

أستخدام المحاكاة في تقدير معلمة القياس

لتوزيع كاما المستمر

م. م. سحر طارق محمود

جامعة بغداد / مركز أحياء تراث الأمن الغذائي

المستخلص

يتناول هذا البحث تقدير معلمة القياس (θ) لأحد توزيعات وقت الفشل المستمر وهو توزيع (كاما)، بأعتماد مقدرين مقترحين هما مقدر بيزي مقترح، ومقدر غير متحيز يملك أقل تباين هو (Minimum Variance Unbiased Estimator)، إضافة الى مقدر الأماكن الأعظم والعزوم، ومن ثم إجراء تجارب محاكاة على حجوم عينات مختلفة لمقارنة المقدرات حيث تنفذ على حجوم عينات هي ($n = 10, 25, 35, 50, 75$)، وتكرار كل تجربة ($R = 500$)، ومقارنة النتائج بواسطة المقياس الأحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE).

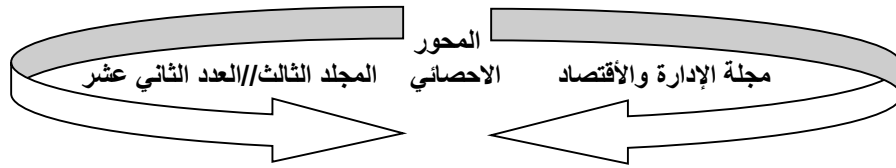
Abstract:

This paper deals with estimating the parameter of one continuous failure time distribution which is Gamma distribution, using method of moments, maximum likelihood and two proposed estimators, one is Bayesian and the other proposed is obtained from minimum variance unbiased estimator. While the shape parameter can be estimated using moments and others but it considered as constant. The comparison between four various estimators has been done using simulation procedure, and applying statistical measure mean square error (MSE). All results explained by tables.

Keywords: Two parameters Gamma (p, θ), $\hat{\theta}_{MLE}$, $\hat{\theta}_{MOM}$, $\hat{\theta}_{Bayes}$, \hat{p}_{MOM} , \hat{p}_{MLE} , $\hat{\theta}_{MVUE}$, MSE .

المقدمة - 1 *Introductio*

تعدّ عملية تقدير المعلمات المجهولة من الأشياء الضرورية والمهمة في النظرية الأحصائية وخاصة بالنسبة لأولئك الذين يهتمون بالجانب التطبيقي، لا بد من تقدير المعلمات للتوزيع قيد الدراسة، ومن ثم اعتماد هذه المقدرات في تقدير المعولية مثلاً، ومتوسط وقت الأشتغال لحين الفشل وتباين ذلك الوقت وغيرها من المؤشرات المهمة المرتبطة بالتوزيع، وقد أشار عدد من الباحثين الأحصائيين ، (Bakar (2011) ، Bucar (2004) ، Iman Makhdooor (2011) ، وآخرون إلى كيفية تقدير المعلمات المجهولة لبعض التوزيعات



الأحتمالية المعروفة مثل توزيع كاما، وبيبل، والتوزيع المختلط (الأسّي - وبيبل)، ولوغاريتم كاما، وقد عمل الباحثون على البحث دائماً عن أفضل الطرائق لتقدير توزيعات وقت الفشل لأن كثير من البيانات التي تظهر في الواقع التطبيقي سواء كانت كاملة أو مبتورة أو مقطوعة أو مستمرة، تسلك سلوك توزيع معين قد يمثل توزيع الوقت المستغرق لحين حصول الفشل في الأجهزة أو المعدات أو الأعضاء البشرية للإنسان، أو أجزاء المكنان، أو أجهزة الحماية التي تربط مع الأجهزة الطبية الحساسة والغالية الثمن، وهنا تبدو الحاجة ملحة كثيراً لأعداد طرائق إحصائية - رياضية للعمل على تقديرات معلمات ومؤشرات التوزيع لمثل تلك التطبيقات المتنوعة.

2 - هدف البحث Aim of Research

يهدف البحث الى تقدير كل من معلمة القياس (θ) ، ومعلمة الشكل (p) لتوزيع كاما ذي المعلمتين، وسوف نقدر (p) بطريقة العزوم (\hat{p}_{MOM}) ، ومن ثم تستخدم في الحصول على معلمة القياس، وسوف نقدر معلمة القياس بطريقة الأماكن الأعظم والعزوم ومقدر بيبي ثاني هو $(MVUE)$ ، ومقدر خاص هو خليط من $(MVUE)$ مع مقدر الأماكن الأعظم. ويعتمد المقدر البيبي على توزيع أولي للمعلمة (θ) يحدد من الخبرة والبيانات السابقة، ودالة خسارة، لأنه يعمل على إيجاد صيغة المقدر من خلال تصغير دالة المخاطرة المتوقعة، أما المقدر غير المتحيز ذي أقل تباين $(MVUE)$ ، فان تباينه يساوي تباين الحد الأدنى لمتباينة $(Gramer - Rao)$. وبعد أستخراج صيغ المقدرات سوف نعتمد المحاكاة لتحقيق هدف البحث.

