AL KUT JOURNAL OF ECONOMIC AND ADMINISTRATIVE SCIENCES
Publisher: College of Economics and Management - Wasit University

المقارنة بين الطرائق التقليدية والبيزية لتقدير معولية نظام الإجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone باستخدام المحاكاة.

Comparison Between Traditional and Bayesian Methods to Estimate the Reliability of Stress and Strength Multicomponent System Via Topp-Leone Distribution

سارة صباح اكرم[1] ا.م. د علي حميد يوسف[2]

sakram@uowasit.edu.iq ahameed@uowasit.edu.iq

جامعة واسط/ كلية الادارة والاقتصاد

المستخلص

تناول هذا البحث تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات عندما يكون كل من متغير المتانة X ومتغير الاجهاد Y مستقلين ومتماثلين (i.i.d.) ويتبعان توزيع Topp-Leone ، باستخدام الطرائق التقليدية وهي طريقة الامكان الاعظم وطريقة الوسيط والطرائق البيزية في ظل وجود دالة خسارة تربيعية باستعمال أسلوب الباحث (Lindley Approximation) بالاعتماد على دالة التوزيع الأولي (Weibull Distribution) ، واستناداً الى طريقة (Monte-Carlo) للمحاكاة تمت المقارنة بين الطرائق المستخدمة بالاعتماد على متوسط مربعات الخطأ (MSE) . اظهرت النتائج أن طريقة بيز هي الافضل لتجارب المحاكاة جميعها

الكلمات المفتاحية : نظام متعدد المركبات ،الاجهاد والمتانة ، طريقة الامكان الاعظم ،طريقة الوسيط ،توزيع Topp-Leone ، تقريب ليندلي .

Abstract :

In this study, the reliability of the multicomponent stress and strength system is estimated using the Traditional Maximum Likelihood Method, median method, and Bayesian methods under the squared error loss function based on the Lindley Approximation methods, by assuming the primary information are associated (Weibull Distribution) .When each strength variable X and stress variable Y are independent and symmetric (i.i.d.) and follow the Topp-Leone distribution. And the Monte-Carlo simulation method were compared using the mean squares error (MSE). According to the findings, the Bayes approach is the most effective for all simulation experiments.

Keyword: Multicomponent System, Stress – Strength, Maximum Likelihood Method (MLE), Median Method (Med) ، Topp-Leone Distribution ، Lindley Approximation

1- المقدمة

يعود الاهتمام المتزايد في دراسات موضوع المعولية في السنوات الاخيرة الى التطور السريع في مجال الانظمة والمعدات على مختلف اصعدتها ،إن بدراسة معولية الانظمة يمكننا تقيم اداء وكفاءة هذه الانظمة للتخطيط لنوع وحجم الانتاج وتحسينه في المستقبل من خلال تطويره وايجاد الهيكيلة الهندسية الملائمة له .لأنه يعد المؤشر لبيان مدى كفاءة الانظمة وقدرتها على انجاز العمل من دون عطل لفترات زمنية طويلة. وبطبيعة الحال فإن هذه المكائن او المعدات قابلة للعطل وهذا يؤدي بشأنه الى تزايد النفقات المادية وانخفاض الانتاج وبالتالي الى خسائر كبيرة ، لذلك فإن قياس معولية اي مكون يكـون اساساً لتطويره ، . ونتيجة لهذا التقدم المتسارع في الصناعات والتقنيات فمن البديهي يؤدي الى ان بعض هذه الانظمة او المعدات تتعرض للإجهاد نتيجة تشغيلها بأوقات اضافية اذ تعمل فوق قدرتها الانتاجية على التشغيل ، حيث يتم تحميلها جهد اضافي اقصى من الحد الاعلى الذي يتحمله النظام او الماكنة للحصول على انتاج مضاعف في مدة محددة ، وبهذا يؤدي الى تلف النظام او الماكنة وتوقفه عن العمل ، ومن ثمَّ فلابد من قياس متانة هذه الانظمة ومدى تحملها لمقدار الجهد المسلط عليها كأن يكون هذا الجهد زيادة سرعة ، درجة حرارة ، جهد كهربائي، جهد ميكانيكي (الاحتكاك للأجزاء المتحركة) وقد تكون عوامل بيئية وغيرها . واستناداً لما تقدم من مؤشرات فإن معولية اي مركبة في نظام معين تكون وفق الصيغة $R = P(X > Y)$ وإن X متغير عشوائي يمثل المتانة وان Y متغير عشوائي يمثل الاجهاد وحسب المنطق العلمي القائل بأن النظام يعمل ويستمر بالعمل عندما المتانة تتفوق على الاجهاد ، ويفشل النظام عندما تكون متانة المادة الصناعية او المكون اقل من الاجهاد المسلط عليه . ان نظام الاجهاد والمتانة للمركبة الواحدة قد تم تطويره وتوسيعه ليشمل مركبتين او اكثر اذ ان النظام الـذي يمتـلك اكثـر من مركبـة يسمـى نظام متعـدد المركبـات ، وبفرض ان k من المركبات المستقلة والمتماثلة التوزيع (i.i.d.) وان $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ متغيرات عشوائية تمثل المتانة وكل منها تتعرض الى جهد عشوائي Y يستمر النظام بالعمل ويؤدي وظيفته المطلوبة اذا كان على الاقل s من المركبات تعمل من اصل k من المركبات ، ويعبر عنه (s out of k) وان $(1 \leq s \leq k)$ المتانة تتجاوز الجهد المسلط عليها ، وقد يكون النظام متعدد المكونات نظاماً متسلسلاً او متوزازياً وان مجموعة الانظمة المتسلسلة والمتوازية تعتبر من الحالات الخاصة لنظام متعدد المكونات عندما (s=k) و (s=1) والمذكورة على الترتيب ، ان نظام الإجهاد والمتانة متعدد المركبات له العديد من التطبيقات في مجالات الاتصالات والانظمة اللوجستية العسكرية وحقل الطب والهندسة والفيزياء وغيرها. فـعلـى سبيـــل المثـــال إن الطائـــرة

لهـا أكثــر مــن محــرك واحـد وإنه يفتــرض أنه بالنسبـــة للإقــلاع علـى الأقــل هنـــالك ($1 \leq s \leq k$) من المحركات ضروريـة للإقلاع ومثال اخر يطبق في انظمة الاتصال البحري حيث يتم تشغيل 6 اجهزة إرسال من اصل 10 اجهزة إرسال لتغطية المنطقة.

