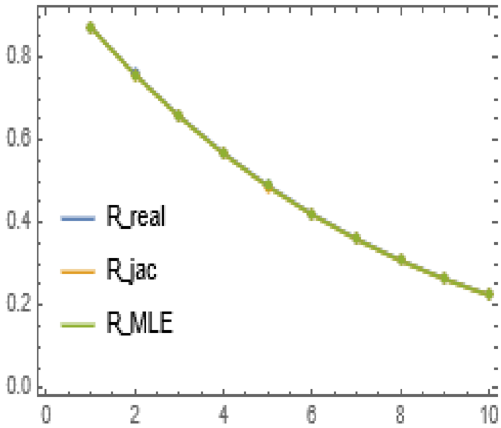
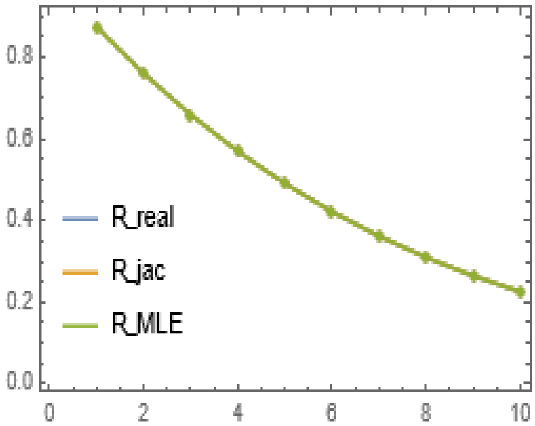
Model 1 (θ = 0.2)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99654	0.99627	0.99654	0.99649	0.99652	8.704E-07	2.639E-07	1.811E-07	1.078E-07
0.2	0.99282	0.99227	0.99283	0.99273	0.99279	3.690E-06	1.121E-06	7.692E-07	4.581E-07
0.3	0.98885	0.98802	0.98887	0.98872	0.98882	8.755E-06	2.666E-06	1.829E-06	1.090E-06
0.4	0.98466	0.98352	0.98468	0.98448	0.98461	1.634E-05	4.988E-06	3.421E-06	2.038E-06
0.5	0.98024	0.97879	0.98027	0.98001	0.98018	2.670E-05	8.169E-06	5.603E-06	3.338E-06
0.6	0.97561	0.97384	0.97565	0.97534	0.97554	4.006E-05	1.228E-05	8.424E-06	5.020E-06
0.7	0.97078	0.96868	0.97083	0.97046	0.97070	5.661E-05	1.740E-05	1.193E-05	7.111E-06
0.8	0.96576	0.96333	0.96582	0.96539	0.96566	7.654E-05	2.357E-05	1.617E-05	9.636E-06
0.9	0.96056	0.95779	0.96064	0.96013	0.96045	9.998E-05	3.086E-05	2.117E-05	1.262E-05
1	0.95519	0.95207	0.95527	0.95470	0.95506	1.270E-04	3.931E-05	2.696E-05	1.607E-05
IMSE						0.00004566	0.0000141	0.0000096	0.0000057
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99654	0.99627	0.99654	0.99649	0.99652	9.065E-07	2.730E-07	1.833E-07	1.084E-07
0.2	0.99282	0.99226	0.99282	0.99273	0.99279	3.842E-06	1.160E-06	7.786E-07	4.604E-07
0.3	0.98885	0.98800	0.98886	0.98872	0.98882	9.116E-06	2.758E-06	1.851E-06	1.095E-06
0.4	0.98466	0.98350	0.98467	0.98448	0.98461	1.701E-05	5.158E-06	3.463E-06	2.048E-06
0.5	0.98024	0.97876	0.98026	0.98001	0.98018	2.780E-05	8.447E-06	5.671E-06	3.354E-06
0.6	0.97561	0.97380	0.97564	0.97533	0.97554	4.170E-05	1.270E-05	8.527E-06	5.044E-06
0.7	0.97078	0.96864	0.97082	0.97045	0.97069	5.892E-05	1.799E-05	1.208E-05	7.146E-06
0.8	0.96576	0.96328	0.96581	0.96538	0.96566	7.965E-05	2.437E-05	1.636E-05	9.683E-06
0.9	0.96056	0.95773	0.96062	0.96013	0.96045	1.040E-04	3.191E-05	2.142E-05	1.268E-05
1	0.95519	0.95201	0.95525	0.95470	0.95506	1.322E-04	4.064E-05	2.728E-05	1.615E-05
IMSE						0.00004751	0.0000145	0.0000098	0.0000058
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 3 (θ = 2)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.87331	0.86648	0.87357	0.87222	0.87302	6.306E-04	2.011E-04	1.371E-04	8.149E-05
0.2	0.75970	0.74839	0.76036	0.75792	0.75927	1.872E-03	6.130E-04	4.175E-04	2.483E-04
0.3	0.65857	0.64464	0.65972	0.65644	0.65814	3.107E-03	1.043E-03	7.099E-04	4.220E-04
0.4	0.56915	0.55398	0.57080	0.56690	0.56877	4.052E-03	1.394E-03	9.473E-04	5.628E-04
0.5	0.49051	0.47513	0.49264	0.48831	0.49024	4.626E-03	1.627E-03	1.105E-03	6.555E-04
0.6	0.42167	0.40680	0.42425	0.41965	0.42154	4.849E-03	1.742E-03	1.181E-03	6.998E-04
0.7	0.36168	0.34779	0.36463	0.35989	0.36169	4.790E-03	1.755E-03	1.188E-03	7.027E-04
0.8	0.30958	0.29696	0.31284	0.30807	0.30974	4.530E-03	1.690E-03	1.142E-03	6.741E-04
0.9	0.26448	0.25329	0.26797	0.26326	0.26478	4.143E-03	1.572E-03	1.060E-03	6.242E-04
1	0.22556	0.21583	0.22921	0.22463	0.22597	3.690E-03	1.421E-03	9.563E-04	5.618E-04
IMSE						0.0036289	0.0013058	0.0008842	0.0005233
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.87331	0.86634	0.87352	0.87221	0.87302	6.555E-04	2.079E-04	1.387E-04	8.189E-05
0.2	0.75970	0.74818	0.76029	0.75790	0.75927	1.944E-03	6.335E-04	4.226E-04	2.495E-04
0.3	0.65857	0.64439	0.65963	0.65642	0.65813	3.221E-03	1.078E-03	7.184E-04	4.241E-04
0.4	0.56915	0.55374	0.57071	0.56688	0.56877	4.197E-03	1.439E-03	9.586E-04	5.655E-04
0.5	0.49051	0.47490	0.49256	0.48829	0.49023	4.786E-03	1.680E-03	1.118E-03	6.587E-04
0.6	0.42167	0.40661	0.42418	0.41963	0.42154	5.013E-03	1.798E-03	1.195E-03	7.032E-04
0.7	0.36168	0.34763	0.36457	0.35988	0.36169	4.948E-03	1.811E-03	1.201E-03	7.062E-04
0.8	0.30958	0.29684	0.31279	0.30806	0.30974	4.677E-03	1.744E-03	1.155E-03	6.774E-04
0.9	0.26448	0.25320	0.26794	0.26325	0.26477	4.275E-03	1.621E-03	1.072E-03	6.273E-04
1	0.22556	0.21578	0.22919	0.22462	0.22597	3.806E-03	1.466E-03	9.672E-04	5.646E-04
IMSE						0.0037524	0.0013478	0.0008946	0.0005258
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

