

تقدير دالة المخاطرة المختلطة

د. حسام نجم عبود
رئيس قسم علوم الحاسبات
كلية الراءفين الجامعة

ملخص

في هذا البحث تم اجراء المقارنة بين مقدرات الامكان الأعظم ومقدرات بيز بتوظيف أسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو لكل من دالة المخاطرة المختلطة ودالة المعوليه وكل منهما بدلالة المعلمتين λ و P حيث ان λ هي معلمة القياس و P احتمال عدم تأثر النظام بالضغوط البيئية وتم التوصل إلى أفضل طريقة الامكان الأعظم على طريقة بيز لتقدير المعلمة P ودالة المخاطرة المختلطة وداله المعوليه في حين كانت طريقة بيز الأفضل لتقدير معلمة القياس λ .

Abstract

In this research we estimate the mixture hazard rate function and reliability function by using the maximum likelihood method and Bayes method.

المقدمة

تخضع النظم الهندسية إلى ضغوط بيئية قد تؤثر (أو لا تؤثر) على رياضيا". للنظام افرض أن $P(0 < P < 1)$ يمثل احتمالية ان النظام القادر على معالجة هذه الضغوط بحيث لا يتأثر نمط فشله وان $q(q=1-p)$ تمثل احتمالية الحدث المتمم . ففي مثل هذه الحالات يستخدم توزيع الفشل لوصف نمط الفشل للنظام رياضيا". ويمكن في بعض الحالات الخاصة استخدام التوزيعات المختلطة لحل مثل تلك المشكلة. على أية حال في هذا الصدد سوف نواجه مشكلتين:

المشكلة الأولى:- هو وجود مسببات مادية وراء فشل النظام بصورة منفردة او مجتمعة وفي الوقت الحالي لا يمكن التمييز بين تلك المسببات والتقدير الرياضي لها لذا تزداد صعوبة الاعتماد على توزيع الفشل

أما المشكلة الثانية:- فحتى لو طبق أسلوب حسن المطابقة على مشاهدات حقيقية لوقت الفشل تبقى هناك مشكلة طبيعية اللانظامية للتوزيعات الزمنية التي يختلف سلوكها تماما" عندما تكون المشاهدات قليلة بالنسبة للعينة ذات الحجم الصغير.

ومن الواضح ان أفضل ما يمكن عمله بهذا الخصوص هو البحث عن مفهوم نافع يمكن من خلاله التمييز بين توزيعات زمنية مختلفة ولعل نموذج نسبة المخاطرة تمثل مفهوم يمكن اعتماده في المعولية إذ بعد تحليل الاعتبارات المادية للنظام يمكن صياغة توليفة من دوال نسبة المخاطرة التي توفر بدورها توزيعات لوقت الفشل .

واستنادا إلى ما تقدم وبسبب الضغوط المستمرة للنظم لنفترض ان احتمالية بقاء دالة نسبة المخاطرة للنظام دون تغيير في P وان تلك الدالة تعاني من التغيير باحتمالية $q(q=1-p)$



دالة المخاطرة المختلطة:-

افرض أن دالة المخاطرة المختلطة هي كما في المعادلة التالية :

$$h(t) = p\lambda + (1-p)\lambda t \dots \dots \dots (1)$$

حيث أن

P: تمثل احتمال أن النظام يمكن أن يتحمل الضغوطات و λ تمثل معلمة القياس

عندما $p=1$ نحصل على دالة المخاطرة الثابتة للتوزيع الأسي

عندما $p=0$ نحصل على دالة المخاطرة لتوزيع رالي أو توزيع ويبيل بمعلمة شكل $= 2$

توزيع وقت الفشل المختلط

باستخدام العلاقة

$$f(t) = h(t) \exp \left\{ -\int_0^t h(t) dt \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ودالة $h(t)$ في المعادلة 1 فان توزيع وقت الفشل هو

$$f(t) = [p\lambda + (1-p)\lambda t] \exp[-\{p\lambda t + 1/2(1-p)\lambda t^2\}] \dots \dots \dots (3)$$

$$\lambda, t > 0$$

حيث أن

ويمكن الحصول على دالة المعولية $R(t)$

$$R(t) = 1 - F(t)$$

$$= \exp[-\{p\lambda t + 1/2(1-p)\lambda t^2\}] , t > 0 \dots \dots \dots (4)$$

تقدير المعالم ودالة المعولية ودالة المخاطرة

سوف يتم استخدام كل من طريقة الإمكان الأعظم وطريقة بيز للتقدير وكما يلي :