3 - الجانب النظري Theoretical Approach

الصيغة الرياضية العامة لتوزيع كاما هي:

$$f_T(t; B, p, \theta) = \frac{B}{\Gamma(p)\theta^p} t^{Bp-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^B} I_{(0,\infty)} t \quad (1)$$

حيث أن (B, p) هما معلمتي شكل و (θ) معلمة قياس، وعندما $(B = 1)$ نحصل على الدالة الاحتمالية الأعتيادية لتوزيع كاما والمعرفة في المعادلة:

$$f_T(t; p, \theta) = \frac{1}{\Gamma(p)\theta^p} t^{p-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)} I_{(0,\infty)} t \quad (2)$$

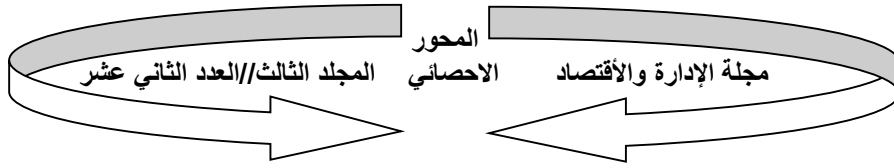
علماً بأن:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = (p-1)!$$

حيث (p) عدد صحيح، وتوجد علاقة أخرى مفيدة هي:

$$\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{1,3,5,\dots,(2p-1)\sqrt{\pi}}{2^p} \quad (3)$$

وعندما $(p = 1)$ يتحول توزيع كاما الى التوزيع الأسّي $(Exponential Distribution)$ وهو حالة خاصة من توزيع جاما.



$$f_T(t) = \frac{1}{\theta} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)} I_{(0,\infty)} t \quad (4)$$

وعندما $(\theta = 2, p = \frac{n}{2})$ يتحول توزيع كاما الى توزيع مربع كاي $\{Chi - Square (n)\}$ بدرجة حرية (n) والمعرف (χ^2) بالمعادلة:

$$f_T(t) = \frac{t^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)} I_{(0,\infty)} t \quad (5)$$

نأتي الآن الى تعريف الدالة الاحتمالية التراكمية (C.D.F) وهي:

$$F_T(t; p, \theta) = pr(T \leq t) = \int_0^t f(u) du \quad (6)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{\Gamma(p)\theta^p} u^{p-1} e^{-\frac{u}{\theta}} du \quad (7)$$

وهذه الدالة تسمى دالة كاما غير التامة (Incomplete Gamma Function).

تكون صيغة الدالة التراكمية التجميعية هي:

$$F_T(t; p, \theta) = \sum_{j=k}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{t}{\theta}\right)^j e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)}}{j!} \right]$$

حيث (k) عدد صحيح موجب، أما العزم الرائي حول نقطة الأصل للمعلمتين (θ, p) هو:

$$\begin{aligned} \mu'_r &= E(t^r) = \int_0^t t^r f(t) dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)\theta^p} \int_0^{\infty} t^{r+p-1} e^{-\frac{t}{\theta}} dt \quad (9) \end{aligned}$$

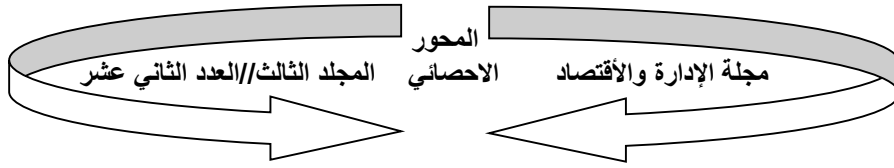
حيث ان:

$$\int_0^{\infty} t^{n-1} e^{-t} dt = \Gamma(n) = (n-1)!$$

يكون المتوسط الرائي حول نقطة الأصل:

$$\begin{aligned} \mu'_r &= \frac{\theta^{r+p}}{\Gamma(p)\theta^p} \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\theta}\right)^{r+p-1} e^{-\frac{t}{\theta}} d\left(\frac{t}{\theta}\right) \\ &= \frac{\theta^r \Gamma(r+p)}{\Gamma(p)} \quad (10) \end{aligned}$$

