Derivation of formulaes evaluating double integrals and their error formulaes using Mid-point and Simpson's methods

اشتقاق قواعد حساب التكاملات الثنائية وصيغ الخطا باستخدام قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون

ا. علي حسن محمد
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/ جامعة الكوفة

صفاء مهدي موسى
قسم الرياضيات/كلية التربية للبنات/ جامعة الكوفة

المستخلص

الهدف الرئيسي من هذا البحث هو إيجاد قيم التكاملات الثنائية البعد عددياً مكاملاتها مستمرة أو معتلة المشتقات الجزئية أو معتلة في نقطة واحدة أو أكثر من منطقة التكامل , وإيجاد صيغة عامة لصيغ الخطأ حسب سلوك المكامل وبأسلوب جديد مغاير للأسلوب الذي اتخذوه باحثون آخرون محمد[14], الطائي [9] , ضياء [12]. وبالاعتماد على حدود التصحيح التي وجدناها قمنا بحساب تكاملات ثنائية بالنسبة لكل حالة من حالات المكامل , فوجدنا إن الطريقتين RSSو RMS (الاولى هي الطريقة مركبة من استخدام قاعدة سمبسون على البعدين الداخلي x والخارجي y والاخرى من قاعدتي النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وسمبسون على البعد الداخلي x) مع تطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليهما عندما عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الخارجي أي ان $\left(h=\bar{h}\right)$ حيث إن $\bar{h}$ تعني المسافات بين الإحداثيات السينية و h هي المسافات بين الإحداثيات الصادية اذ يمكن الاعتماد على الطريقتين اعلاه في حساب التكاملات الثنائية حيث أعطتا دقة عالية في النتائج بفترات جزئية قليلة نسبياً وبوقت اقل مما احتاجه الباحثون اعلاه الذين تعاملوا مع الموضوع نفسه

Abstract

The main aim of this search is to find the values of the double integrals numerically, Its integrals either continuous or continuous but its partial derivatives are singular or the integrals are singular in one point or more of region of the integrals and to find the general form of the errors (correction terms) to any case of the behavior of integrands with different style that another researchers used it Mohammed [14] , Alttai [10] and Dayaa [12] .

And by using the correction terms that we found it , we applied it to find the values of double integrals for each case of cases of integrands ,we yields that the two methods RSS, RMS with Romberg acceleration canbe able on it to find the values of double integrals numerically with high accuercy little subintervals and smaller times that the above researchers needed to it.

1- المقدمة

ان للتكاملات الثنائية أهمية في إيجاد مساحة السطوح وإيجاد المراكز المتوسطة وعزوم القصور الذاتية للسطوح المستوية وإيجاد الحجم الواقع تحت سطح التكامل الثنائي , وكمثال على ذلك الحجم الناتج من دوران منحني القلب $\rho=2\left(1-\cos\theta\right)$ حول المحور القطبي, فضلا عن أهميته في إيجاد مساحة سطح منحن كإيجاد مساحة قطعة السطح $x^2+y^2+z^2=4$ الواقعة مباشرة فوق منحني القلب $\rho=\left(1-\cos\theta\right)$ أو حساب مساحة قطعة الكرة $x^2+y^2+z^2=36$ الواقعة داخل الاسطوانة $y^2+z^2=6y$. فرانك آيرز[13], وقد عمل الكثير من الباحثين في مجال التكاملات الثنائية ومن الباحثين الذين سلطوا الضوء على حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة بالصيغة $f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)f_2\left(y\right)$ هما هانس جار وجاكوبسن [3] عام 1973 ومنهم من اشتغل بالتكاملات ذات المكاملات المعتلة لكنهم كانوا يهملون الاعتلال , دافييز ورابينوتز [6] عام 1975.

وفي عام 1984 عالج محمد [14] التكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المعتلة في المشتقة أو المعتلة وكان دأبه التخلص من الاعتلال على البعد الداخلي من التكامل (سواء كانت المكاملات ذات اعتلال جذري أم لوغارتمي أم كليهما) وذلك باستخدام طرائق

مركبة واحدها رومبرك (كاوس) التي استخدم فيها طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الخارجي y وقاعدة كاوس على البعد الداخلي x وأيضا منها كاوس (رومبرك) التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعد الخارجي y و طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعد الداخلي x ومنها أيضا كاوس (كاوس) التي استخدم فيها قاعدة كاوس على البعدين الخارجي y والداخلي x وكذلك طريقة مركبة اسماها رومبرك (رومبرك) التي استخدم فيها تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى على البعدين الخارجي y والداخلي x وقد اثبت من خلال المقارنة بين الطرائق المركبة أعلاه وعلى أمثلة متعددة بان الطريقة المركبة من كاوس (كاوس) هي الأفضل من بقية الطرائق بالنسبة للتكاملات التي مكاملاتها مستمرة على البعدين واثبت بنفس الوقت إن الطريقة المركبة من رومبرك (كاوس) هي الأفضل في حساب التكاملات التي مكاملاتها معتلة المشتقة أو معتلة والتي يمكن إلغاء اعتلالها على البعد الداخلي x من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

كما قدم محمد [4] بحثا في عام 2002 بيَن فيه طريقة مركبة من قاعدة النقطة الوسطى مع طريقة تعجيل رومبرك وعلى البعدين الداخلي x والخارجي y لحساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها وعلى البعدين x و y من دون إهمال الاعتلال على البعدين x و y واسماها طريقة رومبرك (رومبرك) حيث إن $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$ (حدود التصحيح للبعد الداخلي x) تعتمد على سلوك المكامل وقد أعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب وعدد الفترات الجزئية المستخدمة .

أما الطائي [9] فقد استخدمت في عام 2005 قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي y وقاعدة سمبسون على البعد الداخلي x مع إهمال الاعتلال على البعد الداخلي x وأعطت نتائج جيدة من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات وبعدد قليل من فترات الجزئية .

أما في عام 2009 فقد قدم كل من محمد وآخرون [5] بحثا في إيجاد القيم العددية للتكاملات الثنائية ذات المكاملات المعتلة وتناولوا فيه ثلاث طرائق وهي :

طريقة $RS\,(RS)$ $RM\,(RS)$, $RT\,(RS)$, إذ إن هذه الطرائق استخدمت قاعدة سمبسون على البعد الداخلي x وكل من قاعدة سمبسون وقاعدة النقطة الوسطى وقاعدة شبه المنحرف على البعد الخارجي y وباستخدام تعجيل رومبرك على كلا البعدين x و y مع عدم إهمال الاعتلال في كلا البعدين. وقد اثبتوا ان طريقة $RM\,(RS)$ هي الأفضل من حيث الدقة وسرعة الاقتراب الى القيم الحقيقية للتكاملات و عدد الفترات الجزئية المستخدمة .

أما ضياء[12] فقد استخدمت في عام 2009 أربع طرائق عددية مركبة من طريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة النقطة الوسطى وطريقة تعجيل رومبرك مع قاعدة سمبسون لتعطي طرائق لحساب قيم التكاملات الثنائية سوأ كانت مكاملاتها مستمرة أو مستمرة ولكن مشتقاتها معتلة أو معتلة وممكن إلغاء الاعتلال فيها أو التي من غير الممكن إلغاء الاعتلال فيها وهذه الطرائق هي $RM\left(RS\right)$, $RM\left(RM\right)$, $RS\left(RM\right)$ و $RS\left(RS\right)$ وقد أعطت نتائج جيدة وبالاضافة الى انها توصلت الى ان $RM\left(RS\right)$ هي أفضل للتكاملات ذات المكاملات المستمرة أو المستمرة لكن معتلة المشتقة مع إلغاء الاعتلال بالنسبة للتكاملات التي مشتقات مكاملاتها معتلة اوالتكاملات ذات المكاملات المعتلة التي يمكن إلغاء الاعتلال فيها. أما في حالة التكاملات ذات المكاملات المعتلة التي لا يمكن إلغاء الاعتلال فيها , فوجدت إن أفضل الطرائق هي طريقة $RM\left(RM\right)$.

وقد ناقشت الحالات الآتية عند استخراج صيغ الخطأ $\bar{E}\left(\bar{h}\right)$:-

1 - إلغاء الاعتلال على البعد الداخلي باستخدام قاعدة النقطة الوسطى مع تعجيل رومبرك على البعد الخارجي , محمد[14].

2- فرض $y=a$ مع عدم إلغاء الاعتلال حيث a هي نقطة الاعتلال محمد وآخرون.[5]

3 - فرض y ثابت مع الأخذ بنظر الاعتبار الاعتلال بالرغم من إمكانية إلغائه على الداخل, محمد [4]

اما في بحثنا تناولنا طريقتين عدديتين لحساب قيم التكاملات الثنائية وذلك بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق القاعدتين :-

1 - قاعدة سمبسون على البعدين الداخلي x والخارجي y.

2- قاعدة مركبة من القاعدتين(النقطة الوسطى على البعد y و سمبسون على البعد x).

عندما تكون عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الداخلي مساوية لعدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها فترة التكامل الخارجي و $h=\bar{h}$ وأسمينا القاعدتين بـ SSو MS على الترتيب واشتققنا الصيغة العامة لحدود التصحيح لكلا الطريقتين المركبتين لكل حالة من حالات المكامل (مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل أو مستمرولكن معتل المشتقات في نقطة واحدة او اكثر من منطقة التكامل أو معتل في نقطة او اكثر من منطقة التكامل).

2- اشتقاق قواعد حساب التكاملات الثنائية وصيغ الخطا باستخدام قاعدتي النقطة الوسطى وسمبسون.