وبفرض ان $(Y, X_1, X_2, \dots, X_k)$ متغيرات عشوائية مستقلة وان معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات يعبر عنه بالصيغة الرياضية الاتية وإن اول من درس معولية النظام من قبل الباحثان (Bhattacharyya and Johnson) 1974 [4] ، حيث ان $G(y)$ تمثل دالة الكثافة التجميعية (cdf) لـ Y و $F(x)$كذلك تمثل دالة الكثافة التجميعية (cdf) $(X_1, X_2, \dots, X_k)$

$$R_{s,k} = P[at\ least\ s\ of\ the\ (X_1, X_2, \dots, X_k) exceed\ Y]$$

$$= \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_{-\infty}^{\infty} [\,1 - F(y)]^{i} [F(y)]^{k-i} dG(y) \qquad (1)$$

ولأهمية المعولية في الانظمة فقد ظهرت العديد من الدراسات التي تناولت مسألة معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات وباستخدام توزيعات احتمالية مختلفة نذكر منها . في عام 2012 قام الباحث (Rao) [13] بدراسة معـولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيـع الاسي المعمم (Generalized Exponential Distribution) واستخدم طريقة الامكان الاعظم وفترات حدود الثقة لتقدير معولية النظام ، وكذلك في عام 2013 قام الباحث (Rao) [14] باستخدام توزيع الاسي العكسي (Inverse Exponential Distribution) كأنموذج للفشل لتقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات بمعلمات قياس مختلفة ، وفي عام 2015 قام الباحثان (Kizilaslan and Nadar) [10] بحساب معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات وعلى فرض أن كل من متغير الاجهاد والمتانة العشوائين المستقليـن يتبعـان توزيع ويبل Weibull Distribution) وقد تم تقديـر المعلمـات و معولية النظام بطريقة الامكان الاعظم (MLE) وطريقة بيز باستخدام تقريب ليندلي وطريقة (MCMC) ، في عام 2018 قام الباحثان (Salman and Sail) [16] بإيجاد تقدير معولية نظام الإجهاد والمتـــانة متعـــدد المركبـات عندمـــا يكـــون متغيــرا الاجهـاد والمتانـة مستقلين ويتبعـــــان توزيـــــــع ويبـل الاســـي (Exponentiated Weibull Distribution) وتم استخدام الطرق التقليدية في التقدير والمقارنة بينهما . في عام 2019 قدم الباحث (Jamal واخرون) [8] ملخصات واستنتاجات حول ايجاد معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات على افتراض ان متغيرا الاجهاد والمتانة يتبعـــان توزيع باريتو المستقـــــل (Pareto Distribution) بمعلمـــــة شكل (α_1, α_2) ومعلمة قياس (θ) وتم استخدام الطرائق التقليدية والطرائق الغير تقليدية لتقدير معولية النظام ، وفي عام 2020 قام الباحث (Jha واخرون) [9] باستخدام بيانات مراقبة تدريجية من النوع الثاني لإيجاد تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات عندما تكون متغيرا الاجهاد والمتانة يتبعان توزيعات وحدة (Gompertz Distribution) بمعلمة قياس (μ) وتم تقدير المعلمــات ومعوليـــة النظام باستخدام طرائق التقديــر التقليدية وهي طريقـــة (الامكان الاعظم (MLE) ، والمقدر المنتظم غير المتحيز بأقل تباين (UMVE) والطرق البيزية باستعمال اسلوب الباحث ليندلي وطريقة خوارزمية (Metroplis Hasting) ، في العام نفسه ايضاً قام الباحث (Mezaal واخرون) [12] بدراسة نظـام (- s-out of

k) متعـــدد المركبـــات بفـرض ان متغيـرا الاجهـاد والمتانـة يتبـع توزيـع بواسـون الاســي المعمـم (Generalized Exponential-Poisson Distribution) بمعلمـات قيـاس معلومـة (θ و λ) ومعلمـات شكـل غير معلومـة (β و α) وتهدف الدراسة الى تقدير المعلمات المجهولة بالاضافة الى تقدير معولية النظام باستخدام طريقتين الامكان الاعظم (MLE) وطريقة بيز باستعمال خمس دوال خسارة ، وفي عام 2021 ايضاً قدم الباحثان (Hassan and Nagy) [7] دراسة تبين الاهمية الكبيرة لنظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات نظراً لإمكانية تطبيقه في العديد من المجالات ، حيث تم في هذه الدراسة تقديـر معوليـــة النظام عندما يكــون كل من متغيــرا الاجهـــاد والمتـــانة مستقـــلان ومتماثـــلان ويتبعـــــان التــوزيـــع الاســـي العكســي العـــــام (Generalized Inverted Exponential Distribution) ، وفي عام 2022 قام الباحث (Ahamd واخرون) [1] في تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات في حالة ان متغيرا الاجهاد والمتانة يتبعان توزيع (Lomax) باستخدام بيانات مراقبة تدريجية من النوع الثاني ، والتي تضمنت قياس السعة التخزينية لخزان مياه (shasta) في كاليفورنيا من خلال دراسة تجريبية وفقاً للأسلوب المحاكاة معززة بتطبيق عملي .