ومنها يكون العزم الأول:



$$\mu'_1 = E(t) = \frac{\theta \Gamma(1+p)}{\Gamma(p)} = \frac{\theta p \Gamma(p)}{\Gamma(p)} = \theta p \quad (11)$$

$$\mu'_2 = E(t^2) = \frac{\theta^2 \Gamma(2+p)}{\Gamma(p)} = \frac{\theta^2 (p+1) p \Gamma(p)}{\Gamma(p)} = \theta^2 p(p+1) \quad (12)$$

$$E(t^2) = \theta^2 p^2 + \theta^2 p$$

$$\text{var}(t) = E(t^2) - [E(t)]^2$$

$$= \theta^2 p^2 + \theta^2 p - [\theta p]^2 = \theta^2 p$$

وهكذا نجد أن العزم الأول هو:

$$\mu = \theta p$$

$$\text{var}(t) = \sigma^2 = \theta^2 p$$

4 - طرائق تقدير معلمتي توزيع كاما

Estimation Methods of two Parameter Gamma Distribution

سوف يتم توضيح بعض طرائق تقدير المعلمتين (θ, p) حيث سيتم تقدير (θ) بطريقة الأمكان الأعظم والعزوم ومقدر بيبي مقترح دالة خسارة تربيعية، ومقدر مقترح ثاني هو $(MVUE)$ ، في حين سيتم تقدير معلمة الشكل (p) بطريقة العزوم والأمكان الأعظم، وستتم الاستفادة من القيم الجدولية وبعض القيم المقدر في تنفيذ برامج المحاكاة التي ستنفذ على خمسة أحجام عينات $(n = 10, 25, 35, 50, 75)$ ، وتكرار كل تجربة (500) مرة ومقارنة النتائج بواسطة (MSE) .

Moments Estimators 1 - 4 مقدرات العزوم

تعتمد هذه الطريقة عند استخراج مقدر المعلمة المجهولة على مساواة عزوم العينة مع عزوم المجتمع، وحسب عدد المعلمات الموجودة في الدالة الاحتمالية المدروسة حيث:

$$m_r = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^r}{n} \quad r = 1, 2, \dots \dots \dots \text{عزم العينة}$$

$$\mu'_r = E(T^r)$$

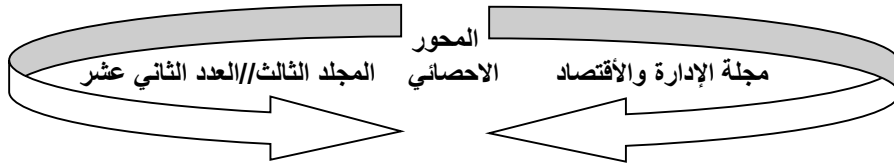
للحصول على المقدر نحل المعادلة الناتجة من:

$$m_r = \mu'_r$$

علماً بأن:

$$m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} = \bar{t}$$

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n}$$



$$\mu'_1 = E(T) = p\theta$$

$$\mu'_2 = E(T^2) = \theta^2 p(p + 1)$$

من العلاقتين:

$$m_1 = \mu'_1$$

$$m_2 = \mu'_2$$

$$\bar{t} = \hat{p}\hat{\theta} \quad (13)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n t_i^2}{n} = \hat{\theta}^2 \hat{p}(\hat{p} + 1) \quad (14)$$

وبعد حل المعادلتين (13) و (14) نحصل على:

$$\hat{p}_{MOM} = \frac{\bar{t}}{S_t^2}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n-1}$$

$$\hat{\theta}_{MOM} = \frac{S_t^2}{\bar{t}}$$

Maximum Likelihood Estimators

2 - 4 مقدرات الأمكان الأعظم

تعمل مقدرات الأمكان الأعظم على جعل لوغاريتم دالة الأمكان أعظم ما يمكن، وكذلك هي مقدرات كافية (*Sufficient*) ومقدرات متسقة (*Consistent*) وكفوءة (*Efficient*)، إضافة الى الخاصية المهمة جداً وهي خاصية عدم التغير (*Invariant Property*)، وللحصول المقدرات بطريقة الأمكان الأعظم نطبق الخطوات التالية:

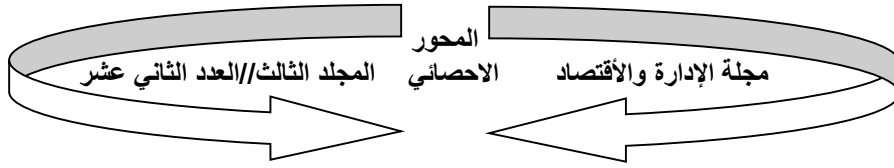
a - نستخرج الدالة الاحتمالية المشتركة:

$$L = \prod_{i=1}^n f(t_i, p, \theta)$$

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n; p, \theta) = \frac{1}{[\Gamma(p)]^n (\theta^{np})} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta}} \quad (15)$$

وبأدخال اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة (15):

$$\ln L = -n \ln \Gamma(p) - np \ln(\theta) + (p - 1) \sum_{i=1}^n \ln(t_i) - \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta} \quad (16)$$