نستعرض الآن طريقتان عدديتان لحساب التكاملات الثنائية بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك على القيم الناتجة من تطبيق القاعدتين الاولى قاعدة سمبسون على البعدين (الداخلي x والخارجي y) والثانية القاعدة المركبة من قاعدة النقطة الوسطى على البعد y وقاعدة سمبسون على البعد x

عندما $2n$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[a,b]$) مساوية إلى $2m$ (عدد الفترات الجزئية التي تجزأ إليها الفترة $[c,d]$) و $\left(h=\overline{h}\right)$

وسنرمزللطريقتين اعلاه بالرمزين $RMS\ ,RSS$ حيث ان R هي طريقة تعجيل رومبرك أما $MS\ ,SS$ فهما القاعدتين المذكورتين اعلاه و الصيغة العامة للقاعدتين هي:

$$SS=\frac{h^2}{9}\Bigg[\ f(a,c)+f(a,d)+f(b,c)+f(b,d)+4\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{2i-1},c)+f(x_{2i-1},d)\right)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_{2i},c)+f(x_{2i},d)\right)+4\sum_{j=1}^{n}\left(f(a,y_{2j-1})+f(b,y_{2j-1})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_{2j-1})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j-1})\right)$$
$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(f(a,y_{2j})+f(b,y_{2j})+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{2i-1},y_{2j})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_{2j})\right)\Bigg]$$

ريتشاردبوردين و دوكلاس فاريز [10]

حيث ان :-

$$i=1,2,...,n\ ,\ \ x_{2i-1}=a+(2i-1)h,\qquad i=1,2,\ldots,n-1\ ,\qquad x_{2i}=a+2ih$$
$$j=1,2,\ldots,m\ ,\ \ y_{2i-1}=c+(2j-1)h,\qquad j=1,2,\ldots,m-1,\qquad y_{2i}=c+2jh$$

.

$$MS=\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{2n}\left[f(a,y_j)+f(b,y_j)+4\sum_{i=1}^{n}f(x_{(2i-1)},y_j)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_{2i},y_j)\right]$$

حيث ان :- $j=1,2,...,m,\ y_j=c+\frac{(2j-1)}{2}h\quad ,i=1,2,...n,\ x_{2i-1}=a+(2i-1)h\quad i=1,2,...n-1,\ x_{2i}=a+2ih$

فعندما نبدأ بوضع $n=m=2$ في احدى الصيغتين أعلاه فإننا نحسب القيمة التقريبية للتكامل الثنائي على سبيل المثال بقاعدة MS فإنها تساوي

$\frac{h^2}{3}\left(\ f\left(x_0,y_1\right)+f\left(x_0,y_2\right)+f\left(x_2,y_1\right)+f\left(x_2,y_2\right)+4\left(f\left(x_1,y_1\right)+f\left(x_1,y_2\right)\right)\right)$ ونثبت في جداولنا هذه القيمة التقريبية عندما $m=n=2$ ثم نضع $m=n=4$ و نحسب MS حيث إن

$$MS=\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{4}\left(f\left(x_0,y_j\right)+f\left(x_4,y_j\right)+2f\left(x_2,y_j\right)+4\sum_{i=1}^{2}f\left(x_{2i-1},y_j\right)\right)$$

حيث ان :- $j=1,2,\ldots,4,\ \ y_j=c+\frac{(2j-1)}{2}h\qquad i=1,2\ \ ,x_{2i-1}=a+(2i-1)h$

وأيضا نثبت هذه القيمة في جداولنا على إنها القيمة التقريبية للتكامل الثنائي . ويمكن الحصول على قيمة افضل باستخدام القيمتين التقريبيتين اللتين حصلنا عليهما بتطبيق طريقة تعجيل رومبرك عليهما بعد معرفة صيغة الخطأ وبذلك نحصل على قيمة للتكامل الثنائي بطريقة رومبرك مع قاعدة MS وهكذا نستمر بتطبيق القاعدة بالنسبة لبقية قيم $m=n$, ثم نطبق عليها تعجيل رومبرك لتعجيل اقتراب القيم إلى القيمة الحقيقية للتكامل إلى أن نحصل على القيمة بالدقة المرغوبة التي نختارها . ولحساب قيمة التكامل الثنائي بقاعدة SS نتبع نفس الاسلوب المذكور اعلاه.

إن صيغة الخطأ تعتمد على سلوك الدالة $f\left(x,y\right)$ في المنطقة $[a,b]\times[c,d]$ فيما إذا كانت مستمرة أو معتلة المشتقات الجزئية في نقطة اواكثر من منطقة التكامل أو معتلة في نقطة او اكثر منطقة التكامل.

أولاً : التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة Double Integrals With Continuous Integrands

نفرض إن التكامل I معرف كـالآتي:-

$$I=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy$$

حيث إن $f\left(x,y\right)$ مكامل مستمر في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $\left[a,b\right]\times\left[c,d\right]$
بشكل عام يمكن كتابة التكامل I بالصورة الآتية :

$$I=\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=GG\left(h\right)+E\left(h\right) \qquad ...(1)$$

حيث إن $GG\left(h\right)$ تمثل قيمة التكامل عددياً باستخدام احدى الصيغتين MS,SS وان $E\left(h\right)$ هي سلسلة حدود التصحيح correction terms الممكن إضافتها إلى قيم $GG\left(h\right)$, وان $h=\dfrac{(b-a)}{n}=\dfrac{(d-c)}{m}$
اذ ان صيغة الخطا للتكاملات الاحادية ذات المكاملات المستمرة باستخدام قاعدة سمبسون هي

$$E_S(h)=-\frac{1}{180}h^4(f_{2n}^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{1}{1512}h^6(f_{2n}^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots \qquad ...(2)$$

وباستخدام قاعدة النقطة الوسطى تكون

$$E_M(h)=\frac{1}{6}h^2(f'_{2n}-f'_0)-\frac{7}{360}h^4(f_{2n}^{(3)}-f_0^{(3)})+\frac{31}{15120}h^6(f_{2n}^{(5)}-f_0^{(5)})-\cdots \qquad ...(3)$$

فوكس [1]
وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة في التفاضل Mean-value theorem for derivatives للصيغتين (3)و(2) نحصل على

$$E_S(h)=\frac{-\left(x_{2n}-x_0\right)}{180}h^4f^{(4)}\left(\mu_1\right)+\frac{\left(x_{2n}-x_0\right)}{1512}h^6f^{(6)}\left(\mu_2\right)+... \qquad ... (4)$$

$$E_M(h)=\frac{\left(x_{2n}-x_0\right)}{6}h^2f^{(2)}\left(\eta_1\right)-\frac{7\left(x_{2n}-x_0\right)}{360}h^4f^{(4)}\left(\eta_2\right)+\frac{31\left(x_{2n}-x_0\right)}{15120}h^6f^{(6)}\left(\eta_3\right)+... \qquad ...(5)$$

حيث $\mu_i,\eta_i\in\left(x_0,x_{2n}\right)$, $i=1,2,3,...$.عكار[11] . معلوم لدينا انه

$$\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=\int_a^b\int_c^d f\left(x,y\right)dydx$$

فبالنسبة للتكامل الأحادي $\int_c^d f\left(x,y\right)dy$ يمكن حسابه عددياً بقاعدة سمبسون على البعد y و (التعامل مع x كثابت) وقيمته :-

$$\int_c^d f(x,y)dyd=\frac{h^2}{3}\left(f(x,c)+f(x,d)+4\sum_{i=1}^{n}f(x,y_{(2i-1)})+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x,y_{(2i)})\right)$$

$$-\frac{(d-c)h^4}{180}\frac{\partial^4 f(x,\mu_1)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f(x,\mu_2)}{\partial y^6}+... \qquad \cdots(6)$$

$$\ldots,\mu_2,\mu_1\in(c,d) \qquad j=1,2,...,n\text{-}1\ ,\ y_{2j}=c+2jh \qquad j=1,2,...,n\ ,\ y_{2j\text{-}1}=c+(2j-1)h$$

وبمكاملة الصيغة (6) عدديا على الفترة $\left[a,b\right]$ باستخدام قاعدة سمبسون أيضا على البعد x نحصل على :

$$\int_c^d\int_a^b f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[\ f\left(a,c\right)+f\left(a,d\right)+f\left(b,c\right)+f\left(b,d\right)$$

$$+4\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(a+(2i-1)h,c\right)+f\left(a+(2i-1)h,d\right)\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f\left(a+(2i)h,c\right)+f\left(x_0+(2i)h,d\right)\right)$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}\Big(f\left(a,c+(2j-1)h\right)+f\left(b,c+(2i-1)h\right)+4\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(2i-1)h,c+(2j-1)h\right)$$

$$+2\sum_{i=1}^{n-1}(f\ (a+(2i)h,c+(2j)h))\Big)+2\sum_{j=1}^{n-1}\Big(\ f\ (a,c+(2i)h)+f\ (b,c+(2i)h)$$

$$+4\sum_{i=1}^{n}f\ (a+(2i-1)h,c+(2j)h)+2\sum_{i=1}^{n-1}f\ (a+(2i)h,c+(2j)h))\Big)\Big]$$

$$+\frac{h}{3}\Big[\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\ (\xi_1,y_0)}{\partial y^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^4 f\ (\xi_2,y_0)}{\partial y^6}+\cdots$$

$$+4\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\ (\xi_1,y_{2j-1})}{\partial y^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^4 f\ (\xi_2,y_{2j-1})}{\partial y^6}+\ldots\right)$$

$$+2\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{-(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\ (\xi_1,y_{2j})}{\partial y^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^4 f\ (\xi_2,y_{2j})}{\partial y^6}+\cdots\right)$$

$$-\frac{(b-a)}{180}h^4\frac{\partial^4 f\ (\xi_1,y_{2n})}{\partial y^4}+\frac{(b-a)}{1512}h^6\frac{\partial^4 f\ (\xi_2,y_{2n})}{\partial y^6}+\ldots\Big]$$

$$+\int_a^b\left[-\frac{(d-c)h^4}{180}\frac{\partial^4 f\ (x,\mu_1)}{\partial y^4}+\frac{(d-c)h^6}{1512}\frac{\partial^6 f\ (x,\mu_2)}{\partial y^6}+\cdots\right]dx \qquad \ldots(7)$$

$k=1,2,...,\ \ \xi_{kj}\in(a,b),\qquad i=1,2,...n,\ x_{2i-1}=a+(2i-1)h,\qquad i=1,2,...n-1,\ x_{2i}=a+2ih$

$j=1,2,...m\ ,\ y_{2j-1}=c+(2j-1)h\qquad j=1,2,...m-1\ ,\ y_{2j}=c+2jh$

وبما إن $\ldots,\frac{\partial^4 f}{\partial x^4},\frac{\partial^6 f}{\partial x^6}$ و $\ldots,\frac{\partial^4 f}{\partial y^4},\frac{\partial^6 f}{\partial y^6}$ مستمرة في كل نقطة من نقاط المنطقة $[a,b]\times[c,d]$.