الشكل (٣-٣)

يوضح نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع ليندلي



n =100	n=200
	
n=100	n=200
Model (3)	
n =30	n =50
	
n =١٠0	n =٢٠0
	

من خلال النتائج المبينة في الجدول (٣-٢) نلاحظ ما يلي:

١-إنّ الافضلية لطريقة الإمكان الأعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة البقاء لتوزيع ليندلي لامتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) حسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.

٢-إنّ تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الإمكان الأعظم وطريقة Jackknife قد أظهرتا متوسطاً أقرب إلى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.

٣-إن قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (٠،1).

٤-إن قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.

وكذلك الشكل (٣-٣) يوضح ما توصل إليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

٢-٣-٤ نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن ليندلي

تم تلخيص نتائج محاكاة توزيع مارشال اولكن ليندلي في الجدول(٣-٣) والشكل (٣-٢) في أدناه.

نتائج تجربة المحاكاة لتوزيع مارشال اولكن ليندلي جدول(٣-٣)

Model 1 (θ = 0.2, α=0.5)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99310	0.99105	0.99393	0.99352	0.99331	1.493E-05	3.041E-06	4.003E-07	1.193E-06
0.2	0.98573	0.98155	0.98745	0.98661	0.98618	6.218E-05	1.286E-05	1.684E-06	5.043E-06
0.3	0.97795	0.97158	0.98060	0.97930	0.97864	1.447E-04	3.042E-05	3.961E-06	1.192E-05
0.4	0.96978	0.96117	0.97340	0.97162	0.97073	2.645E-04	5.651E-05	7.324E-06	2.213E-05
0.5	0.96125	0.95038	0.96588	0.96360	0.96246	4.224E-04	9.180E-05	1.184E-05	3.592E-05
0.6	0.95239	0.93926	0.95807	0.95525	0.95388	6.186E-04	1.368E-04	1.757E-05	5.345E-05
0.7	0.94323	0.92784	0.94997	0.94662	0.94501	8.523E-04	1.918E-04	2.452E-05	7.482E-05
0.8	0.93379	0.91617	0.94163	0.93772	0.93587	1.122E-03	2.570E-04	3.272E-05	1.001E-04
0.9	0.92411	0.90428	0.93306	0.92857	0.92649	1.425E-03	3.323E-04	4.216E-05	1.292E-04
1	0.91422	0.89223	0.92427	0.91921	0.91689	1.758E-03	4.177E-04	5.279E-05	1.620E-04
IMSE						0.0006684	0.0001530	0.0000195	0.0000596
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99310	0.99104	0.99393	0.99352	0.99331	1.538E-05	3.102E-06	4.147E-07	1.197E-06
0.2	0.98573	0.98154	0.98745	0.98661	0.98618	6.403E-05	1.312E-05	1.745E-06	5.060E-06
0.3	0.97795	0.97156	0.98061	0.97930	0.97864	1.489E-04	3.101E-05	4.106E-06	1.196E-05
0.4	0.96978	0.96115	0.97341	0.97162	0.97073	2.721E-04	5.761E-05	7.592E-06	2.220E-05
0.5	0.96125	0.95036	0.96589	0.96360	0.96246	4.344E-04	9.359E-05	1.228E-05	3.603E-05
0.6	0.95239	0.93923	0.95808	0.95525	0.95388	6.358E-04	1.394E-04	1.821E-05	5.362E-05
0.7	0.94323	0.92781	0.94999	0.94662	0.94501	8.756E-04	1.955E-04	2.543E-05	7.506E-05
0.8	0.93379	0.91614	0.94165	0.93772	0.93587	1.152E-03	2.619E-04	3.394E-05	1.004E-04
0.9	0.92411	0.90426	0.93308	0.92858	0.92649	1.462E-03	3.387E-04	4.373E-05	1.296E-04
1	0.91422	0.89221	0.92430	0.91921	0.91689	1.804E-03	4.257E-04	5.477E-05	1.625E-04
IMSE						0.0006864	0.0001560	0.0000202	0.0000598
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

تابع للجدول (٣-٣)