1- طريقة الإمكان الأعظم MLE:-

افرض أن $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ هي عينة عشوائية من أوقات الفشل التي دالة الفشل لها هي الدالة رقم

(3) فان دالة الإمكان لها هو :

$$L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n / \lambda, p) = \lambda^n \left[\prod_{i=1}^n \{p + (1-p)t_i\} \right] \exp \left[-\lambda \sum_{i=1}^n \left\{ p t_i + \frac{1}{2} (1-p) t_i^2 \right\} \right] \dots \dots \dots (5)$$

وبأخذ اللوغاريتم إلى المعادلة (5) نحصل على

$$\ln l = n \ln \lambda + \sum_{i=1}^n [\ln \{p + (1-p)t_i\}] - \lambda \sum_{i=1}^n \left\{ p t_i + \frac{1}{2} (1-p) t_i^2 \right\} \dots \dots \dots (6)$$

الحالة الأولى:- عندما p معلومة ولتقدير المعلمة λ نأخذ المشتقة الجزئية إلى $\ln L$ بالنسبة إلى λ

ونساويها بالصفر نحصل على مقدر الامكان الاعظم للمعلمة λ

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n [p t_i + \frac{1}{2} (1-p) t_i^2]} \dots \dots \dots (7)$$



وباستخدام خاصية الثبات لمقدر الإمكان الأعظم نحصل على تقدير الإمكان الأعظم لكل من دالة المعولية $R(t)$ ودالة المخاطرة $h(t)$ وكما يلي :

$$\hat{R}_1(t_i) = \exp[-\hat{\lambda}\{pt_i + \frac{1}{2}(1-p)t_i^2\}] \dots \dots \dots (8)$$

$$\hat{h}_1(t_i) = p\hat{\lambda} + (1-p)\hat{\lambda}t_i \dots \dots \dots (9)$$

الحالة الثانية :- عندما λ معلومة ولتقدير p نأخذ المشتقة الجزئية الى $\log L$ بالنسبة الى المعلمة p ومساواتها بالصفر نحصل على

$$\sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{p + \frac{t_i}{1-t_i}} \right] - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^n t_i(2-t_i) = 0 \dots \dots \dots (10)$$

وبسبب ارتفاع درجة غير الخطية في المعادلة رقم (10) يمكن استخدام احدى الطرق العددية في التقدير (طريقة نيوتن رافسون) لتقدير المعلمة p

$$\hat{p} = p_0 - \frac{g(p_0)}{g'(p_0)} \dots \dots \dots (11)$$

حيث ان

$g(p_0)$ هي الدالة رقم (10) بتعويض قيمة أولية الى p في المعادلة . $g'(p_0)$ هي مشتقة

الدالة $g(p_0)$ ونستمر بتطبيق المعادلة (11) الى ان يتم الحصول على تقدير \hat{p} بحيث ان الفرق يكون اقل ما يمكن . وباستخدام خاصية الثبات لمقدر الإمكان الاعظم نحصل على مقدري كل من دالة المعولية $R(t)$ ودالة المخاطرة $h(t)$

$$\hat{R}_2(t_i) = \exp[-\lambda\{\hat{p}t_i + \frac{1}{2}(1-\hat{p})t_i^2\}] \dots \dots \dots (12)$$

$$\hat{h}_2(t_i) = \hat{p} + (1-\hat{p})t_i \dots \dots \dots (13)$$

2- تقدير بيز

افرض أن التوزيع الأولى للمعلمة λ هو توزيع كاما بالمعلمتين α, β

$$g_1(\lambda) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma\beta} \lambda^{\beta-1} e^{-\alpha\lambda} \quad \alpha, \beta, \lambda > 0 \dots \dots \dots (14)$$