فان صيغة حدود التصحيح للتكامل الثنائي I بقاعدة سمبسون على البعدين xو y تصبح :-

$$E_{ss}(h)=(d-c)(b-a)\frac{h^2}{180}\left(\frac{\partial^4 f\ (\overline{n}_1,\overline{\mu}_1)}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 f\ (\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)}{\partial y^4}\right)+\ (d-c)(b-a)\frac{h^6}{1512}\left(\frac{\partial^6 f\ (\overline{n}_2,\overline{\mu}_2)}{\partial x^6}+\frac{\partial^6 f\ (\hat{n}_2,\hat{\mu}_2)}{\partial y^6}\right)+\cdots \qquad \cdots(8)$$

$$\ldots,(\overline{n}_2,\overline{\mu}_2),(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1)\in[a,b]\times[c,d]\ \ ,\ \ \ldots,(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2),(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)\in[a,b]\times[c,d]$$

وبطريقة مماثلة يمكن ايجاد صيغة الخطا لقاعدة MS في حالة كون المكامل دالة مستمرة في كل منطقة التكامل حيث تكون:-

$$E_{MS}(h)=(d-c)(b-a)\frac{h^2}{6}\frac{\partial^2 f\ (\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)}{\partial y^2}\ -\ (d-c)(b-a)\frac{h^4}{180}\left(\frac{\partial^4 f\ (\overline{n}_1,\overline{\mu}_1)}{\partial x^4}+\ \frac{7}{2}\frac{\partial^4 f\ (\hat{n}_2,\hat{\mu}_2)}{\partial y^4}\right)$$

$$+\ \frac{(d-c)(b-a)h^6}{1512}\left(\frac{\partial^6 f\ (\overline{n}_2,\overline{\mu}_2)}{\partial x^6}+\frac{31}{10}\frac{\partial^6 f\ (\hat{n}_3,\hat{\mu}_3)}{\partial y^6}\right)+\ldots \qquad \ldots(9)$$

$$\ldots,(\overline{n}_2,\overline{\mu}_2),(\overline{n}_1,\overline{\mu}_1)\in[a,b]\times[c,d]\ \ ,\ \ \ldots,(\hat{n}_2,\hat{\mu}_2),(\hat{n}_1,\hat{\mu}_1)\in[a,b]\times[c,d].$$

لذا إذا كان المكامل دالة مستمرة ومشتقاتها الجزئية موجودة Exist في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[a,b]\times[c,d]$ فانه يمكن كتابة صيغة الخطأ للقاعدتين المذكورتين كالآتي :

$$I - SS(h) = A_{SS}h^4 + B_{SS}h^6 + C_{SS}h^8 + \ldots \qquad \ldots(10)$$
$$I - MS(h) = A_{MS}h^2 + B_{MS}h^4 + C_{MS}h^6 + \ldots \qquad \ldots(11)$$

حيث $A_{SS}, B_{SS}, \ldots$ $A_{MS}, B_{MS}, \ldots$ ثوابت .

ثانياً : التكاملات الثنائية لمكاملات مستمرة – معتلة المشتقات الجزئية

Double Integrals For Continuous Integrands With Singularity in Partial Derivatives

لنفرض التكامل الثنائي I المعرف بالصيغة :

$$I = \int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = GG(h) + E(h)$$

حيث $f(x,y)$ دالة معرفة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل $[x_0,x_{2n}]\times[y_0,y_{2n}]$ وليس لها اعتلال ولكن مشتقاتها الجزئية غير معرفة Undefined في نقطة واحدة او اكثر من منطقة التكامل

الحالة الأولى :

لنفرض إن المشتقات الجزئية لدالة التكامل غير معرفة عند النقطة (x_0,y_0) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين Taylor's series for a function of two variables[7] موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_0,y_0) . نلأحظ انه بالأمكان كتابة التكامل الثنائي I بالشكل الآتي:-

$$I = \int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = \int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy + \int_{y_0}^{y_2}\sum_{k=1}^{n-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)dxdy + \sum_{l=1}^{n-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy + \int_{y_2}^{y_{2n}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy \quad \cdots(12)$$

بالنسبة للتكامل الأول في المنطقة الجزئية $[x_0,x_2]\times[y_0,y_2]$ نستعمل متسلسلة تايلر إلى $f(x,y)$ حول النقطة (x_2,y_2) فنحصل على :-

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_2,y_2) + (x-x_2)f_x(x_2,y_2) + (y-y_2)f_y(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)^2}{2!}f_{xx}(x_2,y_2) + \frac{(y-y_2)^2}{2!}f_{yy}(x_2,y_2) \\
&+ (x-x_2)(y-y_2)f_{xy}(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)^3}{3!}f_x^{(3)}(x_2,y_2) + \frac{(y-y_2)^3}{3!}f_y^{(3)}(x_2,y_2) \\
&+ \frac{(x-x_2)^2(y-y_2)}{2!}f_x^{(2)}(x_2,y_2)f_y(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)(y-y_2)^2}{2!}f_x(x_2,y_2)f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)^4}{4!}f_x^{(4)}(x_2,y_2) \\
&+ \frac{(y-y_2)^4}{4!}f_y^{(4)}(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)^2(y-y_2)^2}{4}f_x^{(2)}(x_2,y_2)f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)^3(y-y_2)}{3!}f_x^{(3)}(x_2,y_2)f_y(x_2,y_2) \\
&+ \frac{(x-x_2)(y-y_2)^3}{3!}f_x(x_2,y_2)f_y^{(3)}(x_2,y_2) + \frac{(x-x_2)^5}{5!}f_x^{(5)}(x_2,y_2) + \frac{(y-y_2)^5}{5!}f_y^{(5)}(x_2,y_2) + \ldots \qquad \ldots(13)
\end{aligned}$$

وعلى فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f(x,y)$ موجودة عند النقطة (x_2,y_2) بأخذ التكامل الثنائي للصيغ اعلاه في المنطقة $[x_0,x_2]\times[y_0,y_2]$ نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = 4h^2 f(x_2,y_2) - 4h^3 f_y(x_2,y_2) - 4h^3 f_x(x_2,y_2) + \frac{16}{3!}h^4 f_{xx}(x_2,y_2) + \frac{16}{3!}h^4 f_{yy}(x_2,y_2)$$
$$+4h^4 f_{xy}(x_2,y_2) - \frac{32}{4!}h^5 f_x^{(3)}(x_2,y_2) - \frac{32}{4!}h^5 f_y^{(3)}(x_2,y_2) - \frac{32}{12}h^5 f_x^{(3)}(x_2,y_2) f(x_2,y_2)$$
$$-\frac{32}{12}h^5 f_x(x_2,y_2) f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{64}{5!}h^6 f_x^{(4)}(x_2,y_2) + \frac{64}{5!}h^6 f_y^{(4)}(x_2,y_2) + \frac{64}{36}h^6 f_x^{(2)}(x_2,y_2) f_y^{(2)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{64}{48}h^6 f_x^{(3)}(x_2,y_2) f_y(x_2,y_2) + \frac{64}{48}h^6 f_x(x_2,y_2) f_y^{(3)}(x_2,y_2) - \frac{128}{6!}h^7 f_x^{(5)}(x_2,y_2) - \frac{128}{6!}h^7 f_y^{(5)}(x_2,y_2) + \dots \qquad ..(14)$$

وبالتعويض عن xبـ x_0 وعن y بـ y_0 في الصيغة (13) نحصل على :

$$f(x_0,y_0) = f(x_2,y_2) - 2hf_x(x_2,y_2) - 2hf_y(x_2,y_2) + 2h^2 f_{xx}(x_2,y_2)$$
$$+2h^2 f_{yy}(x_2,y_2) + 4h^2 f_{xy}(x_2,y_2) - \frac{8}{3!}h^3 f_x^{(3)}(x_2,y_2) - \frac{8}{3!}h^3 f_y^{(3)}(x_2,y_2)$$
$$-4h^3 f_x^{(2)}(x_2,y_2) f_y(x_2,y_2) - 4h^3 f_x(x_2,y_2) f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{16}{4!}h^4 f_x^{(4)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{16}{4}h^4 f_y^{(4)}(x_2,y_2) + 4h^4 f_x^{(2)}(x_2,y_2) f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{16}{3!}h^4 f_x^{(3)}(x_2,y_2) f_y(x_2,y_2)$$
$$+\frac{16}{3!}h^4 f_x(x_2,y_2) f_y^{(3)}(x_2,y_2) - \frac{32}{5!}h^5 f_x^{(5)}(x_2,y_2) - \frac{32}{5!}h^5 f_y^{(5)}(x_2,y_2)\dots \qquad ...(15)$$

وبالتعويض عن xبـ x_0+h وعن y بـ y_0 في الصيغة (13) نحصل على :

$$f(x_0+h,y_0) = f(x_2,y_2) - hf_x(x_2,y_2) - 2hf_y(x_2,y_2) + \frac{1}{2!}h^2 f_{xx}(x_2,y_2) + 2h^2 f_{yy}(x_2,y_2) + 2h^2 f_{xy}(x_2,y_2)$$
$$-\frac{1}{3!}h^3 f_x^{(3)}(x_2,y_2) - \frac{8}{3!}h^3 f_y^{(3)}(x_2,y_2) - h^3 f_x^{(2)}(x_2,y_2) f_y(x_2,y_2) - 2h^3 f_x(x_2,y_2) f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{1}{4!}h^4 f_x^{(4)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^4 f_y^{(4)}(x_2,y_2) + h^4 f_x^{(2)}(x_2,y_2) f_y^{(2)}(x_2,y_2) + \frac{2}{3!}h^4 f_x^{(3)}(x_2,y_2) f_y(x_2,y_2) + \frac{8}{3!}h^4 f_x(x_2,y_2) f_y^{(3)}(x_2,y_2)$$
$$-\frac{1}{5!}h^5 f_x^{(5)}(x_2,y_2) - \frac{32}{5!}h^5 f_y^{(5)}(x_2,y_2)\dots \qquad ...(16)$$

