Journal of Education and Science (ISSN 1812-125X), Vol: 29, No: 2, 2020 (9-25)

Some Theorems and Results on Solution of Kind of Volterra Integral Equations

Muayyad Mahmood Khalil

Department of Mathematics, College of Education for Pure Sciences, Tikrit University, Tikrit, Iraq

Email: medomath80@tu.edu.iq

(Received September 22, 2018; Accepted April 10, 2019; Available online June 01, 2020)

DOI: 10.33899/edusj.2020.165298,

Abstract

We studied in this work a class of nonlinear Volterra integral equations with delay and present a sufficient condition for the bounded solution also we give an illustrative example which support the main result of this paper.

Keywords: Volterra, Time Delay, Integral Equation, Bounded Solution.

بعض المبرهنات والنتائج حول حل صنف من معادلات فولتيرا التكاملية

مؤيد محمود خليل

جامعة تكريت، كلية التربية للعلوم الصرفة، قسم الرياضيات

الخلاصة

لقد درسنا في هذا البحث صنف معين من معادلات فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع المتباطئ وقدمنا الشرط الكافي ليكون الحل مقيداً واعطينا كذلك مثال توضيحي يدعم النتيجة الرئيسة للبحث.

كلمات مفتاحية: فولتيرا، التأخير الزمني، معادلة تكاملية، حل مقيد.

مقدمة

إن معادلات فولتيرا التكاملية تضم أنواعاً كثيرة من الأنظمة الديناميكية وكمثال على ذلك المعادلات التفاضلية المتباطئة مع تباطؤ منته أو غير مقيد. لذلك فالعديد من النماذج التي ظهرت في الهندسة والتطبيقات العلمية الأخرى تكون مناسبة تماماً لهذه الفئة العامة من المعادلات وقد اهتممنا في بحثنا هذا بالصفات النوعية الأساسية لمعادلات فولتيرا التكاملية المتباطئة غير الخطية ومن هذه الصفات تقييد الحلول ويعتبر تقييد الحلول سؤالاً مهماً من كلا الناحيتين النظرية والتطبيقية بجانب

حقيقة التقييد لذا فمن المهم ايضاً في تلك التطبيقات الحصول على قيد أعلى جيد للحل. لقد درس الباحثون والمؤلفون المعادلات التفاضلية والتكاملية المتباطئة أو ذات التأخير الزمني المتكرر كنماذج رياضية في العلوم الطبيعية والاقتصاد والهندسة، وتم استخدام تلك النماذج لوصف انتشار وظواهر النقل وتقييد واستقرارية الحلول للمعادلات التكاملية[18][17][16][12][11][10][9][7][6][5][4][3][2]. إضافة الى تلك الدراسات والمؤلفات فقد درس Vecchio [1] معادلات فولتيرا التكاملية من النوع

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t,s)\, y(s) ds, t \in [0,T]$$

حيث $y, g \in R^d, k(t,s) \in R^{d\times d}$ وبرهن بعض النتائج حول تقييد الخطأ للطرق العددية لمعادلات فولتيرا التكاملية الخطية معتبراً أن أنويتها من النوع غير الملتف. ودرس Appleby وجماعته [8] التغير التام في انحلال الحل لمعادلة فولتيرا التكاملية من الصيغة

$$R(t) = F(t) + \int_0^t H(t-s)\, R(s) ds$$

حيث أعطى تقديرات لنسبة انحلال الحل في الفضاءات القابلة للتكامل. وفي [14] تمت دراسة تقييد الحلول للنظام

$$x'(t) = f(t, x(t) \dots \dots \dots (*)$$

حيث $f: [0,\infty) \times R^n \to R^n$ دالة مستمرة اذ فرض أنه اذا كانت هناك دوال مستمرة مثل

$$V: [0,\infty) \times R^n \to [0,\infty), \quad a: [0,\infty) \to [0,\infty) \quad , b: [0,\infty) \to [0,\infty)$$