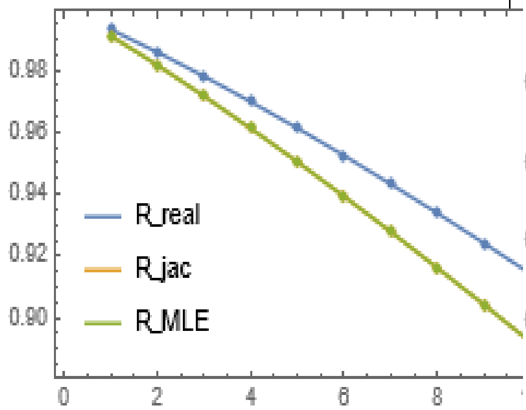
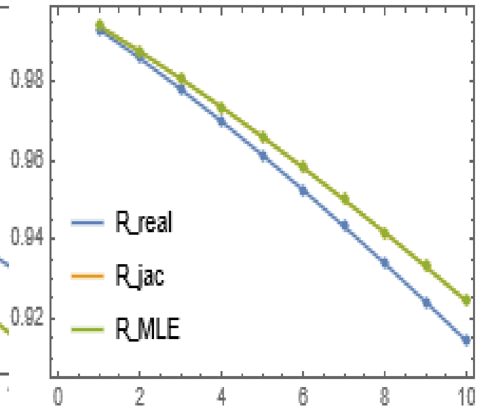
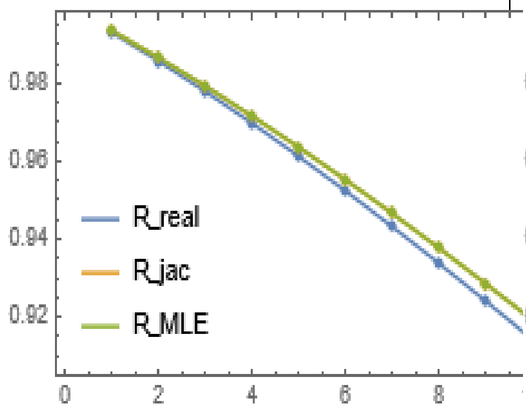
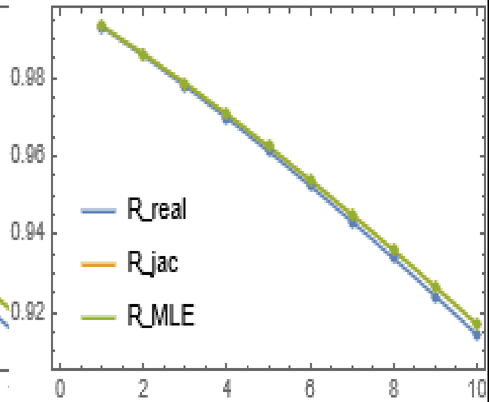
Model 2 (θ = 0.2, α=2)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99827	0.99764	0.99854	0.99837	0.99833	1.250E-06	2.729E-07	2.139E-08	1.062E-07
0.2	0.99640	0.99509	0.99696	0.99662	0.99652	5.373E-06	1.177E-06	9.205E-08	4.582E-07
0.3	0.99440	0.99237	0.99527	0.99475	0.99459	1.293E-05	2.842E-06	2.218E-07	1.106E-06
0.4	0.99227	0.98949	0.99348	0.99275	0.99254	2.446E-05	5.399E-06	4.206E-07	2.102E-06
0.5	0.99002	0.98644	0.99158	0.99065	0.99037	4.050E-05	8.979E-06	6.981E-07	3.495E-06
0.6	0.98766	0.98324	0.98959	0.98843	0.98809	6.158E-05	1.371E-05	1.064E-06	5.336E-06
0.7	0.98518	0.97989	0.98749	0.98610	0.98570	8.817E-05	1.973E-05	1.528E-06	7.674E-06
0.8	0.98258	0.97640	0.98530	0.98367	0.98320	1.207E-04	2.716E-05	2.100E-06	1.056E-05
0.9	0.97988	0.97277	0.98302	0.98113	0.98059	1.597E-04	3.612E-05	2.787E-06	1.403E-05
1	0.97708	0.96902	0.98065	0.97850	0.97789	2.055E-04	4.673E-05	3.600E-06	1.813E-05
IMSE						0.0000720	0.0000162	0.0000013	0.0000063
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.99827	0.99764	0.99854	0.99837	0.99833	1.278E-06	2.775E-07	2.257E-08	1.065E-07
0.2	0.99640	0.99509	0.99696	0.99662	0.99652	5.494E-06	1.197E-06	9.714E-08	4.594E-07
0.3	0.99440	0.99237	0.99527	0.99475	0.99459	1.322E-05	2.890E-06	2.341E-07	1.109E-06
0.4	0.99227	0.98948	0.99348	0.99275	0.99254	2.500E-05	5.491E-06	4.439E-07	2.108E-06
0.5	0.99002	0.98644	0.99158	0.99065	0.99037	4.140E-05	9.132E-06	7.369E-07	3.505E-06
0.6	0.98766	0.98324	0.98959	0.98843	0.98809	6.293E-05	1.395E-05	1.123E-06	5.351E-06
0.7	0.98518	0.97989	0.98749	0.98610	0.98570	9.009E-05	2.007E-05	1.613E-06	7.695E-06
0.8	0.98258	0.97640	0.98530	0.98367	0.98320	1.233E-04	2.762E-05	2.217E-06	1.059E-05
0.9	0.97988	0.97277	0.98302	0.98113	0.98059	1.631E-04	3.673E-05	2.943E-06	1.407E-05
1	0.97708	0.96901	0.98065	0.97850	0.97789	2.099E-04	4.752E-05	3.801E-06	1.818E-05
IMSE						0.0000736	0.0000165	0.0000013	0.0000063
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