2- توزيع Topp-Leone

يعد توزيـع Topp-Leone احد التوزيعـات المستمـرة الـذي تـم اقتـراحـه من قبــل الباحثــان Topp and Leone (1955)[17] ، وهو توزيع بسيط على شكل حرف (J) ولقد اجتذب اليه العديد من الإحصائين كبديل لتوزيع بيتا (Beta Distribution) [3]. ويمثل التوزيع احد نماذج الفشل التي تبحث في أداء عمل الأجهزة وألمعدات ، وإزدادت اهميتـه والبحث عنه في تقديـر المعولية وذلك لبيان العمـر التشغيلي لبعض الاجهـزة والمعـدات ، تمت دراستـه من قبـل الباحثــان Nadarajah and Kotz عـام (2003) حيث درسـو دالـة الكثافـة الاحتماليـة للتوزيـع [6] ، وفي ما يلي نبين دالة الكثافة الاحتمالية ودالة الكثافة التجميعية لتوزيع Topp- Leone .

$$f(x;\alpha) = 2\alpha\,(1-x)[x(2-x)]^{\alpha-1} \qquad ;\ 0 < x < 1\ ,0\ < \alpha < \infty \qquad (2)$$

$$\mathrm{F}(x) = [x(2-x)]^{\alpha} \qquad ;0 <\ x < 1\,,0 < \alpha < \infty \qquad (3)$$

وبفرض ان لدينا متغيرين X□TL (α_1) و Y□TL (α_2) حيث ان α_1 تمثل معلمة متغير المتانة وان α_2 تمثل معلمة متغير الاجهاد ، وبافتراض انهما متغيرات عشوائية مستقلة ومتماثلة (i.i.d) وكل منهما يتبع توزيع Topp-Leone وبالتعويض في المعادلة (1) نحصل على :

$$R_{s,k} = \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_0^1 [\,1-\left(y(2-y)\right)^{\alpha 1}]^{i} [\left(y(2-y)\right)^{\alpha 1}]^{k-i}\ 2\alpha_2(1-y)\ \left(y(2-y)\right)^{\alpha 2-1}\ dy \qquad (4)$$

وبفرض ان

$$t = \left(y(2-y)\right)^{\alpha 1}$$

$$dt = [-\alpha 1 \;\; y^{\alpha 1} \; (2-y)^{\alpha 1 - 1}] + [\alpha 1 \;\; y^{\alpha 1 - 1} \; (2-y)^{\alpha 1}] \; dy$$

$$= \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \int_0^1 (1-t)^i \; t^{k-i} \;\; \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \;\; \left(t^{\frac{1}{\alpha 1}}\right)^{\alpha 2} \; (t)^{-1} \; dt$$

وبفرض ان $\rho = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$

$$= \rho \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \; \int_0^1 t^{k-i+\rho-1} \; (1-t)^i dt$$

$$R_{s,k} \; = \rho \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \;\; \mathcal{B} \;\; (k-i+\rho \,, i+1 \;) \qquad (5)$$

$$R_{s,k} \; = \rho \sum_{i=s}^{k} \binom{k}{i} \frac{\Gamma(k-i+\rho)\Gamma(i+1)}{\Gamma(k+\rho+1)}$$

$$R_{s,k} \; = \; \rho \sum_{i=s}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} \left[\prod_{j=0}^{i} (k+\rho-j) \right]^{-1} \qquad (6)$$

3 - طرائق تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone

نستعرض في هذا الجزء من البحث طرائق تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات عندما تتبع متغيرا الاجهاد والمتانة توزيع Topp-Leone ، اذ يتم التقدير بالطرائق التقليدية وهي طريقة الامكان الاعظم وطريقة الوسيط والطرائق البيزية باستعمال دالة خسارة تربيعية وبسبب التعقيد في حل التكاملات تم اعتماد اسلوب الباحث Lindley (Approximation) لتقدير دالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة وبالاعتماد على دالة التوزيع الاولي (Weibull Distribution) وباختيار ثلاثة حالات لمركبات النظام عندما (s=1,k=3)(s=2,k=3)(s=1,k=4) وفيما يأتي عرض لهذه الطرائق :

3- 1 طريقة الامكان الاعظم Maximum Likelihood Method

تعتبر طريقـة الإمكان الأعظـم أحدى طرائق التقديـر المهمة والأكثـر شيوعـاً وتقـوم هـذه الطريقة على افتراض المعلمة المـراد تقديرهـا كمية ثابتة . وتم تقديمهـا من قبل الباحث (R.A.Fisher) عام 1912، وتمتاز بخاصيـة مهمة وهي خاصيـة الثبات (Invariance Property) وبالتالي فان تقديرات دالـة المعولية تكـون (Exact) اما بقية طرائـق التقديـر الأخرى فان تقديـراتها تكون تقريبية ، ويمكن تعريفها على انها قيم المعلمات التي تجعــل لوغارتيـم دالـة الامكـان في نهايتها العظمـى [15].

بفرض ان العينة العشوائية بالحجم n لمتغير المتانة $(x_1, x_2, \dots, x_n)$والذي يتبع توزيع Topp-Leone بالمعلمة (α_1) وبفرض ان العينة العشوائية بالحجم m لمتغير الاجهاد $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ والذي يتبع توزيع Topp-Leone بالمعلمة (α_2) ، فإن دالة الامكان الاعظم للعينات العشوائية للتوزيع المشترك لمتغيرين الاجهاد والمتانة تكون كالاتي [2] :

$$\mathrm{L} = (x, y \mid \alpha_1, \alpha_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha_1) \prod_{j=1}^{m} f(y_j, \alpha_2) . \quad (7)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} 2\alpha_1 (1 - x_i)[x_i(2 - x_i)]^{\alpha_1 - 1} \prod_{j=1}^{m} 2\alpha_2 (1 - y_j)[y_j(2 - y_j)]^{\alpha_2 - 1} .$$

$$2^{n+m}\alpha_1^n \alpha_2^m \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i)[x_i(2 - x_i)]^{\alpha_1 - 1} \prod_{j=1}^{m} (1 - y_j)[y_j(2 - y_j)]^{\alpha_2 - 1} . \quad (8)$$