وإن V تحقق شرط لبشتز محلياً في x وأن

$$a(|x|) \le V(t,x) \le b(|x|)$$

حيث $a(r) \to \infty$ عندما $r \to \infty$. إذا وجد $U > 0$ بحيث $V'_{(*)}(t,x) \le 0$ لقيم $|x| \ge U$ فأن حلول النظام $(*)$ تكون مقيدة بصورة منتظمة وإذا كانت $V'_{(*)}(t,x) \le -\gamma < 0$ لقيم $|x| \ge U$ فأن حلول النظام $(*)$ تكون مقيدة بصورة منتظمة لأقصى درجة. أما في [13] فقد تمت دراسة المعادلة التكاملية من الصيغة

$$u^p(t) = L(t) + \int_o^t P(t-s)\, u(s) ds, t \ge 0, p \ge 1$$

حيث $P \in C(R_+, R_+), L \in C\big(R_+, (0,\infty)\big), P \not\equiv 0$ اذ تم إيجاد الشروط الكافية والضرورية لتقييد الحلول غير السالبة كما تم بيان شروط تقارب الحل بصورة محاذية لتحديد قيد الحل.

وسنركز في دراستنا هذه على الحلول المقيدة لصنف من معادلات فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع المتباطئ حيث سنحاول استنتاج الشروط الضرورية للحصول على الحلول المقيدة في الحالات التي لا يمكن أن تنطبق عليها القضية التي تناولها Burton [15] والتي تنص على: (لتكن f دالة متجهة مستمرة على الفترة $[0,\infty)$ وان $|f(t)| \le M$، افرض أن $D(t,s)$ مصفوفة مستمرة من السعة $n \times n$ لقيم $0 \le s \le t < \infty$ ، إذا وجد $m < 1$ مع $\int_0^t |D(t,s)|\, ds \le m$ لقيم $0 \le t < \infty$ فأن كل الحلول من النوع

$$x(t) = f(t) + \int_0^t D(t,s)\, x(s) ds$$

تكون مقيدة).

1. تعاريف أساسية

لتكن لدينا معادلة فولتيرا التكاملية غير الخطية من النوع المتباطئ بالصيغة

$$y(t) = \int_{o}^{t} f(t, s, y(.))\, ds + h(t) \quad (2.1)$$

مع الشرط الابتدائي

$$y(t) = \varphi(t), t \in [-t_0, 0] \qquad (2.2)$$

إذ $t_0 \geq 0$ نقطة ثابتة وان الشروط الاتية متحققة:

أ) الدالة $f: R_+ \times R_+ \times C([-t_0, \infty), R^d) \to R^d$ هي دالة فولتيرا بمعنى ان f مستمرة وان $f\big(t, s, y(.)\big) = f(t, s, z(.))$ لكل $0 \leq s \leq t$ و $y, z \in C([-t_0, \infty), R^d)$ إذا كانت $y(\alpha) = z(\alpha), -t_0 \leq \alpha \leq s$. حيث R_+ هي مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة و R^d هو الفضاء من البعد d للمتجهات الحقيقية (real column vectors).

ب) لأي $0 \leq s \leq t$ و $y \in C([-t_0, \infty), R^d)$ فأن

$$|f_i(t, s, y(.))| \leq k_i(t, s)\emptyset\left(\max_{-t_0 \leq \vartheta \leq s} \|y(\vartheta)\|\right), i = 1, \dots, d$$

متحقق عندما $f = (f_1, \dots, f_d)^T$ وتكون $k_i: \{(t, s): 0 \leq s \leq t\} \to R_+, i = 1, \dots, d$ مستمرة وان $\emptyset: R_+ \to R_+$ تطبيق رتيب غير متناقص بحيث ان $\emptyset(\rho) > 0$ لأجل $\rho > 0$ و $\emptyset(0) = 0$.

ت) التطبيق $h: R_+ \to R^d$ مستمر وان $h(t) = (h_1(t), \dots, h_d(t))^T, t \geq 0$.

ث) $\psi \in C([-t_0, \infty), R^d)$.