و كذلك بتعويض عن x_0بـ x_2 وعن y بـ y_0 في الصيغة (13) نحصل على :-

$$f(x_2,y_0) = f(x_2,y_2) - 2hf_y(x_2,y_2) + 2h^2 f_{yy}(x_2,y_2) - \frac{8}{3!}h^3 f_y^{(3)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^4 f_y^{(4)}(x_2,y_2) - \frac{32}{5!}h^5 f_y^{(5)}(x_2,y_2) + \cdots \qquad ...(17)$$

وايضا بتعويض عن xبـ x_0 وعن y بـ y_0+h في الصيغة (13) نحصل على :-

$$f(x_0,y_0+h)=f(x_2,y_2)-2hf_x(x_2,y_2)-hf_y(x_2,y_2)+2h^2f_{xx}(x_2,y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_2,y_2)+2h^2f_{xy}(x_2,y_2)$$
$$-\frac{8}{3!}h^3f_x^{(3)}(x_2,y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_y^{(3)}(x_2,y_2)-2h^3f_x^{(2)}(x_2,y_2)f_y(x_2,y_2)-h^3f_x(x_2,y_2)f_y^{(2)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^4f_x^{(4)}(x_2,y_2)+\frac{1}{4!}h^4f_y^{(4)}(x_2,y_2)+h^4f_x^{(2)}(x_2,y_2)f_y^{(2)}(x_2,y_2)+\frac{8}{3!}h^4f_x^{(3)}(x_2,y_2)f_y(x_2,y_2)$$
$$+\frac{2}{3!}h^4f_x(x_2,y_2)f_y^{(3)}(x_2,y_2)-\frac{32}{5!}h^5f_x^{(5)}(x_2,y_2)-\frac{1}{5!}h^5f_y^{(5)}(x_2,y_2)\ldots \qquad \ldots(18)$$

وبالمثل نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_0+h في الصيغة (13) نحصل على :-

$$f(x_0+h,y_0+h)=f(x_2,y_2)-hf_x(x_2,y_2)-hf_y(x_2,y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}(x_2,y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_2,y_2)+$$
$$+\frac{1}{2}h^2f_{xy}(x_2,y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_x^{(3)}(x_2,y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_y^{(3)}(x_2,y_2)-\frac{1}{2!}h^3f_x^{(2)}(x_2,y_2)f_y(x_2,y_2)$$
$$-\frac{1}{2!}h^3f_x(x_2,y_2)f_y^{(2)}(x_2,y_2)+\frac{1}{4!}h^4f_x^{(4)}(x_2,y_2)+\frac{1}{4!}h^4f_y^{(4)}(x_2,y_2)+\frac{1}{4}h^4f_x^{(2)}(x_2,y_2)f_y^{(2)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{1}{3!}h^4f_x^{(3)}(x_2,y_2)f_y(x_2,y_2)+\frac{1}{3!}h^4f_x(x_2,y_2)f_y^{(3)}(x_2,y_2)-\frac{1}{5!}h^5f_x^{(5)}(x_2,y_2)-\frac{1}{5!}h^5f_y^{(5)}(x_2,y_2)\ldots \qquad \ldots(19)$$

ونعوض عن x بـ x_2 وعن y بـ y_0+h في صيغة (13) نحصل على :

$$f(x_2,y_0+h)=f(x_2,y_2)-hf_y(x_2,y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{yy}(x_2,y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_y^{(3)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{1}{4}h^4f_y^{(4)}(x_2,y_2)-\frac{1}{5!}h^5f_y^{(5)}(x_2,y_2)+\ldots \qquad \ldots(20)$$

وايضا نعوض عن x بـ x_0 وعن y بـ y_2 في الصيغة (13) نحصل على

$$f(x_0,y_2)=f(x_2,y_2)-2hf_x(x_2,y_2)+2h^2f_{xx}(x_2,y_2)-\frac{8}{3!}h^3f_x^{(3)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{16}{4!}h^4f_x^{(4)}(x_2,y_2)-\frac{32}{5!}h^5f_x^{(5)}(x_2,y_2)\ldots \qquad \ldots(21)$$

واخيرا نعوض عن x بـ x_0+h وعن y بـ y_2 في الصيغة (13) نحصل على

$$f(x_0+h,y_2)=f(x_2,y_2)-hf_x(x_2,y_2)+\frac{1}{2!}h^2f_{xx}(x_2,y_2)-\frac{1}{3!}h^3f_x^{(3)}(x_2,y_2)$$
$$+\frac{1}{4!}h^4f_x^{(4)}(x_2,y_2)-\frac{1}{5!}h^5f_x^{(5)}(x_2,y_2)\ldots \qquad \ldots(22)$$

من الصيغ (14),(15) (16),(17),(18),(19),(20),(21),(22) نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_2}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{9}[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_2)+f(x_2,y_0)+f(x_2,y_2)+4(f(x_0,y_0+h)+$$
$$f(x_0+h,y_0)+4f(x_0+h,y_0+h)+f(x_0+h,y_2)+f(x_2,y_0+h))]+\Big[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})$$
$$-\frac{1}{1890}h^8\left(2D_x^{(6)}+2D_y^{(6)}-21D_x^{(4)}D_y^{(2)}-21D_x^{(2)}D_y^{(4)}-42D_x^{(5)}D_y+42D_x D_y^{(4)}\right)$$
$$+\frac{1}{1890}h^9(-2D_x^{(7)}-2D_y^{(7)}+\ldots)+\ldots\Big]f(x_1,y_1) \qquad \ldots(23)$$

اما بالنسبة للتكاملات الثاني والثالث والرابع فنلاحظ إن دالة التكامل مستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة تكاملاتها لذا فان:-

$$\int_{y_0}^{y_2}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{9}\sum_{k=1}^{n-1}\Big[f(x_{2k},y_0)+f(x_{2k},y_2)+f(x_{2k+2},y_0)+f(x_{2k+2},y_2)$$
$$+4\Big[f(x_{2k},y_0+h)+f(x_{2k}+h,y_0)+4f(x_{2k}+h,y_0+h)+f(x_{2k}+h,y_2)$$
$$+f(x_{2k+2},y_0+h)\Big)\ \Big]+A_1h^2+B_1h^4+\ldots \qquad \ldots(24)$$

$$\sum_{l=1}^{n-1}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_0}^{x_2} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{9}\sum_{l=1}^{n-1}\Big[f(x_0,y_{2l})+f(x_0,y_{2l+2})+f(x_2,y_{2l})+f(x_2,y_{2l+2})+4\big(f(x_0,y_{2l}+h)$$
$$+f(x_0+h,y_{2l})+4f(x_0+h,y_{2l}+h)+f(x_0+h,y_{2l+2})+f(x_2,y_{2l}+h)\big)\Big]+A_2h^4+B_2h^6+\ldots \qquad \ldots(25)$$

$$\int_{y_2}^{y_{2n}}\int_{x_2}^{x_{2n}} f(x,y)dxd = \frac{h^2}{9}\Big[\ f(x_2,y_2)+f(x_2,y_{2n})+f(x_{2n},y_2)+f(x_{2n},y_{2n})+$$
$$+4\sum_{i=2}^{n}\big(f(x_2+(2i-1)h,y_2)+f(x_2+(2i-1)h,y_{2n})\big)+2\sum_{i=2}^{n-1}\big(f(x_2+(2i)h,y_2)+f(x_2+(2i)h,y_{2n})\big)$$
$$+4\sum_{j=2}^{n}\Big(\ f(x_2,y_2+(2j-1)h)+f(x_{2n},y_2+(2i-1)h)+4\sum_{i=2}^{n}f(x_2+(2i-1)h,y_2+(2j-1)h)$$
$$+2\sum_{i=2}^{n-1}f(x_2+(2i)h,y_2+(2j-1)h)\ \Big)+2\sum_{j=2}^{n-1}\Big(\ f(x_2,y_2+(2i)h)+f(x_{2n},y_2+(2i)h)$$
$$+4\sum_{i=2}^{n}f(x_2+(2i-1)h,y_2+(2j)h)+2\sum_{i=2}^{n-1}f(x_2+(2i)h,y_2+(2j)h))\ \Big)\Big]+A_3h^4+B_3h^6+\cdots \qquad \ldots(26)$$

وبجمع الصيغ (23),(24),(25),(26) نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{9}[f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2n})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2n})+$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_0+(2i-1)h,y_0)+f(x_0+(2i-1)h,y_{2n})\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_0+(2i)h,y_0)+f(x_0+(2i)h,y_{2n})\right)$$
$$+4\sum_{j=1}^{n}\Bigg(f(x_0,y_0+(2j-1)h)+f(x_{2n},y_0+(2i-1)h)+4\sum_{i=1}^{n} f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}(f(x_0+(2i)h,y_0+(2j-1)h))\Bigg)+2\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(f(x_0,y_0+(2i)h)+f(x_{2n},y_0+(2i)h)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n} f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_0+(2i)h,y_0+(2j)h)\Bigg)\Bigg]+\Bigg[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})$$
$$-\frac{1}{1890}h^8(2D_x^{(6)}+2D_y^{(6)}-21D_x^{(4)}D_y^{(2)}-21D_x^{(2)}D_y^{(4)}-42D_x^{(5)}D_y+42D_xD_y^{(5)})$$
$$+\frac{1}{1890}h^9(-2D_x^{(7)}-2D_y^{(7)}+\cdots)+\cdots\Bigg]f(x_1,y_1)+A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+\cdots \quad \cdots(27)$$

حيث $A_{SS}, B_{SS}, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ فقط , وان $D_y^{(n)}=\frac{\partial^n}{\partial y^n}, D_x^{(n)}=\frac{\partial^n}{\partial x^n}$

وبطريقة مماثلة يمكن ايجاد حدود التصحيح لقاعدة MS في حالة الاعتلال في النهاية السفلى (x_0,y_0) اذ ان:-

$$\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = \frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{2n}\Bigg[f(x_0,y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)+f(x_{2n},y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_0+(2i-1)h,y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}\left(f(x_0+(2i)h,y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)\right)\Bigg]+\Bigg[\frac{1}{6}h^4D_{yy}$$
$$+\frac{1}{3}h^6\left(-\frac{1}{15}D_x^{(4)}+\frac{11}{160}D_y^{(4)}+\frac{1}{12}D_x^{(2)}D_y^{(2)}\right)-\frac{1}{3}h^7\left(\frac{-1}{15}D_x^{(5)}-\frac{11}{160}D_y^{(5)}+\cdots\right)+\cdots\Bigg]f(x_1,y_1)+A_{MS}h^2+B_{MS}h^4+\cdots \quad \cdots(28)$$

حيث $A_{MS}, B_{MS}, \ldots$ ثوابت .