بأخذ اللوغارتيم الطبيعي لطرفي المعادلة اعلاه نحصل على :

$$\ln \mathrm{L} = (n + m)\ln 2 + \mathrm{n}\ln \alpha_1 + \mathrm{m}\ln \alpha_2 + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 - x_i) + (\alpha_1 - 1) \sum_{i=1}^{n} \ln\big(x_i(2 - x_i)\big)$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \ln(1 - y_j) + (\alpha_2 - 1) \sum_{j=1}^{m} \ln\big(y_j(2 - y_j)\big) . \quad (9)$$

ومن ثمَّ فإنَّ مقدر الإمكان الاعظم للمعلمتين α_2 و α_1 هو على الترتيب الاتي :

$$\hat{\alpha}_{1mle} = -\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} ln\left(x_i(2 - x_i)\right)} \quad (10)$$

$$\hat{\alpha}_{2mle} = -\frac{m}{\sum_{j=1}^{m} ln\left(y_j(2 - y_j)\right)} \quad (11)$$

وبتعويض $\hat{\alpha}_{2mle}$, $\hat{\alpha}_{1mle}$ في المعادلة رقم (6) نحصل على تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone بطريقة الامكان الاعظم وكالاتي :

$$\hat{R}_{(s,k)MLE} = \frac{\hat{\alpha}_{2\,MLE}}{\hat{\alpha}_{1\,MLE}} \sum_{i=s}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} \left[\prod_{j=0}^{i} \left(k + \frac{\hat{\alpha}_{2\,MLE}}{\hat{\alpha}_{1\,MLE}} - j \right) \right]^{-1} \quad (12)$$

2-3 طريقة الوسيط Median Method

تتميز طريقة الوسيط ببساطتها وسهولة تقديرها ، حيث يعرف الوسيط بأنه قيمة من قيم المتغير العشوائي Z الذي تقسم المساحة تحت منحني الدالـة f(z) الى قسمين متساويين .اذ ان f(z) تمثل دالة كثافة إحتمالية.

وبفرض M تمثل الوسيط . وان Ω تمثل مجموعة الاعداد الحقيقية ، فإن M تمثل قيمة من قيم Z التي تحقق المعادلة التكاملية التالية :

$$\int_{-\infty}^{M} f(z)dz = \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$\int_{-\infty}^{M} f(z)dz = pr(z \leq M) = F(M)$$

واذا فرضنا ان $(x_1, x_2, \dots, x_n)$تمثل عينة عشوائية بالحجم n لمتغير المتانة والذي يتبع توزيع Topp-Leone بالمعلمة (α_1) وبالرجوع للمعادلة رقم (3) نحصل على :

$$F(x_{med}) = \frac{1}{2}$$

$$[x(2-x)]^{\alpha_1} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_1 ln[x(2-x)] = \ln 0.5$$

$$\hat{\alpha}_{1med} = \frac{\ln 0.5}{ln[x(2-x)]} \quad (14)$$

وبنفس الاسلوب نقدر المعلمة (α_2) بفرض ان $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ تمثل عينة عشوائية لمتغير الاجهاد بالحجم m والذي يتبع توزيع Topp-Leone وبالرجوع للمعادلة رقم (3) نحصل على :

$$F(y_{med}) = \frac{1}{2}$$

$$[y(2-y)]^{\alpha_2} = \frac{1}{2}$$

$$\alpha_2 ln[y(2-y)] = \ln 0.5$$

$$\hat{\alpha}_{2med} = \frac{\ln 0.5}{ln[y(2-y)]} \qquad (15)$$

وبتعويض المعادلة (14) و(15) في المعادلة رقم (6) نحصل على مقدر دالة معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات بطريقة الوسيط وكما ياتي :

$$\hat{R}_{(s,k)med} \cong \frac{\hat{\alpha}_{2\,Med}}{\hat{\alpha}_{1\,Med}} \sum_{i=s}^{k} \frac{k!}{(k-i)!} \left[\prod_{j=0}^{i} (k+\hat{\rho}-j)\right]^{-1} \qquad (16)$$

3-3 اسلوب بيز بالتقدير

يعتمد اسلوب بيز بالتقدير بشكل عام على استخدام معلومات مسبقة حول المعلمات المجهولة $(\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ المراد تقديرها . وذلك باعتبار ان المعلمات متغيرات عشوائية وليست كميات ثابتة ، ويضاف على تلك المعلومات المسبقة معلومات العينة المشاهدة [5] . اذ تمثل تلك المعلومات على شكل دالة احتمالية اولية (prior probability function) ويمكن ان تعرف بانها الدالة التي تمثل كل المعلومات والخبرات حول المعلمات المطلوب تقديرها والتي تم الوصول اليها مسبقاً من خلال التحليل او المراقبة لتلك المعلمات[18] .

اذ إن مقدر بيز لأي معلمة يعتمد على دالتين الاولى تعرف بدالة الكثافة الاحتمالية اللاحقة (posterior probability distribution) والثانية دالة الخسارة (Loss Function) .

وبفرض في هذا الجزء ان المعلمات (α_1, α_2) متغيرات عشوائية مستقلة احصائياً وان التوزيع الاولي لكل معلمة هو توزيع ويبل $(Weibull)(c_1, d_1)$ و $(Weibull)(c_2, d_2)$ والمذكورة على الترتيب.

$$\pi(\alpha_1) = \frac{c_1}{d_1}\, \alpha_1^{c_1-1} e^{-\frac{\alpha_1^{c_1}}{d_1}} \qquad (17)$$

$$\pi(\alpha_2) = \frac{c_2}{d_2}\, \alpha_2^{c_2-1} e^{-\frac{\alpha_2^{c_2}}{d_2}} \qquad (18)$$