وان التوزيع الأولى للمعلمة p هي توزيع بيتا بالمعلمتين a, b

$$g_2(p) = \frac{1}{\beta(a,b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1} \quad a, b > 0, 0 < p < 1 \dots \dots \dots (15)$$



الحالة الأولى:- عندما p معلومة ولتقدير المعلمة λ يمكن صياغة دالة الإمكان في المعادلة (5) كما يلي:

$$L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n / \lambda, p) = \lambda^n T_1 e^{-\lambda T_2} \dots \dots \dots (16)$$

حيث أن

$$T_1 = \prod_{i=1}^n \{p + (1-p)t_i\}$$

$$T_2 = \sum_{i=1}^n \{pt_i + \frac{1}{2}(1-p)t_i^2\}$$

وباستخدام التوزيع الاولي الى λ (14) ودالة الامكان في (16) يمكن الحصول على دالة الكثافة الاحتمالية الاحقه للمعلمة λ الاتيه :

$$\pi(\lambda / t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, p) = \frac{L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n / \lambda, p) g_1(\lambda)}{\int_0^{\infty} L(t_1, t_2, t_3, \dots, t_n / \lambda, p) g_1(\lambda) d\lambda}$$

$$= \frac{(\alpha + T_2)^{n+\beta}}{n + \beta} \lambda^{n+\beta-1} e^{-\lambda(\alpha+T_2)} \dots \dots \dots (17)$$

وباستخدام دالة الخسارة التربيعية فان تقدير بيز الى λ وليكن λ^* هو

$$\lambda^* = E(\lambda / t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, p) = \int_0^{\infty} \lambda \pi_1(\lambda / t_1, t_2, \dots, t_n, p) d\lambda$$

$$\lambda^* = \frac{n + \beta}{\alpha + T_2} \dots \dots \dots (18)$$

ومقدر بيز لدالة المعولية $R(t)$ وليكن $R_1^*(t)$ هو

$$R_1^*(t) = E[R(t) / (t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, p)] = \int_0^{\infty} R(t) \Pi_1(\lambda / t_1, t_2, t_3, \dots, t_n, p) d\lambda$$

$$= \frac{1}{(1 + \frac{T_3}{\alpha + T_2})^{n+\beta}} \dots \dots \dots (19)$$

حيث ان $T_3 = pt_i + (1-p)t_i^2 / 2$

وتقدير بيز الى دالة المخاطرة $h_1(t)$ وليكن $h_1^*(t)$ هو

$$h_1^*(t) = E[h(t) / (t_1, t_2, \dots, t_n, p)] = \int_0^{\infty} h(t) \pi_1(\lambda / t_1, \dots, t_n, p) d\lambda$$

$$= \frac{n + \beta [p + (1-p)t_i]}{\alpha + T_2} \dots \dots \dots (20)$$



الحالة الثانية :- عندما λ معلومة ولتقدير المعلمة p يمكن صياغة دالة الامكان (5) كما يلي

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda, p) = \lambda^n \sum_{i=1}^n p^{n-i} (1-p) k_i(x) e^{-\lambda/2(pT_4+T_5)} \dots\dots\dots(21)$$

حيث ان

$$k_i(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n} t_{i_1} t_{i_2} \dots t_{i_j}$$

$$T_4 = (2 \sum_{i=1}^n t_i - \sum_{i=1}^n t_i^2)$$

$$T_5 = \sum_{i=1}^n t_i^2$$

وافرض ان التوزيع الاولي الى p هو توزيع بيتا بالمعلمتين a, b

$$g_2(p) = \frac{1}{\beta(a,b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}, a, b > 0, 0 < p < 1 \dots\dots\dots(22)$$