الحالة الثانية :-

لنفرض ان المشتقات الجزئية للدالة $f(x,y)$ غير معرفة عند النقطة (x_{2n},y_{2n}) وهذا يعني إن متسلسلة تايلر للدوال ذات المتغيرين موجودة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة (x_{2n},y_{2n})نستطيع أن نكتب :-

$$I=\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy = \int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f(x,y)dxdy + \int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\sum_{k=0}^{n-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)dxdy + \sum_{l=0}^{n-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy$$
$$+\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy \quad \ldots(29)$$

بالنسبة للتكامل الرابع في المنطقة الجزئية $[x_{2n-2},x_{2n}]\times[y_{2n-2},y_{2n}]$ نستعمل متسلسلة تايلر $f(x,y)$ حول النقطة (x_{2n-2},y_{2n-2}) أي إن :-

$$f(x,y)=f(x_{2n-2},y_{2n-2})+(x-x_{2n-2})f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})+(y-y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(x-x_{2n-2})^2}{2!}f_{xx}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{(y-y_{2n-2})^2}{2!}f_{yy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+(x-x_{2n-2})(y-y_{2n-2})f_{xy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(x-x_{2n-2})^3}{3!}f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(y-y_{2n-2})^3}{3!}f_y^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})^2(y-y_{2n-2})}{2!}f_x^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(x-x_{2n-2})(y-y_{2n-2})^2}{2!}f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})^4}{4!}f_x^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(y-y_{2n-2})^4}{4!}f_y^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(x-x_{2n-2})^2+(y-y_{2n-2})^2}{2!\times 2!}f_x^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+$$
$$\frac{(x-x_{2n-2})^3(y-y_{2n-2})}{3!}f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(x-x_{2n-2})(y-y_{2n-2})^3}{3!}f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{(x-x_{2n-2})^5}{5!}f_x^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{(y-y_{2n-2})^5}{5!}f_y^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2}) \qquad ...(30)$$

على فرض إن جميع المشتقات الجزئية لـ $f\,(x,y)$ موجودة عند (x_{2n-2},y_{2n-2}) وبأخذ التكامل الثنائي للصيغة (30)

في المنطقة $[x_{2n-2},x_{2n}]\times[y_{2n-2},y_{2n}]$ نحصل على :-

$$\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=4h^2f(x_{2n-2},y_{2n-2})+4h^3f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})+4h^3f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{16}{3!}h^4f_{xx}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{16}{3!}h^4f_{yy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+4h^4f_{xy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{4!}h^5f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{32}{4!}h^5f_y^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{12}h^5f_x^{\,2}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{12}h^5f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{64}{5!}h^6f_x^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{64}{5!}h^6f_y^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{64}{36}h^6f_x^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{64}{48}h^6f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{64}{48}h^6f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{128}{6!}h^7f_x^{(7)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{128}{6!}h^7f_y^{(7)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\cdots \qquad ....(31)$$

وبالتعويض عن x بـ $x_{2n}-h$ وعن y بـ y_{2n-2} في الصيغة (30) نحصل على :

$$f(x_{2n}-h,y_{2n-2})=f(x_{n-2},y_{n-2})+hf_x(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{1}{2}h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{3!}h^3f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{1}{4!}h^4f_x^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{1}{5!}h^5f_x^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\cdots \qquad \cdots(32)$$

ونعوض عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_{2n-2} في الصيغة (30) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_{2n-2})=f(x_{2n-2},y_{2n-2})+2hf_x(x_{2n-2},y_{2n-2})+2h^2f_{xx}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{8}{3!}h^3f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{16}{4!}h^4f_x^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{5!}h^5f_x^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\cdots \qquad \cdots(33)$$

وبالتعويض عن x بـ x_{2n-2} وعن y بـ $y_{2n}-h$ في الصيغة (30) نحصل على :-

$$f\left(x_{2n-2},y_{2n}-h\right)=f\left(x_{n-2},y_{n-2}\right)+hf_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^{2}f_{yy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+$$
$$\frac{1}{3!}h^{3}f_{y}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{4!}h^{4}f_{y}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{5!}h^{5}f_{y}^{(5)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\cdots \qquad \cdots(34)$$

كذلك نعوض عن x بـ $x_{2n}-h$ وعن y بـ $y_{2n}-h$ في الصيغة (30) نحصل على

$$f\left(x_{2n}-h,y_{2n}-h\right)=f\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+h\,f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+h\,f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^{2}f_{xx}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^{2}f_{yy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+h^{2}f_{xy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{3!}h^{3}f_{x}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{3!}h^{3}f_{y}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^{3}f_{x}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+\frac{1}{2!}h^{3}f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{(2)}(x_{2},y_{2})+\frac{1}{4!}h^{4}f_{x}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{4!}h^{4}f_{y}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+\frac{1}{4}h^{4}f_{x}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{3!}h^{4}f_{x}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+\frac{1}{3!}h^{4}f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{5!}h^{5}f_{x}^{(5)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{5!}h^{5}f_{y}^{(5)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\cdots \qquad ...(35)$$

وبالمثل نعوض عن x بـ x_{2n} وعن y بـ $y_{2n}-h$ في الصيغة (30) نحصل على

$$f\left(x_{2n},y_{2n}-h\right)=f\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+2h\,f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+h\,f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+2h^{2}f_{xx}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^{2}f_{yy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+2h^{2}f_{xy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{8}{3!}h^{3}f_{x}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{3!}h^{3}f_{y}^{(3)}\left(x3_{2n-2},y_{2n-2}\right)+2h^{3}f_{x}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+h^{3}f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{2}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{16}{4!}h^{4}f_{x}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{4!}h^{4}f_{y}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+h^{4}f_{x}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{8}{3!}h^{4}f_{x}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{2}{3!}h^{4}f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+\frac{32}{5!}h^{5}f_{x}^{(5)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{5!}h^{5}f_{y}^{(5)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\cdots \qquad ...(36)$$

كذلك نـعـوض عن x بـ x_{2n-2} وعن y بـ y_{2n} في الصيغة (30) نحصـل علـى :-

$$f\left(x_{2n-2},y_{2n}\right)=f\left(x_{n-2},y_{n-2}\right)+2hf_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+2h^{2}f_{yy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+\frac{8}{3!}h^{3}f_{y}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{16}{4!}h^{4}f_{y}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{32}{5!}h^{5}f_{y}^{(5)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\cdots \qquad ...(37)$$

وبالتعويض ايضا عن x بـ $x_{2n}-h$ وعن y بـ y_{2n} في الصـيغة (30) نحصـل علـى :-

$$f\left(x_{2n}-h,y_{2n}\right)=f\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+hf_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+2hf_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{2!}h^{2}f_{xx}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+2h^{2}f_{yy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+2h^{2}f_{xy}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{3!}h^{3}f_{x}^{(3)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{8}{3!}h^{3}f_{y}^{3}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+h^{3}f_{x}^{2}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$
$$+2h^{3}f_{x}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)f_{y}^{(2)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{1}{4!}h^{4}f_{x}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)+\frac{16}{4!}h^{4}f_{y}^{(4)}\left(x_{2n-2},y_{2n-2}\right)$$

$$+h^4 f_x^{\,2}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{2}{3!}h^4 f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{8}{3!}h^4 f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{1}{5!}h^5 f_x^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{5!}h^5 f_y^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\ldots \qquad \ldots(38)$$

واخيرا نعوض عن x بـ x_{2n} وعن y بـ y_{2n} في الصيغة (38) نحصل على :-

$$f(x_{2n},y_{2n})=f(x_{2n-2},y_{2n-2})+2hf_x(x_{2n-2},y_{2n-2})+2hf_y(x_{2n-2},y_{2n-2})+2h^2 f_{xx}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+2h^2 f_{yy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+4h^2 f_{xy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{8}{3!}h^3 f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{8}{3!}h^3 f_{yyy}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+4h^3 f_x^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_{xyy}(x_{2n-2},y_{2n-2})+4h^{(3)}f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{16}{4!}h^4 f_x^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{16}{4!}h^4 f_y^{(4)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+4h^4 f_x^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(2)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{16}{3!}h^4 f_x^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+\frac{16}{3!}h^4 f_x(x_{2n-2},y_{2n-2})f_y^{(3)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{5!}h^5 f_x^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\frac{32}{5!}h^5 f_y^{(5)}(x_{2n-2},y_{2n-2})+\cdots \qquad \ldots(39)$$

ومن الصيغ (31),(32),(33),(34),(35),(36),(37),(38),(39) نحصل على:-

$$\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[\ f(x_{2n-2},y_{2n-2})+f(x_{2n-2},y_{2n})+f(x_{2n},y_{2n})+f(x_{2n},y_{2n})$$
$$+4(f(x_{2n-2},y_{2n}-h)+f(x_{2n}-h,y_0)+4f(x_{2n}-h,y_{2n}-h))f(x_{2n}-h,y_{2n})$$
$$+f(x_{2n},y_{2n}-h))]\ \Big]+\Big[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})-\frac{1}{1890}h^8(2D_x^{(6)}+2D_y^{(6)}-21D_x^{(4)}D_y^{(2)}-21D_x^{(2)}D_y^{(4)}$$
$$-42D_x^{(5)}D_y+42D_xD_y^{(5)})-\frac{1}{1890}h^9(-2D_x^{(7)}-2D_y^{(7)}+\cdots)+\cdots\Big]f(x_{2n-1},y_{2n-1}) \qquad \ldots(40)$$