ان $f(t, s, y(.))$ من الممكن ان ترمز الى حدود اعتيادية غير متأخرة زمنيا مثل

$$f\big(t, s, y(.)\big) = g(t, s, y(s), 0 \leq s \leq t$$

او ربما تحوي قيماً معتمدة على f من القيم التابعة للدالة $y(.)$. ويمكن وصف هذا بحد متأخر زمنياً ذو نقطة واحدة او على الشكل

$$f\big(t, s, y(.)\big) = g\big(t, s, y\big(s - \sigma(s)\big), 0 \leq s \leq t$$

او بعدة نقاط متأخرة زمنياً

$$f\big(t, s, y(.)\big) = g\left(t, s, y(s), y\big(s - \tau_1(s)\big), \dots, y\big(s - \tau_n(s)\big)\right), 0 \leq s \leq t$$

كذلك فإن التعبير $f(t, s, y(.))$ يمكن وصفه كتأخير زمني توزيعي بالصيغة:

$$f\big(t,s,y(.)\big) = g(t,s, \int_{s-\tau}^{s} b(s,u)x(u)du\,, 0 \le s \le t$$

أو ان اعتماد f على قيم سابقة من $y(.)$ بصورة اكثر عمومية.

تعريف (2−1) لتكن الدوال $\emptyset$ و i معرفة من الشرط [3]

لأي $0 \le s \le t$ و $y \in C([-t_0,\infty),R^d)$ فأن

$$|f_i(t,s,y(.))| \le k_i(t,s)\emptyset\left(\max_{-t_0\le\vartheta\le s}\|y(\vartheta)\|\right), i = 1,\dots,d$$

متحقق عندما $f = (f_1,\dots,f_d)^T$ وتكون $k_i: \{(t,s): 0 \le s \le t\} \to R_+, i = 1,\dots,d$ مستمرة وان $\emptyset: R^+ \to R^+$ تطبيق رتيب غير متناقص بحيث ان $\emptyset(\rho) > 0$ لأجل $\rho > 0$ و $\emptyset(0) = 0$.

نقول بأن الثابت غير السالب μ له الخاصية P_T عند $T \ge 0$ اذا وجد $w \ge \mu$ بحيث أن العلاقة

$$\emptyset(\mu)\int_0^T k_i(t,s)ds + \emptyset(w)\int_T^t k_i(t,s)ds + |h_i(t)| < w, t \ge T, i = 1,..,d \qquad (2.3)$$

متحققة.

تعريف (2−2) نقول إن الدالة الابتدائية $\psi \in C([-t_0,\infty),R^d)$ تنتمي الى المجموعة S اذا وجد $T \ge 0$ بحيث أن[3]

$$\mu_T = \max_{-t_0\le t\le T}\|x\|$$

له الخاصية P_T عندما $x: [-t_0,\infty) \to R^d$ هي حل للمعادلتين $(2.1) - (2.2)$.

ملاحظة إذا وجد $T \ge 0$ وثابتين موجبين مثل μ_T, w بحيث ان (2.1) متحققة عندئذ:

$$I_T = \max_{1\le i\le d}\sup_{t\ge T}\int_0^T k_i(t,s)\,ds < \infty \qquad (2.4)$$

$$J_T = \max_{1\le i\le d}\sup_{t\ge T}\int_T^t k_i(t,s)\,ds < \infty \qquad (2.5)$$

$$H_T = \max_{1\le i\le d}\sup_{t\ge T}|h_i(t)| < \infty \qquad (2.6)$$

ان كلا الشرطين (2.5), (2.4) مكافئين للعلاقة

$$J_0 = \max_{1\le i\le d} \sup_{t\ge T} \int_T^t k_i(t,s)\, ds < \infty \qquad (2.7)$$

واذا كانت $T = 0$ فأن الشرط (2.6) يصبح

$$H_0 = \max_{1\le i\le d} \sup_{t\ge 0} |h_i(t)| < \infty \qquad (2.8)$$

2. النتيجة الرئيسة

في هذا البند سنعطي الشروط اللازمة لوجود الحل المقيد للنظام (2.1)

مبرهنة $(1-3)$ لتكن الشروط (أ)−(ث) متحققة ولتكن الدالة الابتدائية ψ منتمية الى المجموعة S. عندئذ يكون الحل y لكلاً من $(2.2) - (2.1)$ مقيداً.