ثم نشتق $(\ln L)$ لكل من (θ, p) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L}{\partial \theta} &= -\frac{n\hat{p}}{\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta^2} = 0 \quad (17) \\ &= \frac{n\bar{t}}{\theta^2} - \frac{n\hat{p}}{\theta} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = -n \frac{d}{dp} [\ln \Gamma(\hat{p})] - n \ln \hat{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln(t_i) = 0 \quad (18)$$

$$\hat{\theta}_{MLE} = \left(\frac{\bar{t}}{\hat{p}_{MLE}} \right) \quad (19)$$

وعند تعويض المعادلة (19) في المعادلة (18) نحصل على:

$$\psi(\hat{p}) - \ln(\hat{p}) = \ln \left[\frac{(t_1, t_2, \dots, t_n)^{\frac{1}{n}}}{\bar{t}} \right] \quad (20)$$

$$\psi(\hat{p}) = \frac{\Gamma'(\hat{p})}{\Gamma(\hat{p})} \quad (21)$$

وهي دالة تسمى *Digamma Function*

$$\psi(\hat{p}) - \ln(\hat{p}) = \ln(R)$$

حيث أن (R) يمثل نسبة الوسط الهندسي للعينة الى الوسط الحسابي لتلك العينة وعند الحصول على (\hat{p}) من المعادلة (20) نرجع للمعادلة (19) للحصول على $(\hat{\theta}_{MLE})$ وعند هذين المقدرين يكون:

$$\left| \frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} \right| \text{ and } \left| \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} \right| < 0$$

3 - 4 مقدر بيز *Bayesian Estimator*

أعتبر ثوماس بيز (1761) أن المعلمة (θ) قد تكون متغير عشوائي يتغير من عينة لأخرى، وبالتالي سيكون له توزيع أولي يسمى $\{Prior Distribution [g(\theta)]\}$ يحدد من الخبرة السابقة والبيانات، ثم يتم الحصول على المقدر البيزي بتصغير دالة الخسارة المتوقعة طبقاً للتوزيع الشرطي للمعلمة (θ) نسبة الى توزيع المشاهدات أي:

$$\min_{\theta} E[L(\hat{\theta}, \theta)] = \min_{\theta} \int_0^{\infty} L(\hat{\theta}, \theta) f(\theta|t) d\theta$$

وبالنسبة للتوزيع المدروس هنا، توزيع كاما ذي المعلمتين:

$$f_T(t; p, \theta) = \frac{1}{\Gamma(p)\theta^p} t^{p-1} e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)} \quad t > 0$$

فأن:

$$L(t_1, t_2, \dots, t_n; p, \theta) = \frac{1}{[\Gamma(p)]^n (\theta^{np})} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta}} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1}$$

ولو كان التوزيع الأولي المفترض هو:

$$g_1(\theta) = \frac{k}{\theta^c} \quad \theta > 0 \quad (22)$$

حيث أن $(c \in R)$ و أن (k) ثابت. وأن التوزيع الشرطي $[h(\theta|t)]$ سيكون:

$$h(\theta|t) = \frac{g(\theta) \prod_{i=1}^n f(t_i; p, \theta)}{\int_0^\infty g(\theta) \prod_{i=1}^n f(t_i; p, \theta) d\theta} \quad (23)$$

وبالنسبة للمقام فإن:

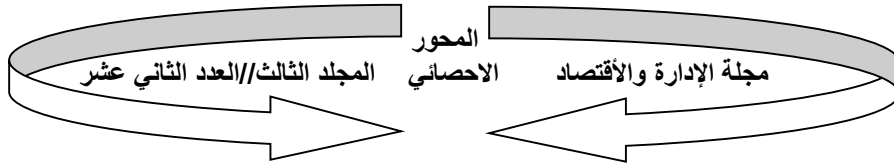
$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^\infty g(\theta) \prod_{i=1}^n f(t_i; p, \theta) d\theta \\ &= \int_0^\infty \frac{k}{\theta^c} \frac{1}{[\Gamma(p)]^n (\theta^{np})} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta}} d\theta \\ &= \frac{k}{[\Gamma(p)]^n} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{c+np}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta}} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} d\theta \end{aligned}$$

نفرض أن:

$$\begin{aligned} y &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta} \Rightarrow \theta = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{y} \\ d\theta &= -\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{y^2} dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{k}{[\Gamma(p)]^n} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \int_0^\infty \frac{1}{\theta^{c+np}} e^{-y} \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{y^2} dy \\ f(t) &= \frac{k}{[\Gamma(p)]^n} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \sum_{i=1}^n t_i \int_0^\infty \frac{y^{c+np}}{(\sum_{i=1}^n t_i)^{c+np}} e^{-y} y^{-2} dy \\ f(t) &= \frac{k}{[\Gamma(p)]^n} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i)^{c+np-1}} \int_0^\infty y^{c+np-2} e^{-y} dy \\ f(t) &= \frac{k}{[\Gamma(p)]^n} \prod_{i=1}^n t_i^{p-1} \frac{1}{(\sum_{i=1}^n t_i)^{c+np-1}} \Gamma(c + np - 1) \quad (24) \end{aligned}$$