أما بالنسبة للتكاملات الثلاثة الأولى التي هي ذات مشتقات جزئية مستمرة بالنسبة للدالة $f(x,y)$ في جميع نقاط منطقة التكامل نلاحظ إن :-

$$\int_{y_{2n-2}}^{y_{2n}}\sum_{k=0}^{n-2}\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}\sum_{r=0}^{2n-2}\Big(\ f(x_{2k},y_{2n-2})+f(x_{2k},y_{2n})+f(x_{2k+2},y_{2n-2})$$
$$+f(x_{2k+2},y_{2n})+4(f(x_{2k},y_{2n}-h)+f(x_{2k}+h,y_{2n-2})+4f(x_{2k}+h,y_{2n}-h)$$
$$+f(x_{2k}+h,y_{2n})+f(x_{2k+2},y_{2n}-h)\ \Big)+A_2h^4+B_2h^6+\ldots \qquad \ldots(41)$$

$$\sum_{l=0}^{n-2}\int_{y_{2l}}^{y_{2l+2}}\int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}\sum_{l=0}^{2n-2}\Big(f(x_{2n-2},y_{2l})+f(x_{2n-2},y_{2l+2})+f(x_{2n},y_{2l})+f(x_{2n},y_{2l+2})$$
$$+4\Big(f(x_{2n-2},y_{2l}+h)+f(x_{2n}-h,y_{2l})+4f(x_{2n-1},y_{2l+1})+f(x_{2n-1},y_{2l+2})+f(x_{2n},y_{2l+1})\Big)$$
$$+A_2h^4+B_2h^6+\cdots \qquad \ldots(42)$$

$$\int_{y_0}^{y_{2n-2}}\int_{x_0}^{x_{2n-2}} f\left(x,y\right)dxd=\frac{h^2}{9}\Big[\ f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2n-2})+f(x_{2n-2},y_0)+f(x_{2n-2},y_{2n-2})$$
$$+4\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_0+(2i-1)h,y_0)+f(x_0+(2i-1)h,y_{2n-2})\big)+2\sum_{i=1}^{n-2}\big(f(x_0+(2i)h,y_0)+f(x_0+(2i)h,y_{2n-2})\big)$$
$$+4\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(f(x_0,y_0+(2j-1)h)+f(x_{2n-2},y_0+(2j-1)h)+4\sum_{i=1}^{n-1}f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-2}f(x_0+(2i)h,y_0+(2j-1)h)\Bigg)+2\sum_{i=1}^{n-2}\Bigg(\ f(x_0,y_0+(2j)h)+f(x_{2n-2},y_0+(2j)h)$$
$$4\sum_{i=1}^{n-1}f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h)+2\sum_{i=1}^{n-2}f(x_0+2ih,y_0+(2j)h)\Bigg)\Bigg]+A_3h^4+B_3h^6+\ldots \qquad \ldots(43)$$

حيث $A_i, B_i, \ldots$ ثوابت تعتمد على المشتقات الجزئية للدالة $f\left(x,y\right)$ فقط , $i=1,2,\ldots$

وبجمع الصيغ (40),(41),(42),(43) نحصل على :-

$$\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x,y)dxdy=\frac{h^2}{9}\Big[\ f(x_0,y_0)+f(x_0,y_{2n})+f(x_{2n},y_0)+f(x_{2n},y_{2n})$$
$$+4\sum_{i=1}^{n}\big(f(x_0+(2i-1)h,y_0)+f(x_0+(2i-1)h,y_{2n})\big)+2\sum_{i=1}^{n-1}\big(f(x_0+(2i)h,y_0)+f(x_0+(2i)h,y_{2n})\big)$$
$$+4\sum_{j=1}^{n}\Bigg(f(x_0,y_0+(2j-1)h)+f(x_{2n},y_0+(2j-1)h)+4\sum_{i=1}^{n}f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j-1)h)$$
$$2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_0+(2i)h,y_0+(2j-1)h)\Bigg)+2\sum_{j=1}^{n-1}\Bigg(\ f(x_0,y_0+(2j)h)+f(x_{2n},y_0+(2j)h)$$
$$4\sum_{i=1}^{n}f(x_0+(2i-1)h,y_0+(2j)h)+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_0+2ih,y_0+(2j)h)\Bigg)\Bigg]+\Bigg[\frac{-1}{45}h^6(D_x^{(4)}+D_y^{(4)})$$
$$-\frac{1}{1890}h^8(2D_x^{(6)}+2D_y^{(6)}-21D_x^{(4)}D_y^{(2)}-21D_x^{(2)}D_y^{(4)}42D_x^{(5)}D_y+42D_xD_y^{(5)})$$
$$-\frac{1}{1890}h^9(-2D_x^{(7)}-2D_y^{(7)}+\ldots)+\ldots\Bigg]f(x_{2n-1},y_{2n-1})+A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+\cdots \qquad \cdots(44)$$

حيث $A_{SS}, B_{SS}, \ldots$ ثوابت

وبطريقة مماثلة يمكن ايجاد حدود التصحيح لقاعدة MS في حالة الاعتلال في النهاية العليا $\left(x_{2n},y_{2n}\right)$ اذ ان:-

$$\int_{y_0}^{y_{2n}}\int_{x_0}^{x_{2n}} f\left(x,y\right)dxdy=\frac{h^2}{3}\sum_{j=1}^{2n}\Bigg[f(x_0,y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)+f(x_{2n},y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)+4\sum_{i=1}^{n}f(x_0+(2i-1)h,y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)$$
$$+2\sum_{i=1}^{n-1}f(x_0+(2i)h,y_0+\frac{(2j-1)}{2}h)\Bigg]+\Bigg[\frac{1}{6}h^4D_{yy}+\frac{1}{3}h^6\left(\frac{-1}{15}D_x^{(4)}-\frac{11}{160}D_y^{(4)}+\frac{1}{12}D_x^{(2)}D_y^{(2)}\right)$$
$$+\frac{1}{3}h^7\left(\frac{-1}{15}D_x^{(5)}-\frac{11}{160}D_y^{(5)}+\cdots\right)\Bigg]f(x_{2n-1},y_{2n-1})+A_{MS}h^2+B_{MS}h^4+\ldots \qquad \ldots(45)$$

حيث $A_{MS}, B_{MS}, \ldots$ ثوابت

لذا فان صيغة الخطأ باستعمال قاعدة سمبسون على كلا البعدين اوالقاعدة المركبة من قاعدتي سمبسون على البعد الداخلي

والنقطــة الوســطى علــى البعــد الخــارجي عنــدما $2m=2n$ $\left(h=\overline{h}\right)$ فــي حالــة الاعــتلال فــي $\left(x_0,y_0\right)$ أو $\left(x_{2n},y_{2n}\right)$

تكتب بالشكل الآتي :-

$$I-SS\left(h\right)=a_1f_1\left(h\right)+a_2f_2\left(h\right)+...+A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+... \quad ...(46)$$

$$I-MS\left(h\right)=b_1g_1\left(h\right)+b_2g_2\left(h\right)+...+A_{MS}h^2+B_{MS}h^4+... \quad ...(47)$$

إذ إن $A_{SS},B_{SS},...$ و $A_{MS},B_{MS},...$, b_i,a_i ثوابت و $i=1,2,...$. وان g_i,f_i دوال تعتمد على h فقط

ثالثاً : التكاملات الثنائية لمكاملات معتلة

Double Integrals With SingularIntegrands

لنفرض إن مكامل التكامل الثنائي I معرف في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل عدا النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ فلا يمكن تطبيق طريقة RSS لانها تستعمل قيمة المكامل في النقطة $\left(x_0,y_0\right)$ وبذلك يكون من غير الممكن استعمال الصيغة(27) و للحصــول علــى قيمــة التكامــل باســتخدام القاعــدة المــذكورة ســوف نقــوم بإهمــال قيمــة $f\left(x_0,y_0\right)$ مــن القاعــدة , دافييــز و رابينوتز[6] وبذلك يمكن استعمال الصيغ (27) وحساب صيغ الخطأ من خلالها , وكذلك الحال إذا كانت $f\left(x_{2n},y_{2n}\right)$ غير معرفــة فنســتخدم الصــيغة(44) بعــد اهمــال قيمــة $f\left(x_{2n},y_{2n}\right)$ امــا بالنســبة لقاعــدة RMS فــلا تتــأثر بوجــود الاعــتلال ويمكــن الاعتماد على صيغ الخطا السابقة .

3.الأمثلة :-

1. $I=\int_0^1\int_1^2 xe^{-(x+y)}dxdy$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.06144772819733مقربة لاربعة عشرة مرتبة عشرية .

2. $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x+y}\,dxdy$ إذ إن قيمته التحليلية هي0.97516113319797 مقربة لاربعة عشرة مرتبة عشرية

3. $I=\int_0^1\int_0^1\frac{\ln(x+y)}{(x+y)}dxdy$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.90584134720291مقربة لاربعة عشرة مرتبة عشرية

4. $I=\int_0^1\int_0^1\frac{ydxdy}{\sqrt{1-xy}}$ إذ إن قيمته التحليلية هي 0.66666666666667 مقربة لاربعة عشرة مرتبة عشرية

5. $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^4+y^4}\,dxdy$ غير معروف القيمة التحليلية

4. النتائج :-

ان مكامل التكامل $I=\int_0^1\int_1^2 xe^{-(x+y)}dxdy$ معرف لكل $\left(x,y\right)\in\left[0,1\right]\times\left[1,2\right]$ لذا فان صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل باستعمال القاعدة SS تكون مماثلة للصيغة (10) اما باستعمال القاعدة MS تكون مماثلة للصيغ(11) .

الجدولين (1), (2) يبينان حساب التكامل أعلاه عددياً عند تطبيق الطريقتين RMS,RSS .

عندما $n=m=32$ فان قيمة التكامل اعلاه باستخدام قاعدة SSتكون صحيحة لثمان مراتب عشرية وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لاربعة عشرة مرتبة عشرية) بـ2^{10}(فترة جزيئة).

بينما عندما $n=m=32$ فـان القيمـة باسـتخدام قاعـدة MS تكـون صـحيحة لخمـس مراتـب عشـرية وباسـتخدام طريقـة تعجيـل رومبرك مع القاعدة المشاراليها حصلنا على قيمة صحيحة لثلاثة عشرة مرتبة مراتب عشرية بـ2^{10}(فترة جزيئة).