البرهان: بما ان الدالة الابتدائية ψ تنتمي الى المجموعة S ، من التعريف $(2-2)$ يوجد $T \ge 0$ بحيث أن $\mu_T = \max_{-t_0\le t\le T} \|x\|$ له الخاصية P_T وعندما يكون y حلاً لـ$(2.2) - (2.1)$

فمن المعادلة (2.1) نجد أن

$$y(t) = \int_o^T f(t,s,y(.))\, ds + \int_T^t f(t,s,y(.)\, ds + h(t), t \ge T$$

بالتالي فالشرط (ب) وعندما $i = 1, \dots, d$ يقودنا الى

$$|y_i(t)| \le \int_o^T \left|f_i\big(t,s,y(.)\big)\right| ds + \int_T^t \left|f_i\big(t,s,y(.)\big)\right| ds + |h_i(t)|$$

$$\le \int_o^T k_i(t,s)\, \emptyset\left(\max_{-t_0\le\vartheta\le s} \|y(\vartheta)\|\right) ds + \int_T^t k_i(t,s)\, \emptyset\left(\max_{-t_0\le\vartheta\le s} \|y(\vartheta)\|\right) ds + |h_i(t)|$$

$$\le \emptyset(\mu_T) \int_o^T k_i(t,s)\, ds + + \int_T^t k_i(t,s)\, \emptyset\left(\max_{-t_0\le\vartheta\le s} \|y(\vartheta)\|\right) ds + |h_i(t)|, t \ge T \qquad (3.1)$$

ليكن $w \ge \mu_T$ إذ تتحقق العلاقة (2.3) عند $\mu = \mu_T$ عندئذ وبصورة خاصة فإن

$$\emptyset(\mu_T) \int_0^T k_i(T,s) ds + |h_i(t)| < w, i = 1, \dots, d$$

كذلك فإن العلاقة (3.1) عند $t = T$ تضمن ان $|y_i(T)| < w$ لكل $i = 1, \dots, d$ وبالتالي يكون $\|y(T)\| < w$.

سنبين الان بأن $\|y(T)\|$ مقيد لكل قيم $t > T$. من اجل التناقض نفرض أن $\|y(T)\|$ دالة مقيدة، وبما أنها مستمرة وإن $\|y(T)\| < w$ يوجد $t_1 > T$ بحيث أن $\|y_1(T)\| > w$.

لتكن $\hat{t} = \inf\{t > T: \|y(T)\| > w\}$ فإن استمرارية كلاً من y و $\mu_T \le w$ تضمن تحقيق

$$\max_{-t_0 \le \alpha \le \hat{t}} \|y(\alpha)\| = \|y(\hat{t})\| = w$$

لهذا السبب يوجد i إذ أن $|y_i(\hat{t})| = w$. ومن المعادلة (3.1) عند $t = \hat{t}$ فإن رتابة التطبيق $\emptyset$ والاستفادة من امتلاك μ_T للخاصية P_T نحصل على

$$w = |y_i(\hat{t})| \le \emptyset(\mu_T) \int_o^T k_i(\hat{t}, s)\, ds + \int_T^{\hat{t}} k_i(\hat{t}, s)\, \emptyset\left(\max_{-t_0 \le \alpha \le s} \|y(\alpha)\|\right) ds + |h_i(\hat{t})|$$

$$\le \emptyset(\mu_T) \int_o^T k_i(\hat{t}, s)\, ds + \emptyset(w) \int_T^{\hat{t}} k_i(\hat{t}, s)\, ds + |h_i(\hat{t})|$$

$$< w$$

وهذا تناقض. لذا فإن الحل للمعادلة (2.1) يكون مقيداً بـ w.

3. بعض الحالات الخاصة بالمبرهنة (3−1)

في هذا البند سنعطي بعض الحالات التي تخص المبرهنة الرئيسة في بحثنا هذا وذلك من خلال فرض ان مكونات الدالة غير الخطية في المعادلة (2.1) يمكن تقديرها بدالة مثل $\emptyset(t) = t^p$ إذ $t > 0$ وعند $p > 0$ في الشرط (ب).

هناك ثلاث حالات لقيمة p وهي:

1) $0 < p < 1$.

2) $p = 1$.

3) $p > 1$.

المبرهنات التالية توضح الشروط الكافية ليكون الحل مقيدا لكل قيمة من قيم p أعلاه

مبرهنة (4−1) لتكن الشروط من (أ) الى (ث) متحققة و ان $\emptyset(t) = t^p$ بنقطة ثابتة $p \in (0,1)$. إذا كانت كل من (2.7), (2.8) متحققة فإن كل حلول المعادلة (2.1) مقيدة.