وبذلك فان التوزيع الاولي المشترك (Joint Prior) للمعلمتين (α_1, α_2) يكون كالاتي :

$$\pi(\alpha_1,\alpha_2) = \pi(\alpha_1)\pi(\alpha_2) = \frac{c_1}{d_1}\, \alpha_1^{c_1-1} e^{-\frac{\alpha_1^{c_1}}{d_1}} \;\; \frac{c_2}{d_2}\, \alpha_2^{c_2-1} e^{-\frac{\alpha_2^{c_2}}{d_2}} \tag{19}$$

حيث ان (c_1,d_1) و (c_2,d_2) قيم معروفة وموجبة ، وباستعمال قاعدة بيز العكسية بدمج دالة الامكان في المعادلة (7) مع دالة التوزيع الاولي المشترك المعادلة (19) فأن التوزيع المشترك اللاحق (joint posterior distribution) للمعلمتين المقدرتين α_1 و α_2 يكون كالاتي :

$$\pi^*(\alpha_1,\alpha_2|x,y) = \frac{\mathrm{L}(x,y|\alpha_1,\alpha_2)\,\pi(\alpha_1,\alpha_2)}{\iint \mathrm{L}(x,y|\alpha_1,\alpha_2)\,\pi(\alpha_1,\alpha_2)d\alpha_1 d\alpha_2} \propto \alpha_1^{n+a_1-1} \alpha_2^{m+a_2-1} e^{-b_1\alpha_1} e^{-b_2\alpha_2}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\big(x_i(2-x_i)\big)^{\alpha_1-1} \prod_{j=1}^{m}(1-y_j)\Big(y_j(2-y_j)\Big)^{\alpha_2-1} . \tag{20}$$

عليه فإن مقدر بيز لمعولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone في ضل وجود دالة دالة خسارة تربيعية يكون حسب الصيغة الاتية :

$$\hat{R}_{s,k,B} = \int_0^\infty \int_0^\infty R_{s,k}\;\pi^*(\alpha_1,\alpha_2|x,y)\;d\alpha_1 d\alpha_2 . \tag{21}$$

من المعادلة اعلاه (21) نلاحظ ان هنالك صعوبة من اجراء التكاملات ولابد من استعمال اسلوب تقريبي عددي لحساب هذه التكاملات المعقدة وهو تقريب ليندلي (Lindley Approximation) للايجاد مقدر بيز والمبينة تفاصيل الطريقة كما يلي :

اقترحت هذه الطريقة من قبل الباحث (D.V Lindley ،1980) وتتضمن ايجاد صيغة تقريبية لحساب نسبة التكاملات لمقدر بيز [11] .

$$[u(\alpha)] = \frac{\int u(\alpha)\, e^{L(\alpha)+v(\alpha)} d\alpha}{\int e^{l(\alpha)+v(\alpha)} d\alpha} \tag{22}$$

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{u}(\alpha)\big) = \left[u(\hat{\alpha}) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j (u_{ij} + 2u_i v_j)\sigma_{ij} + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l L_{IJK}\sigma_{ij}\sigma_{kl}u_l\right] \tag{23}$$

اذ ان :

$u(\alpha)$: دالة اختيارية للمعلمة α.

$\hat{\alpha}$: مقدر الامكان الاعظم للمعلمة α .

$L(\alpha)$: اللوغارتيم الطبيعي لدالة الامكان .

$v(\alpha)$: اللوغارتيم الطبيعي لدالة التوزيع الاولي للمعلمة α.

σ_{ij}: تمثل مصفوفة معلومات فشر عندما i,j=1,2

وكذلك فإن

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_P)\,, \quad i, j, k, l = 1,2 \qquad , v = \ln \pi(\alpha) \quad , u = u(\alpha_i)$$

$$ui = \frac{\partial u}{\partial \alpha_i} \qquad , uij = \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha_{ij}} \qquad , L_{ijk} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \alpha_i \, \partial \alpha_j \, \partial \alpha_k} \qquad , v_j = \frac{\partial v}{\partial \alpha_j}$$

$$v_1 = \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} = \frac{(c_1 - 1)}{\alpha_1} - \frac{c_1 \alpha_1^{c_1 - 1}}{d_1} \quad , \quad v_2 = \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} = \frac{(c_2 - 1)}{\alpha_2} - \frac{c_2 \alpha_2^{c_2 - 1}}{d_2}$$

$$L_{111} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \alpha_1^3} = \frac{2n}{\alpha_1^3} \quad , \quad L_{222} = \frac{\partial^3 \ln L}{\partial \alpha_2^3} = \frac{2m}{\alpha_2^3}$$

$$L_{112} = L_{121} = L_{122} = L_{221} = L_{212} = L_{211} = 0$$

$$\sigma_{11} = \frac{\alpha_1^2}{n} \;, \sigma_{22} = \frac{\alpha_2^2}{m} \;, \sigma_{12} = \sigma_{21} = 0$$

وللحصول على تقدير معولية $R_{s,k}$ نظام الإجهاد والمتانة متعدد المركبات عندما يتبع كل من متغيرا الإجهاد والمتانة توزيع Topp-Leone وبالاعتماد على طريقة بيز القياسية في ضل وجود دالة خسارة تربيعية والتوزيع الأولي المشترك (Weibull Distribution) ، وحسب اسلوب الباحث Lindley وبالتعويض بالصيغة (23) نحصل على الاتي :

$$\boldsymbol{\hat{R}_{s,k,L} = \hat{R}_{s,k} + \frac{1}{2}\left[\left(\hat{R}_{11} + 2\hat{R}_1\hat{v}_1\right)\sigma_{11} + \left(\hat{R}_{22} + 2\hat{R}_2\hat{v}_2\right)\sigma_{22}\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\hat{L}_{111}\sigma_{11}^2\hat{R}_1 + \hat{L}_{222}\sigma_{22}^2\hat{R}_2\right)\right]} \tag{24}$$

اذ إن :

$$R_i = \frac{\partial R_{s,k}}{\partial \alpha_i} \quad , \quad R_{ii} = \frac{\partial^2 R_{s,k}}{\partial \alpha_i^2} \quad , i = 1,2$$