وبعد أستخراج $f(t)$ من المعادلة أعلاه نقسم لأيجاد التوزيع الشرطي اللاحق.



$$h(\theta|t) = \frac{g(\theta) \prod_{i=1}^n f(t_i; p, \theta)}{f(t)}$$

$$h(\theta|t) = \frac{\left(\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta}\right)^{c+np} e^{-\frac{\sum_{i=1}^n t_i}{\theta}}}{\left(\sum_{i=1}^n t_i\right) \Gamma(c+np-1)} \quad (25)$$

وهو أيضاً توزيع كاما بالمعلمات $(c + np, \frac{1}{\theta})$ ، وبافتراض أن دالة الخسارة هي دالة تربيعية:

$$L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$$

وأن المخاطرة هي القيمة المتوقعة للخسارة:

$$\begin{aligned} Risk &= E(\hat{\theta} - \theta)^2 \\ &= \int_0^{\infty} (\hat{\theta} - \theta)^2 h(\theta|t) d\theta \\ &= \int_0^{\infty} (\hat{\theta}^2 - 2\theta\hat{\theta} + \theta^2) h(\theta|t) d\theta \\ &= \int_0^{\infty} \hat{\theta}^2 h(\theta|t) d\theta - 2\theta \int_0^{\infty} \hat{\theta} h(\theta|t) d\theta + \theta^2 \int_0^{\infty} h(\theta|t) d\theta \\ &= E(\hat{\theta}^2) - 2\theta E(\hat{\theta}) + \theta^2 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Risk}{\partial \hat{\theta}} = 2E(\hat{\theta}) - 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_{Bayes} = E(\hat{\theta}|t)$$

وهو متوسط التوزيع اللاحق

$$\hat{\theta}_{Bayes} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{(c+np-1)} \quad (26)$$

c ثابت و (p) معلمة الشكل.

Uniformly Minimum Unbiased Estimator (UMVUE) 4 – 4

إذا كانت لدينا دالة من المشاهدات مأخوذة من التوزيع (t_1, t_2, \dots, t_n) فإن:

$$T^* = t^*(t_1, t_2, \dots, t_n)$$

المقدر (T^*) غير متحيز وتباينه يساوي الحد الأدنى لـ $(Gramer - Rao Inequality)$:

$$var_{\theta}(T) \geq \frac{[\tau'(\theta)]^2}{n E\left[\frac{\partial}{\partial \theta} \log f(t; p, \theta)\right]^2} \quad (27)$$

وحيث أن لوغاريتم الدالة (1) هو:

$$\log(f) = \log\left(\frac{1}{\Gamma(p)}\right) - p \log(\theta) + (p-1) \log(t_i) - \frac{t_i}{\theta}$$

$$\frac{\partial \log(f)}{\partial \theta} = -\frac{p}{\theta} + \frac{t_i}{\theta^2}$$

$$E\left(\frac{\partial \log(f)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{p}{\theta^2}$$

$$\text{var}(T) \geq \frac{1}{nE\left(\frac{\partial \log(f)}{\partial \theta}\right)^2} \geq \frac{\theta^2}{np} \quad (28)$$

وعليه فإن المقدر الجديد المقترح للمعلمة (θ) هو:

$$T_2 = \frac{\bar{t}}{p}$$

ويمثل دالة المشاهدات، ومن معلمة الشكل (p) المعلومة أو المقدر مسبقاً وأن تباين هذا المقدر:

$$v(T_2) = \frac{\theta^2}{np}$$

وطبقاً لما تقدم تكون للمعلمة (θ) هو دالة من المشاهدات (t_i) ومن معلمة الشكل (p) ويساوي:

$$T_2(t) = \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{np} = \frac{\bar{t}}{p} \quad (29)$$

5 - المحاكاة Simulation

تتم عملية المحاكاة أولاً من توليد قيم تتبع التوزيع المنتظم [$Uniform(0, 1)$]

$$t_i = -\frac{1}{\theta} \ln u_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

u_i is $r.v \sim uniform(0, 1)$

$$T = \sum_{i=1}^n t_i \sim Gamma$$

المقارنة تتم بواسطة متوسط مربعات الخطأ:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^R (\hat{\theta}_i - \theta)^2}{R}$$

حيث أن ($R = 500$) يمثل التكرار لكل تجربة، والنتائج موضحة في الجداول التالية:

Table (1): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values ($\theta = 0.5, p = 3, c = 1, R = 500$).