البرهان: من العلاقتين $(2.8), (2.7)$ يتبع ان $J_0 < \infty$ و $H_0 < \infty$. لتكن $\psi \in C([-t_0, \infty), R^d)$ و y هو الحل المطابق لـ $(2.2), (2.1)$. لأي $\mu_0 = \max_{-t_0 \le t \le 0} \|\psi(t)\|$ يوجد $w \ge \mu_0$ كبير كفاية إذ أن

$$w^{p-1} J_0 + \frac{1}{w} H_0 < 1 \qquad (4.1)$$

لذا

$$w^p J_0 + H_0 < w$$

من تعريف J_0, H_0 ينتج

$$w^p \int_0^t k_i\,(t,s) ds + |h_i(t)| \le w^p J_0 + H_0 < w, t \ge 0, i = 1, \dots, d$$

بالتالي بواسطة التعريف $(2-1)$ نجد ان μ_0 لها الخاصية P_T عند $T = 0$ وبما ان الشروط (أ)–(ث) متحققة وان μ_0 لها الخاصية P_T عندئذ وبوساطة المبرهنة $(3-1)$ يكون الحل مقيد. انتهى البرهان ▯

لنتوصل الى المبرهنة الثانية نفرض ان لدينا معادلة فولتيرا من الصيغة:

$$y(t) = \int_o^t k(t,s)\, y^p(s - (\tau(s)) ds + h(t), t \ge 0 \qquad (4.2)$$

مع الشرط

$$y(t) = \psi, t \in [-t_0, 0] \qquad (4.3)$$

إذ (($k: \{(t,s): 0 \le s \le t\} \to R^+$ و $h: R^+ \to R^+$ دوال مستمرة، وان $0 < p < 1$ و $\tau \in C(R^+, R^+)$ ، $t_0 = -\inf_{t \ge 0}\{t - \tau(t)\} > 0$ منته وان $\psi \in C([-t_0, 0], [0, \infty])$)) (ج)

ان الشرط أعلاه (ج) يضمن بأن تكون الحلول لكل من $(4.3), (4.2)$ موجبة.

نتيجة المبرهنة التالية تبين الشرط الضروري والكافي لتكون الحلول الموجبة للمعادلة (4.2) مقيدة. الجزء الضروري من المبرهنة القادمة مشابه للنتيجة التي توصل اليها Lipovan [13] والتي تم برهانها من اجل معادلة تكاملية من النوع الملتف.

مبرهنة $(2-4)$ افرض أنه لدينا الشرط (ج) وان

$$\lim_{t \to \infty} \inf \left(\int_o^t k(t,s) ds + h(t) \right) > 0 \qquad (4.4)$$

و

$$\int_{o}^{t} k(t,s)ds + h(t) > 0, t \geq 0 \qquad (4.5)$$

عندها يكون الحل للمعادلتين $(4.2),(4.3)$ مقيداً لكل $\psi \in C([-t_0,0],[0,\infty])$ اذا وفقط اذا كانت $(2.7),(2.8)$ متحققة.

البرهان: افرض ان $(2.7),(2.8)$ متحققة ، من الواضح أنه ومن مبرهنة $(1-4)$ فالحل لكل من $(4.2),(4.3)$ مقيد لكل قيم $\psi \in C([-t_0,0],[0,\infty])$.

بصورة عكسية ، ليكن الحل y مقيداً على R^+. في البداية سنثبت ان $y > 0$.

لنفرض من اجل التناقض أن $y(t) \leq 0$ لبعض قيم t عندها يوجد $\gamma > 0$ بحيث ان $y(t) > 0$ ، $t \in [0,\gamma)$ وان $y(\gamma) = 0$. من (4.5) يظهر وجود $\varepsilon > 0$ إذ

$$\int_{0}^{\gamma-\varepsilon} k(\gamma,s)\, ds + h(\gamma) > 0$$

من (4.2) عند $t = \gamma$ لدينا

$$\begin{aligned}
&0 = y(\gamma) \\
&= \int_{0}^{\gamma} k(\gamma,s)\, y^p\big(s-\tau(s)\big)ds + h(\gamma) \\
&\geq \int_{0}^{\gamma-\varepsilon} k(\gamma,s)\, y^p\big(s-\tau(s)\big)ds + h(\gamma) \\
&\geq \min_{-t_0 \leq \mu \leq \gamma-\varepsilon} y^p(\mu) \int_{0}^{\gamma-\varepsilon} k(\gamma,s)\, ds + h(\gamma) \\
&\geq \left(\int_{0}^{\gamma-\varepsilon} k(\gamma,s)\, ds + h(\gamma) \right) \Big(\min_{-t_0 \leq \mu \leq \gamma-\varepsilon} y^p(\mu)\, , 1 \Big) \\
&> 0
\end{aligned}$$

وهذا تناقض.