فضلاً عن إن v_i، L_{111}، L_{222}، σ_{11} ، σ_{22} تم تعريفهم واشتقاقهم حسب الصيغ التي ذكرت اعلاه ، وإن المشتقة الاولى والمشتقة الثانية $R_{s,k}$ عندما (s=1,k=4)(s=2,k=3)(s=1,k=3) مبينة في ادناه :

$$R_1 = \frac{\partial R_{1,3}}{\partial \alpha_1} = \frac{3\alpha_2}{(3\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 R_{1,3}}{\partial {\alpha^2}_1} = \frac{-18\alpha_2}{(3\alpha_1 + \alpha_2)^3}$$

$$R_2 = \frac{\partial R_{1,3}}{\partial \alpha_2} = \frac{-3\alpha_1}{(3\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$R_{22} = \frac{\partial^2 R_{1,3}}{\partial \alpha_2^2} = \frac{3\alpha_1[2(3\alpha_1 + \alpha_2)]}{(3\alpha_1 + \alpha_2)^4} = \frac{6\alpha_1}{(3\alpha_1 + \alpha_2)^3}$$

$$R_1 = \frac{\partial R_{2,3}}{\partial \alpha_1} = \frac{(12\alpha_1\alpha_2^2 + 30\alpha_1^2\alpha_2)}{[(3\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)]^2}$$

$$R_2 = \frac{\partial R_{2,3}}{\partial \alpha_2} = \frac{(-30\alpha_1^3 - 12\alpha_1^2\alpha_2)}{[(3\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)]^2}$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 R_{2,3}}{\partial \alpha_1^2} = \frac{12\alpha_2^2 + 60\alpha_1\alpha_2 - 588\alpha_1^2\alpha_2^2 - 120\alpha_1\alpha_2^3 - 720\alpha_1^3\alpha_2}{[(3\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)]^3}$$

$$R_{22} = \frac{\partial^2 R_{2,3}}{\partial \alpha_2^2} = \frac{6\alpha_1^2(38\alpha_1^2 + 30\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_2^2)}{[(3\alpha_1 + \alpha_2)(2\alpha_1 + \alpha_2)]^3}$$

$$R_1 = \frac{\partial R_{1,4}}{\partial \alpha_1} = \frac{(36\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_2^3 + 24\alpha_1\alpha_2^2)}{[(4\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + \alpha_2)]^2}$$

$$R_2 = \frac{\partial R_{1,4}}{\partial \alpha_2} = \frac{(-36\alpha_1^3 - 24\alpha_1^2\alpha_2 - 4\alpha_1\alpha_2^2)}{[(4\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + \alpha_2)]^2}$$

$$R_{11} = \frac{\partial^2 R_{1,4}}{\partial \alpha_1^2} = \frac{-864\alpha_1^3\alpha_2 - 288\alpha_1\alpha_2^3 - 864\alpha_1^2\alpha_2^2 - 32\alpha_2^4}{[(4\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + \alpha_2)]^3}$$

$$R_{22} = \frac{\partial^2 R_{1,4}}{\partial \alpha_2^2} = \frac{8\alpha_1(27\alpha_1^3 + 27\alpha_1^2\alpha_2 + 9\alpha_1\alpha_2^2 + \alpha_2^3)}{[(4\alpha_1 + \alpha_2)(3\alpha_1 + \alpha_2)]^3}$$

4- الجانب التجريبي Simulation

في هذا الجزء نبين نتائج المحاكاة لتقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات عندما تتبع متغيرا الاجهاد والمتانة توزيع Topp-Leone والمقارنة بين الطرائق المستخدمة حيث تمت المقارنة بين طريقة الامكان الاعظم وطريقة الوسيط وطريقة بيز باستخدام احجام عينات مختلفة ، ومن خلال توظيف اسلوب المحاكاة بالاعتماد على المقياس الاحصائي متوسط مربعات الخطأ (MSE) كأساس للمقارنة والذي يأخذ الصيغة التالية :-

$$MSE\left(\hat{R}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{L}\left(\hat{R} - R\right)^2}{L}$$

وبحجم مكرر **(*L=1000*)** وبالاعتماد على البرنامج الاحصائي لغة (*R*) فإن جدول (1)(2)(3) يبين نتائج البحث .

جدول رقم (1) يبين القيمة الحقيقة والتقديرية ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone عندما (s=1 ,k=3) ، $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.5$

(n,m)	**R**	$\widehat{R}$			MSE			
		$\widehat{R}_{mle}$	$\widehat{R}_{med}$	$\widehat{R}_{B.L}$	MSE_{mle}	MSE_{med}	$MSE_{B.L}$	**Best**
(20,20)	0.84375	0.8403	0.8376	0.8320	1.6965E-03	3.3697E-03	1.3900E-04	Bayes
(20,50)		0.8450	0.8406	0.8435	1.1646E-03	2.5194E-03	5.2072E-08	Bayes
(20,80)		0.8412	0.8380	0.8404	1.1148E-03	2.0597E-03	1.1257E-05	Bayes
(20,110)		0.8439	0.8406	0.8432	1.0748E-03	2.1126E-03	2.5247E-07	Bayes
(50,20)		0.8386	0.8350	0.8149	1.3550E-03	2.6139E-03	8.3078E-04	Bayes
(50,50)		0.8416	0.8394	0.8386	7.1413E-04	1.4787E-03	2.6467E-05	Bayes
(50,80)		0.8427	0.8394	0.8413	6.1115E-04	1.3159E-03	5.9829E-06	Bayes
(50,110)		0.8428	0.8425	0.8418	5.2182E-04	1.0179E-03	3.9971E-06	Bayes
(80,20)		0.8385	0.8354	0.7996	1.2509E-03	2.6985E-03	1.9520E-03	Bayes