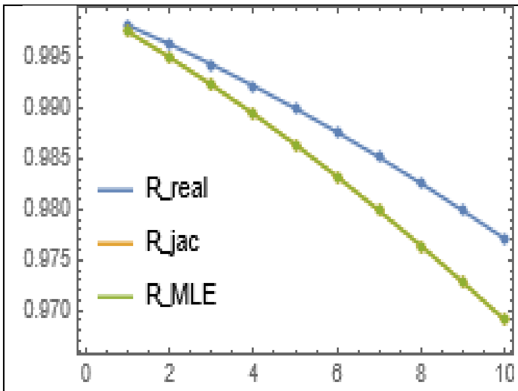
Model 5 (θ = 2, α=0.5)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.77512	0.74098	0.79199	0.78796	0.77053	6.438E-03	1.949E-03	6.411E-04	1.300E-03
0.2	0.61251	0.57472	0.63517	0.62883	0.60783	9.350E-03	3.452E-03	1.162E-03	2.092E-03
0.3	0.49095	0.45696	0.51318	0.50647	0.48697	8.694E-03	3.493E-03	1.282E-03	2.034E-03
0.4	0.39777	0.36908	0.41649	0.41076	0.39442	7.044E-03	2.800E-03	1.199E-03	1.648E-03
0.5	0.32495	0.30148	0.33900	0.33492	0.32205	5.497E-03	1.973E-03	1.052E-03	1.227E-03
0.6	0.26716	0.24849	0.27647	0.27423	0.26460	4.333E-03	1.290E-03	8.997E-04	8.805E-04
0.7	0.22076	0.20640	0.22579	0.22530	0.21845	3.516E-03	8.163E-04	7.629E-04	6.265E-04
0.8	0.18313	0.17264	0.18461	0.18560	0.18107	2.940E-03	5.241E-04	6.449E-04	4.514E-04
0.9	0.15239	0.14533	0.15109	0.15324	0.15056	2.516E-03	3.581E-04	5.435E-04	3.342E-04
1	0.12712	0.12306	0.12376	0.12675	0.12553	2.185E-03	2.684E-04	4.562E-04	2.562E-04
IMSE						0.0052511	0.0016924	0.0008644	0.0010850
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.77512	0.74385	0.79202	0.78797	0.77053	6.910E-03	1.994E-03	6.509E-04	1.303E-03
0.2	0.61251	0.57815	0.63523	0.62884	0.60784	1.015E-02	3.533E-03	1.180E-03	2.097E-03
0.3	0.49095	0.45966	0.51323	0.50648	0.48697	9.441E-03	3.580E-03	1.302E-03	2.039E-03
0.4	0.39777	0.37044	0.41651	0.41076	0.39442	7.524E-03	2.880E-03	1.218E-03	1.652E-03
0.5	0.32495	0.30129	0.33898	0.33491	0.32205	5.649E-03	2.043E-03	1.068E-03	1.231E-03
0.6	0.26716	0.24678	0.27641	0.27422	0.26459	4.180E-03	1.349E-03	9.131E-04	8.838E-04
0.7	0.22076	0.20333	0.22571	0.22528	0.21845	3.118E-03	8.679E-04	7.744E-04	6.292E-04
0.8	0.18313	0.16841	0.18452	0.18558	0.18106	2.360E-03	5.689E-04	6.546E-04	4.537E-04
0.9	0.15239	0.14016	0.15100	0.15321	0.15055	1.811E-03	3.967E-04	5.518E-04	3.362E-04
1	0.12712	0.11716	0.12368	0.12672	0.12552	1.401E-03	3.011E-04	4.633E-04	2.579E-04
IMSE						0.0052541	0.0017513	0.0008776	0.0010883
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

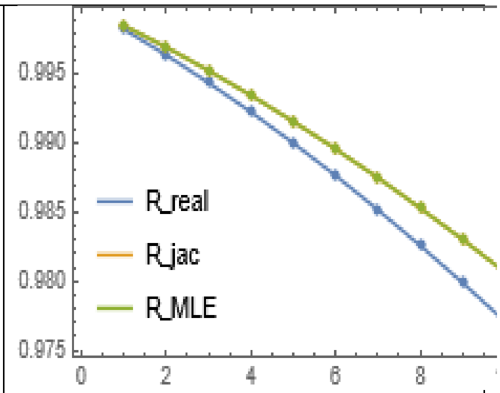
تابع للجدول (٣-٢)

Model 4 (θ =1, α=2)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.97440	0.96483	0.97855	0.97597	0.97532	2.758E-04	6.257E-05	4.654E-06	2.491E-05
0.2	0.94770	0.92947	0.95594	0.95081	0.94955	1.020E-03	2.460E-04	1.814E-05	9.589E-05
0.3	0.92005	0.89413	0.93226	0.92463	0.92281	2.103E-03	5.389E-04	3.945E-05	2.055E-04
0.4	0.89159	0.85901	0.90760	0.89756	0.89522	3.399E-03	9.241E-04	6.737E-05	3.448E-04
0.5	0.86245	0.82423	0.88202	0.86971	0.86691	4.796E-03	1.380E-03	1.005E-04	5.036E-04
0.6	0.83277	0.78992	0.85560	0.84122	0.83800	6.194E-03	1.882E-03	1.376E-04	6.719E-04
0.7	0.80268	0.75617	0.82844	0.81218	0.80859	7.516E-03	2.402E-03	1.774E-04	8.398E-04
0.8	0.77230	0.72305	0.80062	0.78274	0.77880	8.701E-03	2.916E-03	2.189E-04	9.987E-04
0.9	0.74176	0.69063	0.77222	0.75299	0.74875	9.706E-03	3.396E-03	2.614E-04	1.141E-03
1	0.71119	0.65895	0.74334	0.72307	0.71856	1.051E-02	3.821E-03	3.042E-04	1.262E-03
IMSE						0.0054216	0.0017568	0.0001330	0.0006088
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.97440	0.96483	0.97855	0.97597	0.97532	2.815E-04	6.361E-05	4.925E-06	2.498E-05
0.2	0.94770	0.92947	0.95594	0.95081	0.94955	1.040E-03	2.500E-04	1.919E-05	9.615E-05
0.3	0.92005	0.89415	0.93227	0.92463	0.92281	2.143E-03	5.477E-04	4.175E-05	2.061E-04
0.4	0.89159	0.85904	0.90761	0.89756	0.89522	3.462E-03	9.390E-04	7.127E-05	3.457E-04
0.5	0.86245	0.82428	0.88203	0.86972	0.86691	4.882E-03	1.402E-03	1.063E-04	5.050E-04
0.6	0.83277	0.78998	0.85563	0.84122	0.83800	6.304E-03	1.911E-03	1.454E-04	6.737E-04
0.7	0.80268	0.75625	0.82847	0.81219	0.80859	7.648E-03	2.440E-03	1.873E-04	8.422E-04
0.8	0.77230	0.72315	0.80065	0.78274	0.77880	8.853E-03	2.962E-03	2.309E-04	1.002E-03
0.9	0.74176	0.69073	0.77226	0.75300	0.74876	9.877E-03	3.450E-03	2.753E-04	1.145E-03
1	0.71119	0.65906	0.74339	0.72308	0.71856	1.069E-02	3.882E-03	3.199E-04	1.265E-03
IMSE						0.0055186	0.0017847	0.0001402	0.0006106
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