وبمقارنة نتائج الجدولين (2),(1) نلاحظ عندما $n=m=32$ ان قاعدة SS افضل من قاعدة MS وكذلك فان طريقة RSS افضل من RMSو نلاحظ عندما $n=m=16$ فان القيمة بتطبيق قاعدة SSتكون صحيحة لسبع مراتب عشرية في حين حصلت عكار[11] وبنفس الفترة الجزئية على قيمة صحيحة لاربعة مراتب عشرية وحصلت وباستخدام طريقة RMM على قيمة صحيحة لاثنتي عشر مرتبة عشرية .

ملاحظة : وضعنا القيمة التحليلية نهاية الجداول من اجل سهولة المقارنة بينها وبين القيمة التقريبية التي حصلنا عليها من استخدام الطريقتين المذكورتين .

n=m	SS	k=4	k=6	k=8	k=10
2	0.06129374804271				
4	0.06143775635245	0.06144735690644			
8	0.06144709929074	0.06144772215329	0.06144772795086		
16	0.06144768880121	0.06144772810191	0.06144772819633	0.06144772819729	
32	0.06144772573367	0.06144772819584	0.06144772819733	0.06144772819733	0.06144772819733
					0.06144772819733

الجدول (1)حساب التكامل الثنائي $I=\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y)}dxdy$ بطريقة RSS

n=m	MS	k=2	k=4	k=6	k=8
2	0.06063945181610				
4	0.06127673341109	0.06148916060942			
8	0.06140702975863	0.06145046187448	0.06144788195881		
16	0.06143768348341	0.06144790139167	0.06144773069282	0.06144772829177	
32	0.06144522516502	0.06144773905889	0.06144772823670	0.06144772819771	0.06144772819734
					0.06144772819733

الجدول (2) حساب التكامل الثنائي $I=\int_1^2\int_0^1 xe^{-(x+y)}dxdy$ بطريقة RMS

أما التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$ فان المكامل معتل المشتقات الجزئية عندما $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري

لذا فان صيغة حدود التصحيح للتكامل في أعلاه باستخدام الصيغتين (27) (28)هي :-

$$E_{SS}(h)=ah^{\frac{5}{2}}+A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+...$$

$$E_{MS}\left(h\right)=A_{MS}h^2+bh^{\frac{5}{2}}+B_{MS}h^4+\cdots$$

حيث $A_{SS},B_{SS},...$ و $A_{MS},B_{MS},...$ و a و b ثوابت.

والجدولين(3)و(4) يبينان حساب التكامل في أعلاه عددياً باستعمال الطريقتين RSS , RMS .

نستنتج من الجدول (3) عندما $n=m=64$ حصلنا على خمس مراتب عشرية صحيحة عند تطبيق قاعدة SS وباستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المشار اليها حصلنا على قيمة مطابقة للقيمة التحليلية (مقربة لاربعة عشرة مرتبة عشرية) و بـ (2^{12} فترة جزئية) .

وفي الجدول(4) حصلنا على خمس مراتب عشرية صحيحة عند تطبيق قاعدة MS عندما $n=m=64$ في حين حصلنا باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة على قيمة تقريبية صحيحة لاثنتي عشرة مرتبة عشرية و بـ (2^{12}فترة جزئية)

فضلا عن ان القيمة صحيحة لثلاث عشر مرتبة عشرية وبفارق وحدتين في المرتبة الرابعة عشر عندما $n=m=128$.

وبمقارنة نتائج الجدولين (3), (4) نلاحظ ان الجدول الاول هو افضل وان طريقة RSS افضل من طريقة RMS رغم القاعدتين المذكورتين و بدون تعجيل رومبرك اعطتا عدد متساوي من المراتب العشرية الصحيحة

بينما حصلت عكار[11] لنفس التكامل عند استعمال قاعدة MM على اربعة مراتب عشرية صحيحة عندما $n=m=64$ وبتطبيق طريقة RMM حصلت على اثنتي عشر مرتبة عشرية صحيحة و هذا يعني ان النتيجة التي حصلنا عليها بطريقة RSS هي الأفضل

n=m	SS	k=2.5	k=4	k=6	k=8	k=10
2	0.96858407730551					
4	0.97396998110429	0.97512653518785				
8	0.97494860655509	0.97515875387738	0.97516090179001			
16	0.97512343725220	0.97516097991248	0.97516112831482	0.97516113191046		
32	0.97515446148097	0.97516112353804	0.97516113311307	0.97516113318924	0.97516113319425	
64	0.97515995329581	0.97516113259293	0.97516113319659	0.97516113319792	0.97516113319795	0.97516113319796
						0.97516113319796

الجدول (3) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$ بطريقة RSS

n=m	MS	k=2	k=2.5	k=4	k=6	k=8	k=10
2	0.97859771818366						
4	0.97619853214621	0.97539880346706					
8	0.97545503675251	0.97520720495460	0.97516606162003				
16	0.97524093700410	0.97516957042130	0.97516148888572	0.97516118403677			
32	0.97518221712538	0.97516264383247	0.97516115643594	0.97516113427262	0.97516113348272		
64	0.97516660537104	0.97516140145293	0.97516113466779	0.97516113321658	0.97516113319981	0.97516113319870	
128	0.97516253686406	0.97516118069507	0.97516113329013	0.97516113319829	0.97516113319800	0.97516113319799	0.97516113319799
							0.97516113319797

الجدول (4) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dxdy$ بطريقة RMS

بالنسبة للتكامل $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln(x+y)}{(x+y)}dxdy$ فهو معتل المكامل عندما $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال لوغارتيمي نسبي

إن صيغة حدود التصحيح لهذا التكامل تكون حسب الصيغتين (27), (28) كالآتي :-

$$E_{SS}(h)=a_1h+a_2h\ln h+A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+\ldots$$

$$E_{MS}(h)=b_1h+b_2h\ln h+A_{MS}h^2+B_{MS}h^4+\ldots$$

حيث $A_{SS},B_{SS},\ldots$ و $a_i,b_i,A_{MS},B_{MS},\ldots$ ثوابت و $i=1,2$ والجدولين (5),(6) يبينان حساب التكامل أعلاه عددياً باستعمال الطريقتين RMS,RSS.

ملاحظة:- العمودين الثاني والثالث في الجدوليين (5) و(6) استخدمنا قيمة k=1 لإيجاد كل من قيم العمودين حسبما اقترح شانكس [8]

نستنتج انه عندما $n=m=256$ فان القيمة باستخدام كل من القاعدتين MS,SS تكون صحيحة لمرتبة عشرية واحدة في حين امكن الحصول على قيمة صحيحة لاثنتي عشر مرتبة عشرية باستخدام طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدتين المذكورتين عندما $n=m=256$

n=m	SS	k=1	k=1	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12
2	0.23836946450284							
4	0.47706776581768	0.71576606713252						
8	0.64341711553413	0.80976646525057	0.90376686336863					
16	0.75056827624082	0.85771943694752	0.90567240864447	0.90579944499619				
32	0.81617143287704	0.88177458951326	0.90582974207899	0.90584023097463	0.90584087837111			
64	0.85498951425193	0.89380759562682	0.90584060174038	0.90584132571781	0.90584134309468	0.90584134491713		
128	0.87740698110137	0.89982444795081	0.90584130027479	0.90584134684375	0.90584134717909	0.90584134719510	0.90584134719733	
256	0.89011993860422	0.90283289610708	0.90584134426336	0.90584134719593	0.90584134720152	0.90584134720160	0.90584134720161	0.90584134720161
								0.90584134720291

الجدول (5) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln(x+y)}{x+y}dxdy$ بطريقة RSS

n=m	MS	k=1	k=1	k=2	k=4	k=6	k=8	k=10
2	0.52089193933215							
4	0.66779110877876	0.81469027822538						
8	0.76396571802695	0.86014032727514	0.90559037632491					
16	0.82350956405963	0.88305341009230	0.90596649290946	0.90609186510431				
32	0.85899081588769	0.89447206771575	0.90589072533920	0.90586546948244	0.90585037644099			
64	0.87957717379984	0.90016353171199	0.90585499570824	0.90584308583125	0.90584159358784	0.90584145417747		
128	0.89129068086417	0.90300418792849	0.90584484414499	0.90584146029057	0.90584135192119	0.90584134808522	0.90584134766917	
256	0.89785694411248	0.90442320736079	0.90584222679309	0.90584135434246	0.90584134727925	0.90584134720557	0.90584134720212	0.90584134720167
								0.90584134720291

الجدول (6) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{\ln(x+y)}{x+y}dxdy$ بطريقة RMS

اما التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{ydxdy}{\sqrt{1-xy}}$ فهو معتل المكامل عندما $(x,y)=(1,1)$ ونوع الاعتلال جذري لذا فان صيغة حدود التصحيح باستخدام الصيغتين (44),(45) للتكامل أعلاه هي

$$E_{SS}(h)=a_1h^{\frac{3}{2}}+a_2h^{\frac{5}{2}}+a_3h^{\frac{7}{2}}+A_{SS}h^4+a_4h^{\frac{9}{2}}+\ldots$$

$$E_{MS}(h)=b_1h^{\frac{3}{2}}+A_{MS}h^2+b_2h^{\frac{5}{2}}+b_3h^{\frac{7}{2}}+B_{MS}h^4+b_4h^{\frac{9}{2}}+\ldots$$

حيث $A_{SS},B_{SS},\ldots$ و $a_i,b_i,A_{MS},B_{MS},\ldots$ ثوابت و $i=1,2,\ldots$

وباستخدام طريقتين RMS,RSS حصلنا على النتائج المدونة في الجدولين (7)و(8) على الترتيب وقد اتضح الآتي :-

نلاحظ عندما $n=m=256$ فان القيمة بقاعدة SS صحيحة لاربعة مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لاحدى عشر مرتبة عشرية بـ(2^{16} فترة جزئية) .

وعندما $n=m=256$ فان القيمة بقاعدة MS صحيحة لاربعة مراتب عشرية وباستعمال طريقة تعجيل رومبرك مع القاعدة المذكورة حصلنا على قيمة صحيحة لعشرة مراتب عشرية عندما بـ (2^{16} فترة جزئية) .