بصورة واضحة فإن قيمة y الموجبة تقودنا الى

$y(t) \geq h(t), \forall t \geq 0$

بالتالي فالشرط (2.8) متحقق.

الان سنثبت (2.7) ، لأي $t \geq T^* > 0$ نحصل على

$$y(t) \geq \int_0^{T^*} k(t,s)\, y^p\big(s-\tau(s)\big)ds \geq \min_{-t_0 \leq \mu \leq T^*} y^p(\mu) \int_0^{T^*} k(t,s)\, ds + h(\gamma)$$

لذا فإن

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^{T^*} k(t,s)\, ds < \infty \qquad (4.6)$$

نعرف الان

$$m = \lim_{t \to \infty} \inf y(t)$$

وهو قيمة منتهية. لنثبت أن $m > 0$ نفرض من اجل التناقض أن $m = 0$. في هذه الحالة نستطيع إيجاد متتابعة متزايدة $(t_n)_{n \geq 1}$ بحيث أن

$$y(t_n) = \inf_{-t_0 \leq t \leq t_n} y(t) > 0$$

وإن $y(t_n)$ يقترب من الصفر عندما تقترب n من اللانهاية.

من (4.2) عند قيمة $t = t_n$ نجد

$$y(t_n) = \int_0^{t_n} k(t_n,s)\, y^p\big(s-\tau(s)\big)ds + h(t_n)$$

$$\geq \int_0^{t_n} k(t_n,s) \inf_{-t_0 \leq \mu \leq t_n} y^p(\mu) ds + h(t_n)$$

$$= y^p(t_n) \int_0^{t_n} k(t_n,s)\, ds + h(t_n)$$

بما أن $y(t_n) > 0$ ، لدينا

$$y^{1-p}(t_n) \geq \int_0^{t_n} k(t_n, s)\, ds + \frac{h(t_n)}{y^p(t_n)}$$

ومن اجل قيمة كبيرة كفاية لـ n إذ أن $0 < y^p(t_n) \leq 1$ ينتج لدينا

$$y^{1-p}(t_n) \geq \int_0^{t_n} k(t_n, s)\, ds + h(t_n)$$

بأخذ الغاية للمتباينة أعلاه

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{t_n} k(t_n, s)\, ds + h(t_n) = 0$$

والتي تناقض (4.4) . لذا فإن $m > 0$ لذلك $T^* \geq 0$ بحيث أن

$$y(t) \geq \frac{1}{2} m > 0, t \geq T^*$$

بالنتيجة

$$y(t) = \int_o^t k(t,s)\, y^p\big(s - \tau(s)\big) ds + h(t)$$

$$\geq \int_{T^*}^t k(t,s)\, y^p\big(s - \tau(s)\big) ds$$

$$\geq \frac{1}{2^p} m^p \int_{T^*}^t k(t,s)\, ds, t \geq T^*$$

بالاستفادة من كون الحل y مقيد نحصل على

$$\sup_{t \geq T^*} \int_{T^*}^t k(t,s)\, ds < \infty$$

والمتباينة أعلاه والمعادلة (4.6) تضمن تحقيق الشرط (2.7).