Model 6 (θ = 2, α= 2)									
ti	S_real	S_MLE				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.93237	0.91914	0.93676	0.94010	0.92908	1.398E-03	2.595E-04	1.726E-04	1.523E-04
0.2	0.86344	0.84217	0.87175	0.87738	0.85798	4.146E-03	8.734E-04	6.054E-04	4.861E-04
0.3	0.79415	0.76886	0.80565	0.81263	0.78751	6.848E-03	1.613E-03	1.167E-03	8.539E-04
0.4	0.72543	0.69902	0.73922	0.74676	0.71846	8.839E-03	2.296E-03	1.740E-03	1.160E-03
0.5	0.65817	0.63259	0.67326	0.68074	0.65152	9.908E-03	2.800E-03	2.232E-03	1.359E-03
0.6	0.59321	0.56958	0.60859	0.61555	0.58733	1.011E-02	3.070E-03	2.588E-03	1.439E-03
0.7	0.53122	0.51009	0.54600	0.55216	0.52644	9.631E-03	3.112E-03	2.788E-03	1.417E-03
0.8	0.47279	0.45427	0.48623	0.49143	0.46925	8.706E-03	2.970E-03	2.838E-03	1.320E-03
0.9	0.41832	0.40232	0.42992	0.43409	0.41607	7.563E-03	2.710E-03	2.761E-03	1.178E-03
1	0.36809	0.35438	0.37755	0.38071	0.36709	6.385E-03	2.395E-03	2.591E-03	1.018E-03
IMSE						0.0073535	0.0022099	0.0019484	0.0010383
ti	S_real	S_jac				MSE			
		n				n			
		30	50	100	200	30	50	100	200
0.1	0.93237	0.91552	0.93676	0.94010	0.92908	1.373E-03	2.671E-04	1.741E-04	1.527E-04
0.2	0.86344	0.83606	0.87175	0.87738	0.85798	4.135E-03	8.984E-04	6.105E-04	4.876E-04
0.3	0.79415	0.76130	0.80567	0.81264	0.78751	6.920E-03	1.658E-03	1.177E-03	8.565E-04
0.4	0.72543	0.69098	0.73925	0.74677	0.71846	9.020E-03	2.359E-03	1.754E-03	1.164E-03
0.5	0.65817	0.62492	0.67330	0.68075	0.65152	1.017E-02	2.876E-03	2.249E-03	1.363E-03
0.6	0.59321	0.56302	0.60863	0.61556	0.58734	1.037E-02	3.154E-03	2.607E-03	1.444E-03
0.7	0.53122	0.50522	0.54603	0.55217	0.52644	9.819E-03	3.198E-03	2.808E-03	1.422E-03
0.8	0.47279	0.45148	0.48625	0.49143	0.46925	8.766E-03	3.055E-03	2.857E-03	1.325E-03
0.9	0.41832	0.40181	0.42992	0.43409	0.41607	7.470E-03	2.791E-03	2.780E-03	1.183E-03
1	0.36809	0.35619	0.37754	0.38070	0.36709	6.144E-03	2.471E-03	2.608E-03	1.023E-03
IMSE						0.0074183	0.0022728	0.0019625	0.0010420
Best / sample size (n)						S_MLE	S_MLE	S_MLE	S_MLE
Best / model						S_MLE			