n	MM	ML	$Bayes I$	$MVUE$
10	0.47627507	0.56627506	0.55293278	0.46040903
25	0.47644018	0.51644016	0.50452131	0.4717430
35	0.47633231	0.51633235	0.50506823	0.47255494
50	0.49003395	0.50202245	0.50184653	0.47580311
75	0.47757532	0.50157523	0.50065009	0.47559315

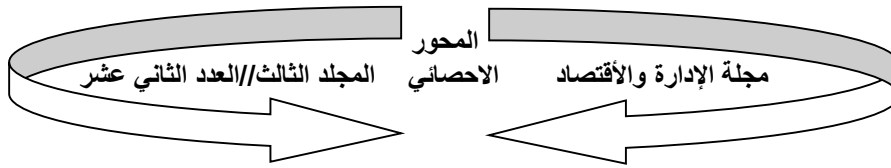


Table (2): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 1, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.47751066	0.51751065	0.50318899	0.46064483
25	0.49111918	0.49511917	0.49487587	0.47342221
35	0.49055871	0.49072872	0.49069043	0.47489143
50	0.49061172	0.49081171	0.49073427	0.47459643
75	0.47658388	0.48658386	0.48359142	0.47360219

Table (3): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 2, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.47666591	0.52566592	0.51207324	0.47641282
25	0.49063202	0.50181251	0.50163752	0.49062465
35	0.47675731	0.48775734	0.48335046	0.47673941
50	0.47364994	0.47564993	0.47476525	0.47361312
75	0.49016526	0.49032222	0.49026718	0.49015619

Table (4): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 3, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.50240577	0.50610572	0.50522863	0.50191831
25	0.47646566	0.47946565	0.47823507	0.46082833
35	0.47728381	0.47928383	0.47870795	0.47707739
50	0.47702789	0.47902787	0.47821427	0.47482697
75	0.47591267	0.47791265	0.47696563	0.47278223

Table (5): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 3, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.51276403	0.52876401	0.52773781	0.50687266
25	0.50810481	0.50930482	0.50923507	0.50784251
35	0.50373269	0.50473268	0.50462188	0.50271712
50	0.50215519	0.50412213	0.50337468	0.50187097
75	0.50202579	0.50402573	0.50309622	0.50158431

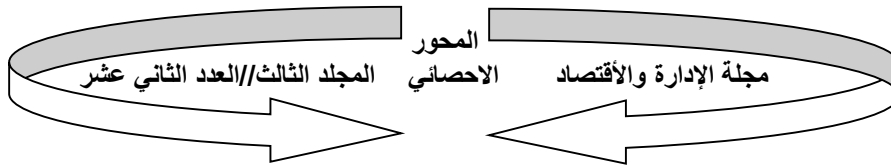


Table (6): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 3, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.87502166	0.87502167	0.88487115	0.85524593
25	0.90113931	0.90113713	0.94212602	0.88755558
35	0.90204772	0.90173671	0.91685159	0.87727732
50	0.90046643	0.90433145	0.90335249	0.87533894
75	0.90003585	0.90202282	0.9010009	0.87517735

Table (7): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 1, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.90021553	0.90051523	0.90034728	0.90407632
25	0.90412504	0.91711501	0.91684129	0.90362791
35	0.90413377	0.90812373	0.90684359	0.90308415
50	0.90169058	0.90690583	0.90525089	0.9003789
75	0.90565873	0.90765872	0.90697891	0.90001558

Table (8): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 2, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.90044074	0.90074072	0.90064072	0.93059271
25	0.90575641	0.90775612	0.91312125	0.90361463
35	0.90056357	0.90812352	0.90729632	0.90324366
50	0.90385815	0.90415812	0.90391648	0.90371528
75	0.90236968	0.90416958	0.90381458	0.90157638

Table (9): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 1, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.97290215	0.97490122	0.97321225	0.92059562
25	0.90575614	0.90775613	0.90612125	0.90361463
35	0.90873136	0.92064134	0.91748059	0.90785625
50	0.90125844	0.91125842	0.91091299	0.90081527
75	0.90317126	0.90811122	0.90620783	0.90277635

Table (10): Estimated values of (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 1, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	1.50098461	1.70088462	1.61421301	1.4652536
25	1.50251965	1.58011965	1.57429413	1.5011944
35	1.50075486	1.55112482	1.54112699	1.4769878
50	1.47836925	1.47856922	1.47843342	1.4709151
75	1.47344051	1.56344052	1.51089635	1.4705658

Table (11): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 1, R = 500)$.

