

# امثلة على تقديرات الامكان الاعظم غير الوحيدة

أ. سليم اسماعيل الغرابي

جامعة بغداد - كلية الادارة والاقتصاد

قسم الاحصاء

## 1. المقدمة

افرض ان  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  هي عينة عشوائية من توزيع له دالة احتمالية الكثافة  $f(x, \theta)$ . المثال المعتاد في مثل هكذا تقدير للامكان الاعظم (MLE)  $\hat{\theta}_{L_1}$  هو ليس وحيد باخذ  $f(x, \theta)$  ليكون كثافة منتظمة عليه، مثل  $(\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2})$ .

انظر [Bickel and Doksum (1977, P111)] او [Hogg and Craig (1978, P(207))] بالاضافة الى احضار بعض الامور غير الطبيعية. هذا المثال وصف ذلك من الممكن له MLE'S في فترة معينة. في هذا المبحث تكون فئة كبيرة من الامثلة  $f(x, \theta)$  والتي تكون مع احتمالية موجبة. الـ MLE بنيت على مثال بحجم 2 هو غير وحيد في طريقة اساسية، ذلك ان الاختبارات ممكنة لـ  $\hat{\theta}$  ليست في الفترة. الكثافات  $f(x, \theta)$  لبعض معنى طبيعي ذلك يمكن اختبارها ان تكون احادية لاجل ان (MLE) مبنية على ملاحظة مفردة هي دائماً وحيدة. الكثافة الكوشية مع معلمة محاية هي هكذا امثال. المناقشة يمكن ان تكون متقطعة لتوضيح غير وحيدة اساسية لـ MLE لاجل امثلة بحجوم اختبارية وان مناقشة مسالة بناء كفاء لتقديرات عدم وحدانية MLE'S. [انظر Lehmann 1980].

## 2. عدم وحدانية الـ MLE لاجل فئة في الكثافات

The Nonuniqueness of the MLE for Class of Densities.

افرض ان  $g$  هي دالة احتمالية الكثافة معرفة على  $R$  تحقق الشروط الثلاثة التالية:

1.  $g$  هي دالة مستمرة ومتماثلة حول نقطة الاصل 0 وهي موجبة بجميع القيم.

2.  $g$  هي مستمرة وقابلة للاشتقاق مرتين لجميع القيم عدا ربما عند 0.

3. اذا كتبنا  $h = \log g$  فان  $h''(y) > 0$  لبعض قيم  $y$  التي لا تساوي صفر.

الحالة مع هكذا كثافة يمكن ان تكون مركبة هي سوف تناقش اخيراً في نهاية هذا المبحث.

افرض ان  $(x_1, x_2)$  هو متغير عشوائي من توزيع له دالة احتمالية الكثافة  $f(x, \theta) = g(x - \theta)$  حيث ان  $x \in R$  وان  $\theta \in R$ .

افرض ان  $x_1, x_2$  هما قيم مشاهده لـ  $X_1, X_2$  على التوالي، نكتب  $\bar{X} = (X_1 + X_2)/2$  وان  $\Delta = (X_1 - X_2)/2$  دالة الامكان الاعظم هي تعطى بالشكل:

$$\begin{aligned} L(\theta / X) &= g(X_1 - \theta) g(X_2 - \theta) \\ &= g(\bar{X} + \Delta - \theta) g(\bar{X} - \Delta - \theta) \\ &: \text{فرضية 1 ترينا انه لكل } K \geq 0: \end{aligned}$$

$$L(\bar{X} + K / X) = L(\bar{X} - K / X) = g(\Delta + K) g(\Delta - K) \dots (1)$$

هكذا  $L(\hat{\theta} / X)$  هي متماثلة حول  $\bar{X}$ .

إذاً اما  $\hat{\theta} = \bar{X}$  او ان  $\theta$  ليست وحيدة حسب الفرضية 2 ، 3 ، يوجد (a,b) بحيث انه لكل  $y(a,b)$  يوجد  $\delta > 0$  بحيث ان

$$\begin{aligned} h(y + \delta) - h(y) &> h(y) - h(y - \delta) \\ \text{or } g(y + \delta) g(y - \delta) &> |g(y)|^2 \dots (2) \end{aligned}$$

افرض ان  $x_1, x_2$  هي بحيث ان  $\Delta \in (a, b)$ . فان (1) ، (2) ، ترينا بانها يوجد  $\delta > 0$  بحيث ان



$$L(\bar{X} \pm \delta / X) = g(\Delta + \delta) g(\Delta - \delta) > |g(\Delta)|^2 \setminus = L(\bar{X} / X)$$

إذا ليست وحيدة  $\hat{\theta} \neq \bar{X}$ ,  $\hat{\theta}$  is not unique

وان الاختبار المحتمل لـ  $\hat{\theta}$  ليس في الفترة الاحتمالية ذلك ان  $\hat{\theta}$  هي ليست وحيدة هي على الاقل اكبر في الاحتمالية  $|X_1 - X_2|/2$  تعود الى (a,b). الاحتمالية الاخيرة هي موجبة بسبب ان g هي موجبة لكل القيم.