مبرهنة (4−3) افرض أن الشروط (أ)−(ب) متحققة وان $\emptyset(t) = t, t \geq 0$ عندئذ جميع الحلول للمعادلة (2.1) مقيدة وإذا كان لبعض قيم $T \geq 0$ فعندها يتحقق أحد الشرطين التاليين:

(1أ) كل من (2.4) ,(2.6) متحققة وأن

$$J_T = \max_{1\leq i\leq d} \sup_{t\geq T} \int_T^t k_i(t,s)ds < 1, i = 1, \dots, d. \qquad (4.7)$$

(2ب) لكل قيم $t \geq T$ و $i = 1, \dots, d$ فإن

$$J_T = \max_{1\leq i\leq d} \sup_{t\geq T} \int_T^t k_i(t,s)ds = 1, \qquad \int_T^t k_i(t,s)ds < 1$$

$$\sup_{t\geq T} \left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1} \int_0^T k_i(t,s)ds < \infty \qquad (4.8)$$

و

$$\sup_{t\geq T} \left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1} |h_i(t)| < \infty \qquad (4.9)$$

البرهان: لتكن $\psi \in C([-t_0, 0], R^d)$ وإن y هو حل للمعادلتين (2.1) ,(2.2) سنبين أن y مقيد إذا تحقق كل من (1أ) و (2ب). ليكن

$$\mu_T = \max_{-t_0\leq t\leq T} \|y(t)\|$$

في البداية سنبرهن أن μ_T له الخاصية P_T تحت الشرط (1أ). بواسطة المعادلة (2.4) ,(2.6) يكون لدينا $I_T < \infty$ و $H_T < \infty$ لهذا يوجد $w \geq \mu_T$ بحيث أن

$$(1 - J_T)^{-1}(\mu_T I_T + H_T) < w$$

وكذلك

$$\mu_T I_T + H_T < (1 - J_T)w$$

بالتالي ولكل قيم $t \geq T, i = 1, \dots, d$ نحصل على

$$\mu_T \int_0^T k_i(t,s)ds + |h_i(t)| \leq \mu_T I_T + H_T < (1 - J_T)w \leq \left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right) \mathrm{w}$$

لهذا السبب

$$\mu_T \int_0^T k_i(t,s)ds + w\int_T^t k_i(t,s)ds + |h_i(t)| < w, t \geq T, i = 1, \dots, d$$

عندئذ μ_T له الخاصية P_T ولهذا وبواسطة المبرهنة $(3-1)$ فان الحل للمعادلة (2.1) مقيد.

سنثبت لاحقا ان μ_T له الخاصية P_T اذا كان الشرط (2ب) متحقق.

لكل قيم $t \geq T$ لدينا

$$\left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1} > 0, i = 1, \dots, d$$

فإن (4.9), $(4.8$ $)$ تضمن لنا بأن

$$\sup_{t\geq T}\left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1}\left\{\mu_T\int_0^T k_i(t,s)ds + |h_i(t)|\right\} < \infty$$

عندئذ يوجد $w \geq \mu_T$ كبير كفاية إذ أن

$$\left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1}\left\{\mu_T\int_0^T k_i(t,s)ds + |h_i(t)|\right\} < w, t \geq T$$

والذي يؤدي الى

$$\mu_T \int_0^T k_i(t,s)ds + \mathrm{w}\int_T^t k_i(t,s)ds + |h_i(t)| < w, t \geq T, i = 1, \dots, d$$

عند ذلك فإن μ_T له الخاصية P_T وبالتالي وحسب المبرهنة $(3-1)$ فإن الحل y للمعادلة (2.1) يكون مقيداً.

مبرهنة (4−4) افرض ان الشروط (أ)−(ب) متحققة وان $\emptyset(\mathrm{t}) = t^p, t > 0$ عندما $p > 1$ ، العلاقتين (2.8), (2.7) ، $J_0 > 0$ ولتكن $\|\psi\|_{t_0} = \max_{-t_0\leq t\leq 0}\|\psi\|$ عندها فان الحل y للمعادلتين (2.2), (2.1) مقيد اذا تحققت احدى الشروط التالية:

(1) $\|\psi\|_{t_0} = \left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ و $H_0 < \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{1}{p-1}}$.

(2) $H_0 < \|\psi\|_{t_0} - J_0\left(\|\psi\|_{t_0}\right)^p$.

البرهان: افرض ان (2.8), (2.7) متحققة

(1) بما أن $\|\psi\|_{t_0} = \left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ و $\left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{1}{p-1}} - J_0\left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ $= H_0 < \frac{p-1}{p}\left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ فأن

$w = \left(\frac{1}{pJ_0}\right)^{\frac{1}{p-1}}$ يحقق المتباينة

$$H_0 < w - J_0 w^p \ldots\ldots\ldots (4.10)$$

(2) بما أن $H_0 < \|\psi\|_{t_0} - J_0\left(\|\psi\|_{t_0}\right)^p$ وان $w = \|\psi\|_{t_0}$ تحقق المتباينة (4.10) .