	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.00427611	0.00477612	0.00462941	0.0041255
25	0.00101818	0.00211712	0.00206921	0.0010049
35	0.00103819	0.00160114	0.00156823	0.0010018
50	0.00043395	0.00075391	0.00074653	0.0001031
75	0.00027532	0.00047531	0.00046009	0.0001631

Table (12): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 1, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.00661771	0.00721772	0.00710472	0.00615258
25	0.00511527	0.00681523	0.00678965	0.00418131
35	0.50045871	0.50054872	0.50053043	0.47589143
50	0.00057428	0.00057523	0.00056691	0.00053346
75	0.00023731	0.00024732	0.00024114	0.00023556

Table (13): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 2, R = 500)$.

n	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.006751065	0.00751065	0.00688894	0.00664482
25	0.00221917	0.00301917	0.00277585	0.00212223
35	0.00145871	0.00165872	0.00159043	0.00139143
50	0.00051172	0.00061173	0.00063427	0.00049643
75	0.00058388	0.00059384	0.00059142	0.00050219

Table (14): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 3, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.00766591	0.00796592	0.00777324	0.00741282
25	0.00253202	0.00263251	0.00353752	0.00252465
35	0.00165731	0.00175733	0.00175046	0.00163941
50	0.00054994	0.00064992	0.00063525	0.00051312
75	0.00014526	0.00031225	0.00025718	0.00014619

Table (15): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 3, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.00740577	0.01640576	0.01122863	0.00729183
25	0.00246566	0.00336562	0.00283507	0.00212833
35	0.00188381	0.00278382	0.00260795	0.00177739
50	0.00032789	0.00042782	0.00041427	0.00032697
75	0.00029267	0.00041262	0.00036563	0.00028223

Table (16): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 0.5, p = 3, c = 3, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.00776403	0.01576402	0.01183781	0.00757266
25	0.00200481	0.00230482	0.00223507	0.00184251
35	0.00163269	0.00183265	0.00182188	0.00261712
50	0.00074519	0.00076514	0.00076468	0.00056097
75	0.00042579	0.00072574	0.00069622	0.00058431

Table (17): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 1, R = 500)$.

<i>n</i>	<i>MM</i>	<i>ML</i>	<i>Bayes I</i>	<i>MVUE</i>
10	0.01502166	0.04302164	0.04187115	0.01324593
25	0.01057932	0.01433934	0.01302602	0.01055558
35	0.00634772	0.01404774	0.01005159	0.00627732
50	0.00357643	0.00655142	0.00435249	0.00333894
75	0.00324685	0.00374682	0.0036009	0.00317735

Table (18): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 2, R = 500)$.

n	MM	ML	$Bayes I$	$MVUE$
10	0.01521553	0.03111552	0.03057281	0.01407632
25	0.01512504	0.01812502	0.01616849	0.01452791
35	0.00313377	0.00363372	0.00358435	0.00207415
50	0.00480587	0.00520582	0.00495089	0.0043789
75	0.00355873	0.00395872	0.0038789	0.00301558

Table (19): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 1, R = 500)$.

n	MM	ML	$Bayes I$	$MVUE$
10	0.02064074	0.04044072	0.03061193	0.02059271
25	0.00147564	0.00317562	0.00302125	0.00251463
35	0.00563576	0.00663572	0.00629632	0.00524366
50	0.00335815	0.00535812	0.00491648	0.00371528
75	0.00196968	0.00326962	0.00311458	0.00287638

Table (20): Values of mean square error (MSE) for (θ) by different methods and due to different sample size with initial values $(\theta = 1, p = 3, c = 1, R = 500)$.

n	MM	ML	$Bayes I$	$MVUE$
10	0.018902\5	0.022902\2	0.021322\5	0.01759562
25	0.010256\4	0.010056\2	0.00202125	0.00151463
35	0.00593136	0.00684132	0.00648059	0.00585625
50	0.00395844	0.00435842	0.00411299	0.00331527
75	0.00278126	0.00338123	0.00320783	0.00217635

الأستنتاجات والتوصيات

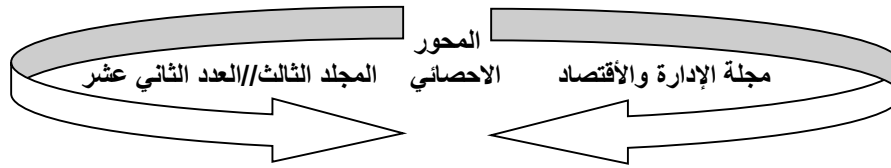
1 - يعتبر تقدير المعلمتين $(\hat{\theta}, \hat{p})$ ضروري جداً لأستخراج متوسط وقت الأشتغال لحين الفشل $(\bar{t} = \hat{\theta}\hat{p})$ ، وكذلك حساب التباين.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n-1}$$

2 - يعتبر المقدر $(MVUE)$ للمعلمة (θ) مقدر جيد جداً لأنه يمتلك أصغر متوسط مربعات خطأ عند حجوم العينات المختلفة.