وبمقارنة نتائج الجدولين (7)و(8) نلاحظ ان الجدول الاول هو افضل ون طريقة RSS افضل من طريقة RMS رغم القاعدتين المذكرتين و بدون تعجيل رومبرك اعطتا عدد متساوي من المراتب العشرية الصحيحة كذلك نلاحظ عندما $n=m=128$ فان القيمة بطريقة RSS قيمة صحيحة لعشرة مراتب عشرية وقد حصلت عكار [11] عند تطبيق طريقة RMM على عدد مساوي من المراتب العشرية الصحيحة و بنفس الفترة الجزئية

n=m	SS	k=1.5	k=2.5	k=3.5	k=4	k=4.5	k=5.5	k=6
2	0.57563571336868							
4	0.63481116751355	0.66717529805174						
8	0.65548924193980	0.66679845637138	0.66671753443133					
16	0.66273424239232	0.66669666471392	0.66667480625497	0.66667066340215				
32	0.66528035851005	0.66667287565404	0.66666776725712	0.66666708476761	0.66666684619198			
64	0.66617731187186	0.66666787195472	0.66666679747417	0.66666670344563	0.66666667802416	0.66666667024848		
128	0.66649379892222	0.66666689143767	0.66666668088416	0.66666666957978	0.66666666732206	0.66666666682722	0.66666666674991	
256	0.66660557514851	0.66666670759660	0.66666666811908	0.66666666688140	0.66666666670151	0.66666666667282	0.66666666666933	0.66666666666805
								0.66666666666667

الجدول (7) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{ydxdy}{\sqrt{1-xy}}$ بطريقة RSS

n=m	MS	k=1.5	k=2	k=2.5	k=3.5	k=4	k=4.5	k=5.5
2	0.63770444120388							
4	0.65612203923807	0.66619495807903						
8	0.66284007183806	0.66651428587102	0.66662072846835					
16	0.66528148144172	0.66661673269162	0.66665088163182	0.66665735663873				
32	0.66616691178619	0.66665116972160	0.66666264873159	0.66666517556605	0.66666593367622			
64	0.66648704397448	0.66666213008207	0.66666578353556	0.66666645669469	0.66666658091079	0.66666662405976		
128	0.66660234126650	0.66666539944938	0.66666648923848	0.66666664077917	0.66666665862770	0.66666666380883	0.66666666564673	
256	0.66664370304491	0.66666632455268	0.66666663292045	0.66666666377432	0.66666666600389	0.66666666649564	0.66666666661987	0.66666666664186
								0.66666666666667

الجدول (8) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1 \frac{ydxdy}{\sqrt{1-xy}}$ بطريقة RMS

أما التكامل $I=\int_0^1\int_0^1 \sqrt{x^4+y^4}dxdy$ بالرغم من ان مكامله معتل المشتقات الجزئية عند النهاية السفلى $(x,y)=(0,0)$ ونوع الاعتلال جذري . الا ان حدود التصحيح باستعمال الصيغتين (27),(28) تكون كالاتي :-

$$E_{SS}(h)=A_{SS}h^4+B_{SS}h^6+\dots$$

$$E_{MS}(h)=A_{MS}h^2+B_{MS}h^4+\dots$$

وباستعمال القاعدتين RSS, RMS لحساب التكامل في أعلاه حصلنا على النتائج المدونة في الجدولين (9) و(10)

رغم ان التكامل المذكور غير معروف القيمة التحليلية الا اننا نرى من خلال الجدولين (9),(10) في حالة $n=m=128$ ان القيمة ثابتة افقيا لذا يمكن ان نقول القيمة صحيحة لاربعة عشرة مرتبة عشرية الا انه القيمة بطريقة RSS افضل من القيمة بطريقة RMS لكون وصلنا الى اربعة عشر مرتبة عشرية صحيحة في الاولى عندما $n=m=64$ وفي الثانية عندما $n=m=128$

n=m	SS	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12	k=14
2	0.53659108508613						
4	0.54424160919491	0.54475164413550					
8	0.54468518871062	0.54471476067833	0.54471417522663				
16	0.54471286368027	0.54471470867824	0.54471470785284	0.54471470994157			
32	0.54471459146026	0.54471470664559	0.54471470661333	0.54471470660847	0.54471470660521		
64	0.54471469941589	0.54471470661293	0.54471470661242	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	
128	0.54471470616264	0.54471470661242	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241

الجدول (9) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^4+y^4}\,dxdy$ بطريقة RSS

n=m	MS	k=2	k=4	k=6	k=8	k=10	k=12
2	0.52227413021991						
4	0.53971740098861	0.54553182457818					
8	0.54349712095722	0.54475702761342	0.54470537448243				
16	0.54441228140339	0.54471733488545	0.54471468870358	0.54471483654836			
32	0.54463922318985	0.54471487045201	0.54471470615644	0.54471470643347	0.54471470592322		
64	0.54469584343164	0.54471471684557	0.54471470660514	0.54471470661226	0.54471470661297	0.54471470661364	
128	0.54470999129682	0.54471470725188	0.54471470661230	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241	0.54471470661241

الجدول (10) حساب التكامل الثنائي $I=\int_0^1\int_0^1\sqrt{x^4+y^4}\,dxdy$ بطريقة RMS

المناقشة

نستنتج من خلال نتائج وجداول هذا البحث انه عند حساب التكاملات الثنائية بالقاعدتين المذكورتين (MS, SS) إن هاتين القاعدتين تعطيان قيماً صحيحة (لعدة مراتب عشرية) مقارنة مع القيم الحقيقية للتكاملات باستعمال عدد من الفترات الجزئية بدون استعمال الطريقة التعجيلية عليهما كما يظهر ذلك بوضوح أكثر في حساب التكاملات الثنائية ذات المكاملات المستمرة في كل نقطة من نقاط منطقة التكامل وكذلك ذات مكاملات معتلة المشتقات الجزئية في نقطة أو أكثر من منطقة التكامل ,
على سبيل المثال ,في التكامل الأول حصلنا على قيمة صحيحة لثمان مراتب عشرية عندما $m = n = 32$ بقاعدة SS وعند تطبيق قاعدة MS حصلنا على خمس مراتب عشرية صحيحة وفي التكامل الثاني المعتل المشتقات الجزئية عند النقطة (0,0) حصلنا على خمس مراتب عشرية صحيحة عندما $m = n = 64$ باستخدام كل من القاعدتين MS, SS
في حين حصلنا على اقل عدد من المراتب الصحيحة في حالة التكاملات المعتلة في نقطة او اكثر من منطقة التكامل كما في التكامل الثالث حصلنا عندما $m = n = 256$ على مرتبة عشرية واحدة صحيحة عند استعمال كل من القاعدتين MS, SS.وفي التكامل الرابع حصلنا عندما $m = n = 256$ على اربعة مراتب عشرية صحيحة ايضا عند استعمال القاعدتين MS, SS.
إلا إن الجداول أوضحت انه من خلال استخدام تعجيل رومبرك مع القاعدتين المذكورتين أعطتا نتائج أفضل من حيث سرعة الاقتراب بعدد قليل من الفترات الجزئية نسبياً إلى قيم التكاملات الحقيقية .إذ كانت صحيحة لاربعة عشر مرتبة عشرية بطريقة RSS وصحيحة لثلاثة عشرمرتبة عشرية بطريقة RMS بالنسبة للتكامل الاول و ب (2^{10} فترة جزئية) . وكذلك في حالة التكاملات ذات مكاملات مستمرة لكن معتلة المشتقات الجزئية او المكاملات المعتلة ففي التكامل الثاني حصلنا باستخدام طريقة RSS على اربعة عشر مرتبة عشرية صحيحة وباستخدام RMS حصلنا على اثنتي عشر مرتبة عشرية صحيحة وفي التكامل الثالث حيث المكامل معتل حصلنا على اثنتي عشر مرتبة عشرية صحيحة عندما $m = n = 256$ باستعمال القاعدتين المذكورتين وقد أوضحت الجداول إن طريقة تعجيل رومبرك ذات أهمية كبيرة في تعجيل اقتراب القيم إلى القيم الحقيقية للتكاملات وبذلك يمكن الاعتماد على الطريقين RMS, RSS وخصوصا RSS في حساب التكاملات الثنائية مهما كان سلوك المكامل في منطقة التكامل

المصادر

[1] Fox L. , " Romberg Integration for a Class of Singular Integrands ", comput. J.10 , pp. 87-93 , 1967 .

[2] Fox L. And Linda Hayes , " On the Definite Integration of Singular Integrands " SIAM REVIEW. ,12 , pp. 449-457 , 1970 .

[3] Hans Schjar and Jacobsen , " Computer Programs for One- and Two-Dimensional Romberg Integration of Complex Function " , the Technical University of Denmark Lyngby , pp. 1-12 ,1973

[4] Mohammed A. H. , "Evaluation of Double Integrations " comput J. Vol. 7 , No.3 , pp. 21-28 , 2002 .

[5] Mohammed A. H. , Hayder A. K. and Hassen A. F. " On The Numerical Integration ", an article accepted by scientific conference of Morocco ,2009

[6] Phillip J. Davis and Phillip Rabinowitz , " Methods of Numerical Integration " , BLASDELL Puplishing Company , pp. 1-2 , 599,113 , chapter 5 , 1975 .

[7] Sastry S. S. , " Introductory Methods of Numerical Analysis " , New Delhi, pp 5-7 , 2008

[8] Shanks J. A. , " Romberg Tables for Singular Integrands " comput J.15 , pp. 360 , 361 , 1972 .

[9] الطائي , علية شاني , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية معتلة " , رسالة ماجستير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة ,2005 .

[10] بوردين , ريتشارد ودوكلاس فاريز, " التحليل العددي " ,مديرية دار الكتب للطباعة و النشر , ترجمة خالد احمد السامرائي كلية التربية للبنات جامعة بغداد سنة 1992

[11] عكار , بتول حاتم , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات الثنائية والثلاثية " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة 2010

[12] ضياء , عذراء محمد , " بعض الطرائق العددية لحساب تكاملات أحادية وثنائية وثلاثية باستخدام لغة Matlab " , رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة الكوفة , 2009 .

[13] فرانك آيرز , " سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل " , دار ماكجروهيل للنشر , الدار الدولية للنشر والتوزيع , ترجمة نخبة من الأساتذة المتخصصين1988

[14] محمد , علي حسن , " إيجاد قيم تكاملات معتلة المكامل " رسالة ماجستير غير منشورة مقدمة إلى جامعة البصرة , 1984.