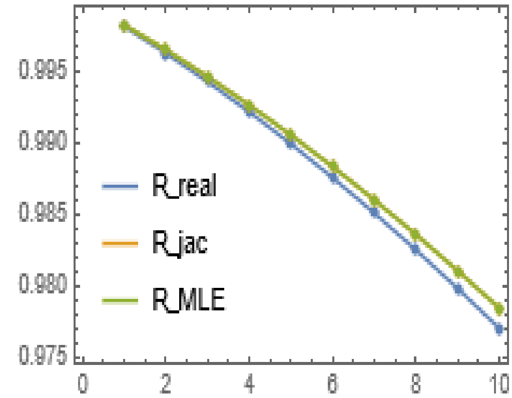
Model (1)	
n=30	n =50
	
n =10٠	n =200
	
Model (2)	
n =30	n =50

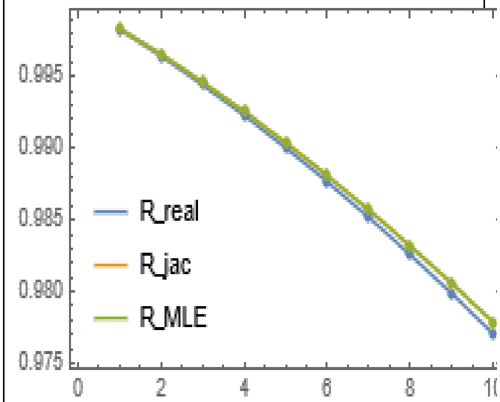




n =100

n =200

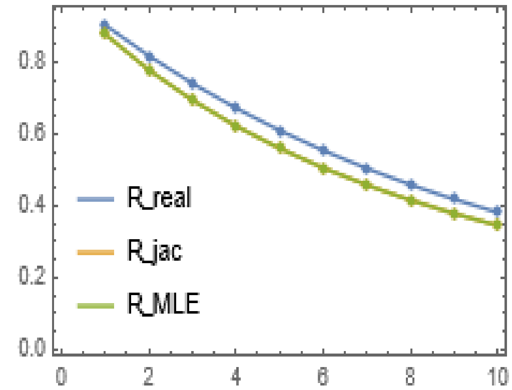


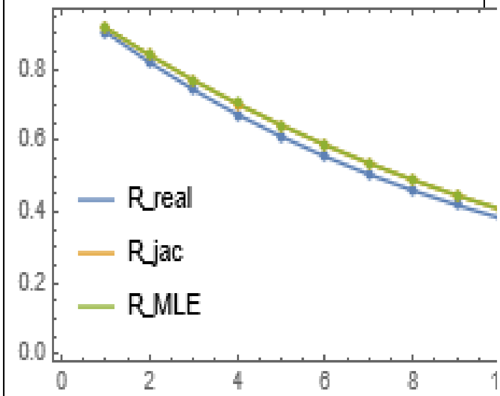


Model (3)

n =30

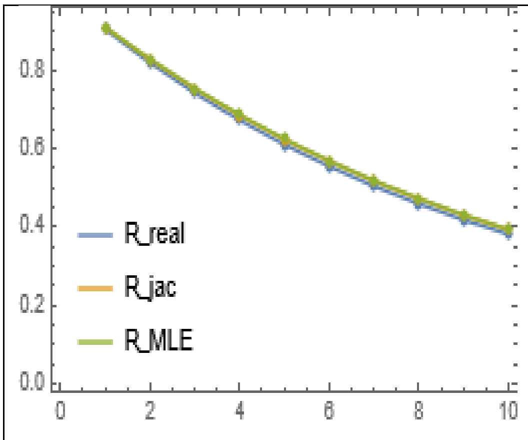
n =50

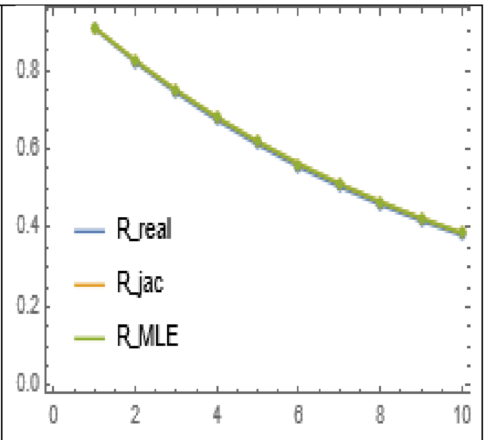




n =١٠٥

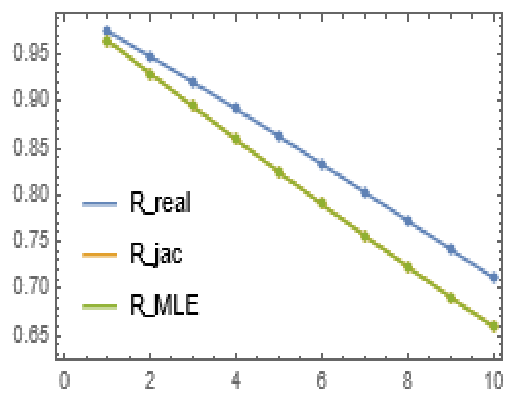
n =٢٠٥



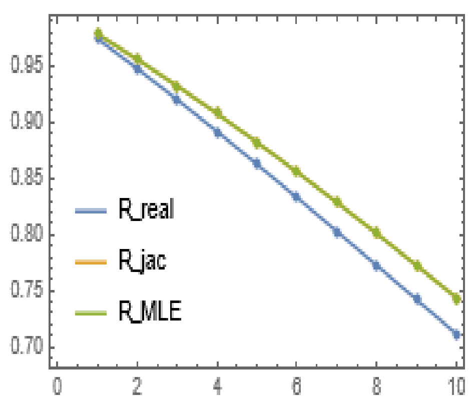


Model (4)