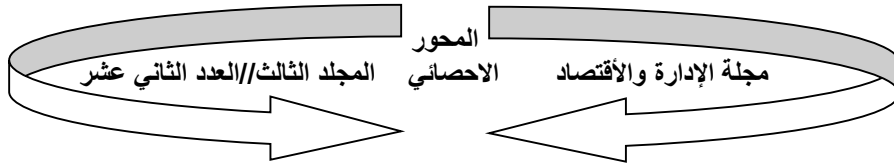
3 - أن مقدرات معلمات الشكل والقياس ضرورية جداً خصوصاً عندما يرغب الباحث تقدير متوسط وقت الفشل لتوزيع كاما.

4 - لكافة حجوم العينات كان التقدير الأمثل لـ (θ) هو $(MVUE)$ يليه المقدر البيزي والعزوم ومن ثم الأماكن الأعظم.



References

- [1] Iman Makhdoom, (2011), "Minimax estimation of the parameter of the generalized exponential distribution", International journal of academic research, Vol. 3, No. 2, Part II.
- [2] Bakar, D., Bridges, D., Hunter, R., Johnson, G., Krupa, J., Murphy, J. and Sorenson, K. (2002). "Gidebook to Decision – Making Methods ", WSRC-IM-2002-00002, Department of Energy, USA.
- [3] Bather, J. (2000). "Decision Theory". Chichester: John Wiley & Sons, Inc.
- [4] Bucar, T., Nagode, M. and Fajdiga, M. , (2004) "Reliability approximation using finite Weibull mixture distributions", Reliability Engineering & System Safety, Vol. 84, No. 3, pp.241– 251.
- [5] Cheng K. Lee Miin-Jye Wen, (2009) "A Multivariate Weibull Distribution "Pak.j.stat.oper.res. Vol.V No.2, pp55–66.
- [6] Choudhury, A. (2005). "A Simple Derivation of Moments of the Exponentiated Weibull Distribution". Metrika 62 (1): 17–22.
- [7] C. T. Lin, S. J. S. Wu, N. Balakrishnan, (2004), " Interval estimation of parameters of log-gamma distribution based on progressively censored data" [CiTO] Communications in Statistics–Theory and Methods, Vol. 33, No. 11–12. (2004), pp. 2595–2626.
- [8] Diane, I. G. & Lonnie, C. V. (1981), "A simulation study of estimators for the 2 – parameter Weibull distribution", IEEE Transection of Reliability, Vol. R. 30, No.1.
- [9] G. McLachlan, D. Peel. (2000), "Finite Mixture Models". John Wiley & Sons,.
- [10] Jiang, S. and Kececioglu, D., (1992), "Maximum likelihood estimates, from censored data, for mixed-Weibull distributions", IEEE Transactions on Reliability, Vol. 41, Issue 2, pp.248–255.
- [11] Kundu D. & Gupta R. D. (2005), "Bayesian estimation for the generalized Exponential Distribution" Metrica, Vol. 61. 219 – 308.
- [12] Kundu D. & Gupta R. D. (2008), "Generalized Exponential Distribution" Bayesian Estimations Computational statistical Data Analysis, Vol.52, No. 4, pp. 1873 – 1883.
- [13] Lawless, J. F. 92003), "Statistical models and Methods for life time Data", Jhon Weily & Sons, Inc. NewJersy.
- [14] L. Pace, A. Salvan, L. Ventura, (2006), "Likelihood-based discrimination between separate scale and regression models" [CiTO] Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 136, No. 10. (Oct 2006), pp. 3539–3553.
- [15] M. Aslam, C.–H, Jun and M. Ahmad (2009). A group sampling plan based on truncated life tests for gamma distributed items, Pakistan Journal of Statistics, 25, 333–340.
- [16] Nadarajah, S.; Gupta, A.K. (2005). "On the Moments of the Exponentiated Weibull Distribution". Communications in Statistics: Theory and Methods 34 (2): 253–256.
- [17] Nassar, M.M.; Eissa, F.H. (2003). "On the exponentiated Weibull distribution". Commun Stat Theory Meth 32: 1317–1336.



[18] Pal, M.; Ali, M.M.; Woo, J. (2006). "Exponentiated Weibull distribution". *Statistica* 66 (2): 139–147.

[19] Rohatgi, V. K. (1979), "An Introduction to probability theory and mathematical statistics" Jhon Weily & Sons, Inc. NewJersy.

[20] Roy M. K., Podder C. K. and Bhuiyan K. J. (2002), "Minimax Estimator of the Scale Parameter of the Weibull Distribution for quadratic and MLINEX loss function", *Jahangirnagar University Journal of Science*, 25, 277 – 285.

[21] Sinha, S. K. & Kale, B. K. (1979), "life testing and reliability estimation", Weily eastern Ltd.

[22] Titterington, D.M., Smith, A.F.M. and Makov, U.E., "Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions", John Wiley & Sons, (1985).