وباستخدام دالة التوزيع الاولية (22) ودالة التوزيع المشتركة (21) يمكن الحصول على دالة التوزيع اللاحقة لـ (p)

$$\begin{aligned} \pi_2(p / t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda) &= \frac{L(t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda, p) g_2(p)}{\int_0^1 L(t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda, p) g_2(p) dp} \\ &= \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n \left(\frac{-\lambda T_4}{2}\right)^t \frac{1}{r!} p^{n+r+a-i-1} (1-p)^{b+i-1} k_i(x)}{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n \left(\frac{-\lambda T_4}{2}\right)^t \frac{1}{r!} \beta(n+r+a-i, b+i) k_i(x)} \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

لذلك فان تقدير بيز للمعلمة p ولتكن p^* هي

$$\begin{aligned} p^* &= E(p / t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda) = \int_0^1 p \pi_2(p / t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda) dp \\ p^* &= \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n \left(\frac{-\lambda T_4}{2}\right)^t \frac{1}{r!} \beta(n+r+a-i+1, b+i) k_i(x)}{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n \left(\frac{-\lambda T_4}{2}\right)^t \frac{1}{r!} \beta(n+r+a-i, b+i) k_i(x)} \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$



وتقدير بيز الى دالة المعولية $R(t)$ ولتكن R_2^* هي

$$R_2^*(t) = E[R(t) / t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda]$$

$$= \frac{e^{-\lambda t^2/2} \int_0^1 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{-\lambda T_4}{2} \right)^r \frac{1}{r!} \left[\frac{-\lambda t(2-t)}{2} \right]^k * \frac{1}{k!} \beta(n+r+a+k-i, b+i) k_i(x)}{\sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=1}^n \left(\frac{-\lambda T_4}{2} \right)^r \frac{1}{r!} \beta(n+r+a-i+1, b+i) k_i(x)} \dots (25)$$

وتقدير دالة المخاطرة $h(t)$ وليكن $h_2^*(t)$ هو

$$h_2^*(t) = E[h(t) / t_1, t_2, \dots, t_n / \lambda]$$

$$h_2^*(t) = \lambda(1-t)p^* + \lambda t \dots (26)$$

حيث ان p^* موجود في المعادلة (24)

الجانب التجريبي: - باستخدام اسلوب المحاكاة بطريقة مونت كارلو تم توليد بيانات تتبع التوزيع المختلط في المعادلة (3) باستخدام عينات مختلفة $n=10,20,50,100$ وقيم افتراضيه للمعلمات λ, p وهي

$$\lambda = 0.2, 0.5 \quad p = 0, 0.5, 1$$

ومن خلال استخدام العينات التي تم توليدها قمنا بتقدير المعامل λ, p بكل من طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز وتم مقارنة الطريقتين باستخدام مقياس المقارنة متوسط مربعات الخطأ MSE للقيم التقديرية وفقا للصيغة التالية

$$MSE(\hat{\theta}) = \frac{\sum_{i=1}^r (\hat{\theta} - \theta)^2}{r}$$

حيث ان r يمثل عدد مرات التكرار ولتكن $r=1000$
 θ تمثل مقدر المعلمة او الدالة حسب الطريقة المستخدمة في التقدير

نتائج المحاكاة

باستخدام البرنامج الذي كتب من قبل الباحث بلغة Qbasic تم الحصول على النتائج المعروضة في الجداول التالية

جدول رقم (1)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير المعلمة λ

حجم العينة n	λ	P	MLE	Bayes	Best
10	0.1	0.5	0.156746	0.132382	Bayes
	1		0.201002	0.121121	Bayes
	2		0.100092	0.100100	MLE
20	0.1	0.5	0.442356	0.462712	MLE
	1		0.468994	0.441441	Bayes Bayes
	2		0.501942	0.400400	Bayes Bayes
50	0.1	0.5	0.266861	0.265491	Bayes Bayes
	1		0.279950	0.260360	Bayes
	2		0.250251	0.250250	Bayes
100	0.1	0.5	0.054321	0.045641	Bayes
	1		0.022092	0.035701	MLE
	2		0.024489	0.0101011	Bayes

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة بيز في تقدير المعلمة λ افضل من طريقة الامكان الاعظم في التقدير ولكافة حجوم العينة كما ونلاحظ ان متوسط مربعات الخطأ لتقدير المعلمة λ يبدأ بالتقارب للطريقتين كلما كبر حجم العينة .