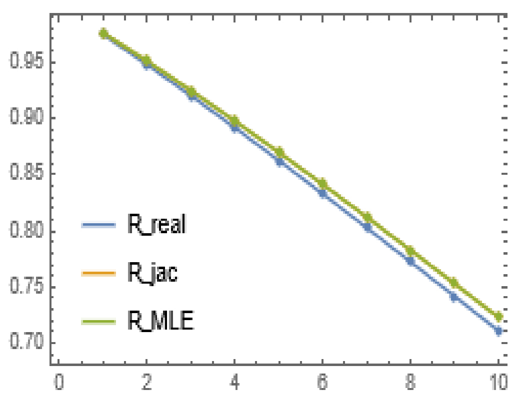
n=30



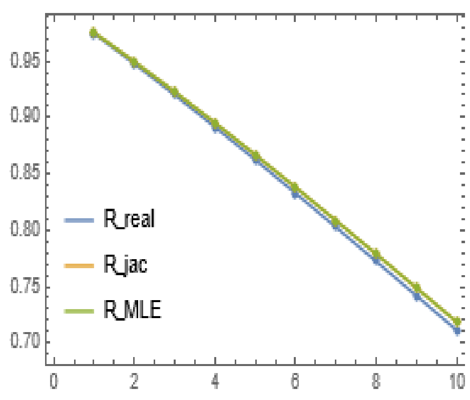
n =50

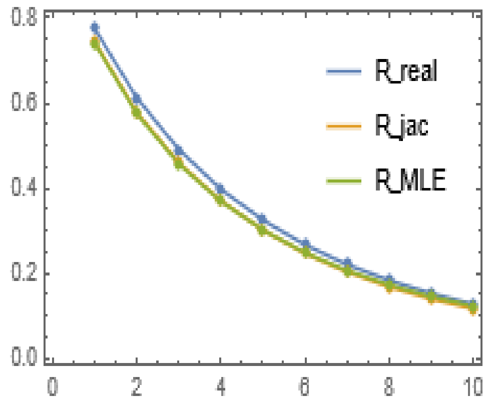
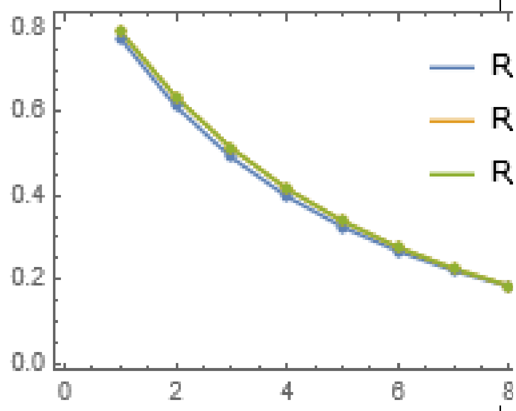
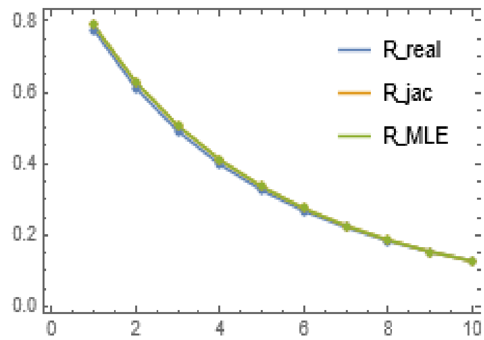
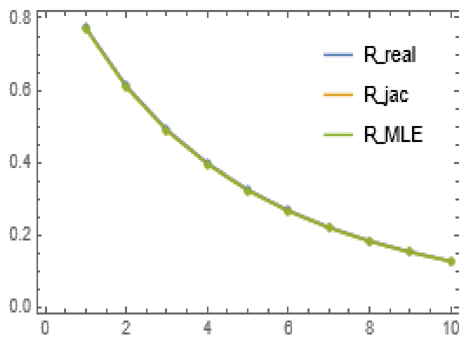


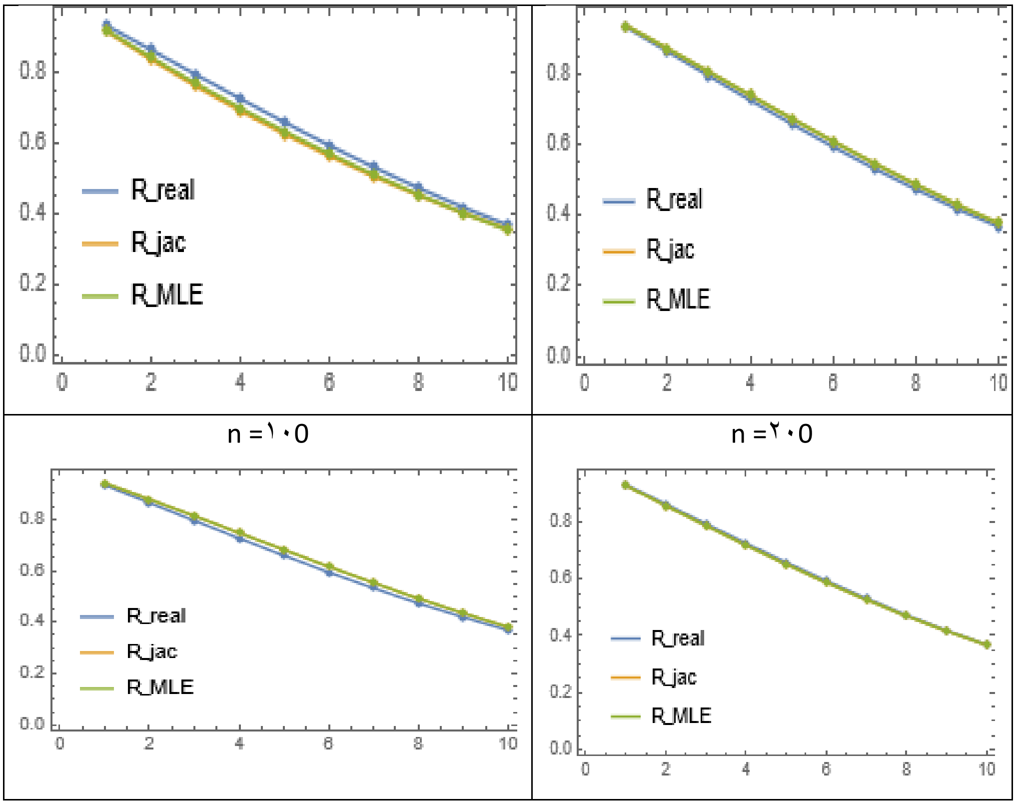
n =100



n =200



Model (5)	
n =30	n =50
	
 n=100	 n=200
Model (6)	
n =30	n =50



n =١٠٥

n =٢٠٥

من خلال النتائج المبينة في الجدول (٣-٣) نلاحظ ما يلي :

١-إن الافضلية لطريقة الامكان الاعظم (S_MLE) مقارنة بطريقة Jackknife (S_Jac) في تقدير دالة بقاء توزيع مارشال اولكن ليندلي لامتلاكها أقل متوسط مربعات خطأ تكاملي (IMSE) بحسب احجام العينات والنماذج المفترضة كافة.

٢-إن تقديرات دالة البقاء باستعمال طريقة الامكان الاعظم وطريقة Jackknife قد اظهرتا متوسطا اقرب إلى القيم الحقيقية لدالة البقاء وذلك للنماذج واحجام العينات المفترضة كافة.

٣-إن قيم دالة البقاء الحقيقية والمقدرة تتناقص بزيادة الزمن (t_i) وهي على الدوام تقع قيمها ضمن الفترة (٠،1).

٤-إن قيم المقياس الاحصائي (MSE) والمقياس (IMSE) تتناقص بازدياد حجم العينة.