الان نرى انه يوجد اعداد كبيرة لكثافات g تحقق الشروط المطلوبه الشروط 1 ، 2 هي سهلة التقابل. افرض ان معاكس L' ، 3  $h''(y) \leq 0$  لكل قيم y التي لا تساوي صفر. فانه من السهل ان نرى ان  $g(x)$  نتيجة الى الصفر عند التغير الاسي عندما  $X \rightarrow \mp \infty$  ، وان g لها دالة مولدة العزم. في التطبيق g يجب ان يكون لها عزم محدود لكل الترتيبات اذا كان  $h''(y) \leq 0$  لكل القيم وهكذا اذا كانت g تحقق 1 ، 2 ولها عزم غير محدد لبعض الرتبة، فان g سوف تحقق 3 اوتوماتيكياً.

انه من الواضح اننا نستطيع اختبار g لان تكون احادية مع منوال وحيد. وهكذا لعينة ذات حجم 1. الـ MLE يكون وحيد. الكثافات g التي تحقق

$$g^2(y) \geq g(y + \delta) g(y - \delta) \dots (3)$$

لكل  $\delta \in R, y \in R$  تسمى لوغارتم المقعر.

إذا g هي لوغارتم المقعر، فان  $f(x, \theta) = g(X - \theta)$  هي (a Polya Frequency Function) من نوع 2 [انظر Lehmann , (1959,P.115)].

اذا دققنا في المتباينة المتحققة في (3) عندما  $\delta \neq 0$  من السهولة يمكن ان الـ MLE لـ  $\theta$  هو وحيد لاجل عينات من اي حجم. وهكذا هدفنا الذي اتم حول عدم وحدانية الـ  $\hat{\theta}$  هو ضروري لكون  $\log g$  يجب ان يكون محدب بشكل دقيق على بعض الفترة.

### 3. الامثلة Examples

في هذا المبحث نحضر مثالين مخصصين توضيح نتيجة المبحث 2 نفرض  $h = \log g$  ،  $f(x, \theta) = g(X - \theta)$  هي المقدر MLE لـ  $\theta$  مبنية على عينة ذات حجم 2. القيمتين الملاحظتين  $x_1, x_2$  هما مكتوبة بالشكل  $\bar{X} \pm \Delta$ .

#### مثال (1)

افرض ان

$$g(y) = [\Pi(1 + y^2)]^{-1}$$

فان

$$h'''(y) = 2(y^2 - 1) / [(1 + y^2)^2]$$

$$h''(y) > 0 \quad \text{اذا}$$

عندما  $|y| > 1$ . فانه يتبع ان  $\hat{\theta}$  هي غير وحيدة طالما يكون  $|X_1 - X_2| > 2$



هذه يمكن ايضاً ان تحقق مباشرة كما يأتي:

بما ان

$$h'(y) = -2y(1+y^2)^{-1}$$

تملك

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{(\bar{X} + \Delta - \theta)}{[1 + (\bar{X} + \Delta - \theta)^2]} + \frac{(\bar{X} - \Delta - \theta)}{[1 + (\bar{X} - \Delta - \theta)^2]}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \frac{2(\bar{X} - \theta)[(\bar{X} - \theta)^2 - \Delta^2 + 1]}{[1 + (\bar{X} + \Delta - \theta)^2][1 + (\bar{X} - \Delta - \theta)^2]}$$

افرض ان  $|\Delta| > 1$  فان معادلة الامكان يكون لها ثلاثة جذور هي:

$\theta = \bar{X}$  ،  $\theta = \bar{X} \pm (\Delta^2 - 1)^{1/2}$  ، اكثر من ذلك عندما  $\theta$  تزداد من  $-\infty$  الى  $\infty$  ، المشتقة

السابقة هي على التعاقب موجبة، سالبة، موجبة، سالبة، انه يتبع ذلك ان

$$\hat{\theta} = \bar{X} \pm (\Delta^2 - 1)^2$$

كلما كانت  $|\Delta| > 1$

$$\hat{\theta} = \bar{X} \quad \text{if } |\Delta| \leq 1$$

هذه مسألة صحيحة

[انظر (23 (b) on page 114 of Bickel and Doksum (1977)]

### مثال (1)

هذا المثال يرينا ان  $\hat{\theta}$  يمكن ان تكون غير وحيدة مع احتمالية 1

$$g(y) = c(1+|y|)^{-\alpha}$$

حيث ان  $\alpha > 1$  هي معرفه ثابتة وان c يمكن جعلها ثابتة فان

$$h''(y) = \alpha(1+|y|)^{-2} > 0, \quad \forall y \neq 0$$

ينتج من ذلك ان MLE هي وحيدة فقط اذا كانت  $\Delta = 0$  بما ان الحادث  $x_1 = x_2$  له احتمالية 0 ، الـ MLE

هو غير وحيد مع احتمالية 1.