(80,50)		0.8426	0.8419	0.8379	5.7434E-04	1.1632E-03	3.3767E-05	Bayes
(80,80)		0.8435	0.8426	0.8416	4.4825E-04	8.8408E-04	4.4984E-06	Bayes
(80.110)		0.8439	0.8428	0.8428	3.5073E-04	7.4504E-04	8.8088E-07	Bayes
(110,20)		0.8381	0.8369	0.7846	1.1452E-03	2.5178E-03	3.5020E-03	Bayes
(110,50)		0.8417	0.8404	0.8353	5.1515E-04	1.1194E-03	7.1579E-05	Bayes
(110,80)		0.8427	0.8419	0.8403	4.0042E-04	8.1418E-04	1.2119E-05	Bayes
(110,110)		0.8446	0.8444	0.8433	3.1356E-04	6.8850E-04	2.0918E-07	Bayes

جدول رقم (2) يبين القيمة الحقيقة والتقديرية ومتوسط مربعات الخطأ (MSE) لمعولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone عندما (s=2 ,k=3) ، $\alpha_1 = 0.9 , \alpha_2 = 0.5$

(n,m)	R	$\hat{R}$			MSE			
		$\hat{R}_{mle}$	$\hat{R}_{med}$	$\hat{R}_{B.L}$	MSE_{mle}	MSE_{med}	$MSE_{B.L}$	Best
(20,20)		0.6582	0.6555	0.6474	3.1521E-03	5.7708E-03	1.6783E-04	Bayes
(20,50)		0.6601	0.6588	0.6556	1.2632E-	2.8081E-	2.2619E-	Bayes

					03	03	05	
(20,80)		0.6599	0.6591	0.6570	8.7407E-04	1.7247E-03	1.0863E-05	Bayes
(20,110)	0.6603	0.6585	0.6585	0.6564	6.4442E-04	1.4345E-03	1.5479E-05	Bayes
(50,20)		0.6575	0.6543	0.6468	2.9534E-03	6.2000E-03	1.8288E-04	Bayes
(50,50)		0.6584	0.6571	0.6538	1.2851E-03	2.6668E-03	4.2226E-05	Bayes
(50,80)		0.6595	0.6574	0.6566	8.1373E-04	1.6542E-03	1.3741E-05	Bayes
(50,110)		0.6592	0.6585	0.6571	6.4156E-04	1.3442E-03	1.0524E-05	Bayes
(80,20)		0.6571	0.6559	0.6464	2.8389E-03	5.5278E-03	1.9456E-04	Bayes
(80,50)		0.6573	0.6563	0.6528	1.3332E-03	2.7701E-03	5.6925E-05	Bayes
(80,80)		0.6592	0.6594	0.6567	9.2201E-04	1.8901E-03	1.3472E-05	Bayes
(80.110)		0.6575	0.6570	0.6554	6.2657E-04	1.3077E-03	2.4631E-05	Bayes
(110,20)		0.6547	0.6531	0.6441	2.9985E-03	6.2295E-03	2.6420E-04	Bayes
(110,50)		0.6587	0.6558	0.6542	1.2410E-	2.7437E-	3.7730E-	Bayes

					03	03	05	
(110,80)		0.6603	0.6592	0.6574	7.9769E-04	1.7576E-03	8.4051E-06	Bayes
(110,110)		0.6595	0.6589	0.6571	6.3020E-04	1.2597E-03	1.0701E-05	Bayes

جدول رقم (3) يبين القيمة الحقيقة والتقديرية ومتوسط مربعات الخطأ لمعولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات

لتوزيع Topp-Leone **عندما** (s=1 ,k=4) ، $\alpha_1 = 0.9 , \alpha_2 = 0.5$

(n,m)	R	$\widehat{R}$			MSE			
		$\widehat{R}_{mle}$	$\widehat{R}_{med}$	$\widehat{R}_{B.L}$	MSE_{mle}	MSE_{med}	$MSE_{B.L}$	Best
(20,20)	0.8780	0.8732	0.8690	0.8654	1.2958E-03	2.6281E-03	1.5937E-04	Bayes
(20,50)		0.8757	0.8723	0.8745	8.8092E-04	1.8453E-03	1.2356E-05	Bayes
(20,80)		0.8772	0.8736	0.8762	6.8405E-04	1.3520E-03	3.4662E-06	Bayes
(20,110)		0.8786	0.8760	0.8779	7.0519E-04	1.4099E-03	1.3030E-07	Bayes
(50,20)		0.8708	0.8684	0.8504	1.0657E-03	2.1532E-03	7.6235E-04	Bayes

(50,50)		0.8772	0.8755	0.8746	4.9449E-04	9.8681E-04	1.2152E-05	Bayes
(50,80)		0.8776	0.8778	0.8763	3.6396E-04	7.4859E-04	2.9683E-06	Bayes
(50,110)		0.8771	0.8759	0.8762	3.2963E-04	6.9735E-04	3.4903E-06	Bayes
(80,20)		0.8743	0.8731	0.8415	8.4630E-04	1.6785E-03	1.3325E-03	Bayes
(80,50)		0.8749	0.8736	0.8710	4.0104E-04	8.2549E-04	4.9977E-05	Bayes
(80,80)		0.8764	0.8760	0.8748	3.2336E-04	6.4186E-04	1.0781E-05	Bayes
(80.110)		0.8763	0.8755	0.8753	2.5795E-04	5.5619E-04	7.6887E-06	Bayes
(110,20)		0.8732	0.8707	0.8291	7.9711E-04	1.6693E-03	2.3953E-03	Bayes
(110,50)		0.8765	0.8751	0.8712	3.2719E-04	6.9048E-04	4.6833E-05	Bayes
(110,80)		0.8769	0.8760	0.8749	2.4426E-04	5.3474E-04	9.8080E-06	Bayes
(110,110)		0.8777	0.8771	0.8765	2.2204E-04	4.2832E-04	2.3228E-06	Bayes