وكذلك الشكل (٣-٢) يوضح ما توصل اليه في ما يخص اقتراب القيم التقديرية لدالة البقاء من القيم الحقيقية عند كل حجم من حجوم العينات المفترضة.

٤-١ الاستنتاجات

١- إن دالة البقاء متناقصة بزيادة الزمن (اي تتناسب عكسيا مع الزمن) وهذا ما يتطابق مع ما تم عرضه في الجانب النظري.

٢- قيم دالة الكثافة التجميعية تقع بين الصفر والواحد، وهي في تزايد وتتناسب طرديا مع الزمن.

٣- أظهر الجانب التجريبي بالاعتماد على المعيار الاحصائي متوسط مربعات الخطأ التكاملي (IMSE) افضلية طريقة الامكان الاعظم مقارنة بطريقة Jackknife في تقدير دالة بقاء التوزيع الأساسي (توزيع ليندلي Lin) وتوزيع مارشال اولكن ليندلي(M–O– Lin).

٤- متوسط قيم دالة البقاء هو (0.5) أي أن متوسط احتمال بقاء المريض المصاب بالفايروس يساوي 50% لكل عشرة ايام تقريبا.

٤-٢ التوصيات

١- استعمال طريقة الامكان الاعظم لتقدير دالة البقاء للتوزيعات الاحتمالية(توزيع ليندلي (Lin))، (توزيع مارشال اولكن ليندلي(M–O– Lin)).

٢- تطبيق التوزيعات الاحتمالية المذكورة انفاً على حالة البيانات تحت المراقبة.

٣- استعمال طرائق اخرى لتقدير دالة بقاء التوزيعات الاحتمالية قيد الدراسة ومقارنتها مع طريقة الامكان الاعظم MLE.

المصادر:

اولا : المصادر العربية :

١- البدران، فراس منذر،(٢٠١٤)،" تقدير دالة معولية انموذج ليندلي للاجهاد والمتانة"، رسالة ماجستير، الجامعة المستنصرية، كلية الادارة والاقتصاد.

٢- الباقر، زينب محمد باقر صادق،(٢٠١٧)،"تقديرات دالة المعولية لتوزيع بواسون مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/ كلية الادارة والاقتصاد/ قسم الاحصاء.

٣- الشمري، نجاة عبد الجبار رجب، (٢٠٠٨)، "استخدام المحاكاة في مقارنة مقدرات التقلص لمعلمة الشكل لتوزيع وايبل لبيانات المراقبة"، أطروحة دكتوراه في علوم الأحصاء، جامعة بغداد/ كلية الأدارة والأقتصاد /قسم الاحصاء.

٤- عبد الله، ثائرة نجم، (٢٠١٨)" تقدير معلمة القياس لتوزيع ليندلي – دراسة مقارنة في تحليل أوقات الانتظار"، مجلة كلية الرافدين الجامعة للعلوم، العدد ٤٣، ٢٦٦-٢٧٨.

٥- العامري، بهاء عبد الرزاق قاسم،(٢٠٢١)،"استعمال بعض التوزيعات المبتورة في بناء نظام خبير لتقدير الفترة المثلى لاستبدال المكائن والمعدات مع

تطبيق عملي"، اطروحة دكتوراه في علوم الاحصاء ،جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.

٦- فهد، باقر كريم،(٢٠١٨)،"اختيار أفضل طريقة لتقدير معلمات توزيع كابا الاحتمالي مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.

٧- لازم، جاسم حسن، (٢٠١٢)، " مقارنة بعض طرائق تقدير دالة البقاء للتوزيع الاسي المبتور"، مجلة العلوم الاقتصادية والادارية، المجلد ١٨، العدد٦٨، ٤٠٣-٤١٩.

٨- مهدي، منتظر جمعة، (٢٠٢١)،"التحويل التكعيبي لتوزيع Burr XII مع تطبيق عملي"، رسالة ماجستير في علوم الاحصاء، جامعة كربلاء/كلية الادارة والاقتصاد.

<u>ثانيا: المصادر الاجنبية</u>

9- Collett, D, (2003). Modeling survival data in medical research, Chapman and Hall, London.

10- Do Espirito Santo, A. P. J., & Mazucheli, J. (2015). Comparison of estimation methods for the Marshall–Olkin extended Lindley distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 85(17), 3437-3450.

11- Ebeling, C.E.,(1997),"An introduction to reliability and maintainability engineering", University of Dayton, McGraw-Hill Companies.

12- Famoye ،F. (2000). Goodness-of-fit tests for generalized logarithmic series distribution. Computational statistics & data analysis ،33(1) ،59-67.

13- Ghitany, M. E., Al-Mutairi, D. K., Al-Awadhi, F. A., & Al-Burais, M. M. (2012). Marshall-Olkin extended Lindley distribution and its application. International Journal of Applied Mathematics, 25(5), 709-721.

14- Ghitany, M. E., Atieh, B., & Nadarajah, S. (2008). Lindley distribution and its application. *Mathematics and computers in simulation*, *78*(4), 493-506.

15- Harry, G. K.,(2012), "Engineering Reliability Failure models". Drexel university-USA.

16- Klein,J,P. and Moeschberger, M. L.,(2003),"Survival Analysis: Techniques for censored and truncated data", 2rd ed. New York : Springer.

17- Lawless ،J. F. (2011). Statistical models and methods for lifetime data (Vol. 362). John Wiley & Sons.

18- Marvin, R.,(2004), "System Reliability Theory, Models, Statistical Methods, and Applications". Second edition, Walter, Shewuhart & Samuel S. Wilks, Norwegian University of science and Technology, Norwege.

19- AL-Nasser, Abdul Majeed ,(2009) "Statistical Reliability" Ithraa Publishing and Distribution ,University of Baghdad.

20- Trivedi, K.S. (2002), "Probability and Statistics with Reliability", Queuing & Computer Science Applications , Second Edition , Awiley – Interscience publication , John Wiley & SONS , INC.