جدول رقم (2)
يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير المعلمة P

حجم العينة n	P	λ	MLE	Bayes	Best
10	0.5	2	0.745320	0.774512	MLE
	0.2		0.702421	0.7011210	Bayes
	0.7		0.694315	0.6654321	Bayes
20	0.5	2	0.546821	0.556741	MLE
	0.2		0.552145	0.640121	MLE MLE
	0.7		0.503210	0.511621	
50	0.5	2	0.301202	0.300210	Bayes MLE
	0.2		0.311402	0.328120	MLE
	0.7		0.299452	0.300010	
100	0.5	2	0.202010	0.224560	MLE
	0.2		0.112358	0.197812	MLE
	0.7		0.187510	0.143149	Bayes

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز في تقدير المعلمة P ولكافة حجوم العينة . كما ونلاحظ اقتراب قيمة متوسط مربعات الخطأ للطريقتين يتقارب كلما كبر حجم العينة

جدول رقم (3)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير دالة المعولية R(t)

حجم العينة n	λ	P	MLE	Bayes	Best
10	0.1	0.5	0.227891	0.204506	Bayes
	1		0.2011101	0.203108	MLE
	2		0.234510	0.255585	MLE
20	0.1	0.5	0.233781	0.243708	MLE
	1		0.300451	0.203176	Bayes MLE
	2		0.211121	0.222852	
50	0.1	0.5	0.274321	0.285612	MLE
	1		0.243156	0.205958	Bayes MLE
	2		0.154346	0.191499	
100	0.1	0.5	0.297810	0.312323	MLE
	1		0.197851	0.208627	MLE
	2		0.181105	0.181056	MLE

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز في تقدير دالة المعولية . كما ونلاحظ ان متوسط مربعات الخطأ للطريقتين تتقارب كلما كبر حجم العينة .

جدول رقم (4)

يبين متوسط مربعات الخطأ MSE لتقدير دالة المخاطرة h(t)

حجم العينة n	λ	P	MLE	Bayes	Best
10	0.1	0.5	0.678911	0.532453	Bayes
	1		0.637511	0.786802	MLE
	2		0.644721	0.434448	Bayes
20	0.1	0.5	0.135671	0.188540	MLE
	1		0.0.011352	0.033744	MLE
	2		0.12342	0.099281	Bayes
50	0.1	0.5	0.697801	0.793147	MLE
	1		0.236678	0.249562	MLE
	2		0.200810	0.113998	Bayes
100	0.1	0.5	0.233781	0.277551	MLE
	1		0.11025	0.104833	Bayes
	2		0.457087	0.604472	MLE

نلاحظ من الجدول اعلاه ان طريقة الامكان الاعظم في تقدير دالة المخاطرة افضل من طريقة بيز . نلاحظ تقارب قيم متوسط مربعات الخطأ MSE من بعضها البعض للطريقتين بزيادة حجم العينة.



الاستنتاجات

- 1- ان طريقة بيز افضل من طريقة الامكان الاعظم لتقدير معلمة القياس λ .
- 2- ان طريقة الامكان الاعظم افضل من طريقة بيز لتقدير المعلمة P ودالة المعولية ودالة المخاطرة .
- 3- ان قيم متوسط مربعات الخطأ ولكافة المقدرات تتقارب بزيادة حجم العينة .

المصادر

- 1- البياتي، حسام نجم، (2002)، "مقارنة بين طرائق تقدير انموذج ويبيل للفشل باستخدام المحاكاة" اطروحة دكتوراه، كلية الادارة والاقتصاد- جامعة بغداد
- 2- K.K.sharma , Hare Krishna & Bhupendra Singh (1997) "Bayes estimation of the mixture of hazard – rate model "Reliability Engineering & system safety, vol.55 No.1.