1-4 مناقشة تجارب المحاكاة

اظهرت نتائج المحاكاة ومن خلال الجداول (1)(2)(3) والتي تمثل القيمة الحقيقة والقيمة التقديريـة ومتوسط مربعات الخطأ MSE لمعوليـة نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبـات لتوزيع Topp-Leone ، وعند استعمال القيم الافتراضية للمعلمات $(\alpha_1 = 0.9، \alpha_2 = 0.5)$ ، والقيـم الافتـراضيــة لمعلمــة الشكــل والقيــاس للتوزيـع الأولـي (Weibull Distribution) $(c_1,d_1)=(1,1.5),(c_2,d_2)=(1,1,5)$ ، تقارباً كبيراً بين القيمة الحقيقة والقيم التقديرية لمعولية النظام $R_{s,k}$ ولجميع الطرائق المستخدمة بزيادة حجم العينة وخاصة طريقة الامكان الاعظم وطريقة بيز، واظهرت نتائج المحاكاة افضلية طريقة بيز بشكل عام وللتجارب كلها يليه طريقة الامكان الاعظم (MLE) ومن ثم طريقة الوسيط (Med) وإن قيم MSE يتناقص بزيادة حجم العينة و للطرائق المستخدمة جميعها ولتجارب المحاكاة كافتها.

5- الاستنتاجات Conclusion

في هذا البحث تم تقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone باستخدام طريقة الامكان الاعظم وطريقة الوسيط وطريقة بيز حسب اسلوب ليندلي المقرب ، ومن خلال توظيف اسلوب المحاكاة وباستخدام احجام عينات مختلفة حيث اظهرت النتائج وبالاعتماد على المؤشر الاحصائي (MSE) الاتي :

1. بشكل عام تبين ومن خلال تنفيذ تجارب المحاكاة افضلية طريقة بيز باستعمال دالة التوزيع الاولي (Weibull Distribution) مقارنة بالطرائق التقدير الاخرى لتقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone .
2. ان نتائج طريقة الامكان الاعظم (MLE) جاءت بالمرتبة الثانية من حيث الافضلية بالنسبة لطرائق التقدير التقليدية ولجميع تجارب المحاكاة ، لتقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone .
3. اظهرت نتائج المحاكاة بأن طريقة الوسيط جاءت بالمرتبة الاخيرة من حيث الافضلية لتقدير معولية نظام الاجهاد والمتانة متعدد المركبات لتوزيع Topp-Leone كونها حققت اعلى MSE ولتجارب المحاكاة جميعها مقارنة بالطرائق التقدير الاخرى .

المصادر References

1. Ahmad, H. H., Almetwally, E. M., & Ramadan, D. A. (2022). A comparative inference on reliability estimation for a multi-component stress-strength model under power Lomax distribution with applications. *AIMS Math*, *7*, 18050-18079.

2. Akgül, F. G. (2019). Reliability estimation in multicomponent stress–strength model for Topp-Leone distribution. Journal of Statistical Computation and Simulation, 89(15), 2914-2929.

3. Al-Shomrani, A., Arif, O., Shawky, A., Hanif, S., & Shahbaz, M. Q. (2016). Topp–Leone family of distributions: Some properties and application. *Pakistan Journal of Statistics and Operation Research*, 443-451.

4. Bhattacharyya, G. K., & Johnson, R. A. (1974). Estimation of reliability in a multicomponent stress-strength model. *Journal of the American Statistical Association*, *69*(348), 966-970.

5. Bolstad, W. M., & Curran, J. M. (2016). Introduction to Bayesian statistics. John Wiley & Sons.

6. Ghitany, M. E., Kotz, S., & Xie, M. (2005). On some reliability measures and their stochastic orderings for the Topp–Leone distribution. *Journal of Applied Statistics*, *32*(7), 715-722.

7. HASSAN، A., & NAGY, H.(2021) . Reliability Estimation in Multicomponent Stress-Strength for Generalized Inverted Exponential Distribution Based on Ranked Set Sampling. *Gazi University Journal of Science*, 1-1.

8. Jamal, Q. A., Arshad, M., & Khandelwal, N. (2019). Multicomponent stress strength reliability estimation for Pareto distribution based on upper record values. arXiv preprint arXiv:1909.13286.

9. Jha, M. K., Dey, S., Alotaibi, R. M., & Tripathi, Y. M. (2020). Reliability estimation of a multicomponent stress-strength model for unit Gompertz distribution under progressive Type II censoring. Quality and Reliability Engineering International, 36(3), 965-987.

10. Kizilaslan, F., & Nadar, M. (2015). Classical and bayesian estimation of reliability in multicomponent stress-strength model based on weibull distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, *38*(2), 467-484.

11. Lindley, D. V. (1980). Approximate bayesian methods. Trabajos de estadística y de investigación operativa, 31(1), 223-245.

12. Mezaal, A. R., Mansour, A. I., & Karm, N. S. (2020, July). Multicomponent stress-strength system reliability estimation for generalized exponential-poison distribution. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1591, No. 1, p. 012042). IOP Publishing.

13. Rao, G. S. (2012). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on generalized exponential distribution. *Revista Colombiana de Estadística*, 35(1), 67-76.

14. Rao, G. S. (2013). Estimation of reliability in multicomponent stress-strength based on inverse exponential distribution. *International Journal of Statistics and Economics*, 10(1), 28-37.

15. Rossi, R. J. (2018). Mathematical statistics: an introduction to likelihood-based inference. John Wiley & Sons.

16. Salman, A. N., & Sail, F. H. (2018). Different Estimation Methods for System Reliability Multi-Components model: Exponentiated Weibull Distribution. *Ibn AL-Haitham Journal For Pure and Applied Science*, 363-377.

17. Topp, C. W., & Leone, F. C. (1955). A family of J-shaped frequency functions. Journal of the American Statistical Association, 50(269), 209-219.

18. Yousif, A. H. (2020). PROPOSED BAYESIAN ESTIMATORS OF THE SCALE PARAMETER IN NAKAGAMI DISTRIBUTION. Pak. J. Statist, 36(4), 355-362.