### 4. غير الوحدانية لـ MLE لعينات ذات احجام اختيارية

#### Nonuniqueness of the MLE for samples of Arbitrary size

في المبحث 2، الحقيقة ان  $x_1, x_2$  يقعان متماثلين مع  $\bar{X}$  التي تستخدم بطريقة اساسية. لأجل هذه

النتيجة يوجد بعض الصعوبة في توسيع هذه النتيجة، لذلك المبحث لعينات ذات حجوم اختيارية المناقشة

يمكن ان تكون غير صحيحة. على اي حال لإثبات ان عدم وحدانية الـ MLE لعينات لاي حجم  $2 \leq$  .

هذا التوسيع هو مخطط في هذا المبحث

افرض ان I تمثل مجموعة كل الاعداد الصحيحة، افرض ان  $[g(i), i \in I]$  هو توزيع على I بحيث ان

$$(a) \quad q(i) > 0 \quad \text{and} \quad q(i) = q(-i) \quad \text{for all } i \in I ;$$

(b) g هي احادية مع منوال وحيد عند 0 وان

(c) اذا كانت  $\eta = q(1)/q(0)$  فانه لبعض  $N \geq 2$  يكون

$$\eta q(N+1)q(N-1) > |q(N)|^2 \quad \dots (4)$$



لكي نرى الشرط c يكون متحقق، ضع  $q(1)=\eta q(0)$  ،  $q(2)=q(3)=\xi \eta q(0)$  حيث ان  $0 < \xi < \eta < 1$  فان (4) تحقق لـ  $N=2$  نلاحظ انه في رؤية الشرط (b) المتباينة (4) لا تحقق لـ  $N=1$  او  $N=0$

افرض ان  $X_1, X_2, \dots, X_n$  هي مشاهدات مستقلة بحيث ان  $P_\theta(X_j=i)=q(i-\theta)$  لكل  $j=1, 2, \dots, n$  ،  $i \in I$  ،  $\theta \in I$

افرض ان  $x_j$  هي قيمة مشاهدة لـ  $X_j$  . الشرط (b) يرينا ان MLE لـ  $\theta$  هو وحيد ويساوي  $X_1$  عندما  $n=1$

الآن افرض ان  $n \geq 2$  ، افرض ان  $n$  هي عدد فردي وان  $n=2m+1$  مع  $m \geq 1$  . افرض ان

$$X_j = a , X_{m+j} = a + 2N$$

لكل  $j=1, 2, \dots, m$  وان  $X_{2m} = a + N$  وان

$$X_{2m+1} = a + N$$

$$L(\theta / X) = [q(a-\theta)q(a+2N-\theta)]^m . q(a+N-\theta)$$

إذا لاجل  $K \in I$

$$L(a+N+K / X) = [q(N+K)q(N-K)]^m . q(K)$$

وهكذا  $L$  هي متماثلة حد  $a + N$  اكثر من ذلك نرى الشروط  $\eta < 1$  ، (4) لنحصل على

$$L(a+N \pm 1 / X) = [q(N+1)q(N-1)]^m . q(1)$$

$$= [q(N+1)q(N-1)]^m . \eta q(0)$$

$$\geq [q(N+1)q(N-1)]^m . \eta^m q(0)$$

$$> [q(N)]^{2m} . q(0) = L(a+N / X) \text{ هو الـ MLE ، } \hat{\theta} \neq a+N$$

ليس وحيد، وامكانية اختيار  $\hat{\theta}$  لا تكون فترة متقطعة. نلاحظ ان الحادث

$$X_1 = X_2 = \dots = X_m = a$$

$$X_{2m+1} = a+N , X_{m+1} = \dots = X_{2m} = a+2N$$

لها احتمالية موجبة. حساب حالة  $n=2m$  هي متشابه وهنا تكون كافية وان يكون لها شكل ضعيف لـ (4)

حيث ان العامل  $\eta$  هو غائب في جهة اليسار.



### Reference

1. Bickel Peter J. and Doksum, Kjell A. (1977) "Mathematical Statistical " san Francisco, Holden – Day.
2. Hogg, Robert V., and Craig Alan T. (1978) " Introduction to Mathematical Statistical " (4 th ed.) New York Macmillan.
3. Hogg Robert V., and Tanis, Elliot A. (1983) " Probability and Statistical Inference " (2 sd ed.) Macmillan Co. New York.
4. Lehmann, E. L. (1959) " Testing Statistical Hypotheses " New York, Jone Wiley.
5. Lehmann, E. L. (1980) "Efficient Likelihood Estimators " The American Statistician, 34, 233 – 235.
6. Mood, Alexander M. (1987) " Introduction to the Theory of Statistical " (3 rd ed.) Megraw Hill International Editions.