بالتالي ففي كلتا الحالتين فان الشرط (2.3) يتحقق عند $T = 0$ لذلك $\mu_0 = \|\psi\|_{t_0}$ له الخاصية P_0 لذا فأن شروط المبرهنة (3−1) متحققة وعليه فإن الحل للمعادلة (2.1) مقيد.

4. مثال تطبيقي

لنوضح المبرهنة (4−3) في حالة متى ما كان الشرط (لكل قيم $t \geq T$ و $i = 1, \ldots, d$ فإن

$$J_T = \max_{1\leq i\leq d} \sup_{t\geq T} \int_T^t k_i(t,s)ds = 1, \qquad \int_T^t k_i(t,s)ds < 1$$

$$\sup_{t\geq T}\left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1} \int_0^T k_i(t,s)ds < \infty \qquad (5.1)$$

و

$$\sup_{t\geq T}\left(1 - \int_T^t k_i(t,s)ds\right)^{-1} |h_i(t)| < \infty \qquad (5.2)$$

متحققاً لقيمة كبيرة كفاية لـ T.

لتكن لدينا المعادلة التالية

$$y(t) = \int_0^t \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-2|t-\ln 2|}} e^{-2(t-s)} y(s)ds + ce^{-2t}, t \geq 0$$

لدينا هنا $h(t) = ce^{-2t}$ و $c \in R$ وان $t_0 = 0$, $k(t,s) = \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-2|t-\ln 2|}}$

من الواضح أن

$$\sup_{t\geq 0}|h(t)| = |c| < \infty$$

وان

$$\int_0^t k(t,s)\,ds = \int_0^t \frac{2}{1-\frac{1}{2}e^{-2|t-\ln 2|}} e^{-2(t-s)} ds$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-2|t-\ln 2|}}(1-e^{-2t})$$

لهذا

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t k(t,s)\,ds = 1$$

لنضع $T_1 = \ln 2$ فإن

$$\int_0^{T_1} k(T_1,s)\,ds = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)}\left(1-e^{-2\ln 2}\right) = \frac{3}{2} > 1$$

وهذا يعني ان

$$\sup_{t\geq 0} \int_0^t k(t,s)\,ds = M > 1$$

لذا فإن شروط المبرهنة $(3-4)$ لا تتحقق عندما $T = 0$.

إذا أخذنا $T = \ln 5$ فسنحصل على

$$\int_T^t k(t,s)\,ds = \frac{1-25e^{-2t}}{1-2e^{-2t}} < 1, t \geq T$$

وأن

$$\sup_{t\geq 0} \int_T^t k(t,s)\,ds = 1$$

وبناءً على هذا يكون لدينا

$$\left(1-\int_{T}^{t} k(t,s)\,ds\right)^{-1}\int_{0}^{T} k(t,s)\,ds=\frac{24e^{-2t}(1-2e^{-2t})}{23e^{-2t}(1-2e^{-2t})}=\frac{24}{23},t\geq T$$

و

$$\left(1-\int_{T}^{t} k(t,s)\,ds\right)^{-1}|h(t)|=\frac{(1-2e^{-2t})}{23e^{-2t}}|c|e^{-2t},t\geq T$$

لذا فإن الشرط الثاني للمبرهنة $(4-3)$ يتحقق بهذه القيمة لـ T ، لذلك فالحل y مقيد.

نلاحظ هنا أن القضية $(1.4.2)$ في $[15]$ لا يمكن تطبيقها لهذا المثال لكن الشروط الكافية التي حصلنا عليها خلال البحث يمكن استعمالها.

5. الاستنتاجات

إن النتيجة الرئيسة لهذا البحث (مبرهنة $(3-1)$) قد أعطت الشروط الكافية لضمان تقييد الحلول لفئة كبيرة من معادلات فولتيرا التكاملية ذات التأخير الزمني والتي اعتمدت على متباينة خاصة وتقنية المقارنة كما أعطت المبرهنة $(4-1)$ ضمان وجود الحل المقيد لمعادلات فولتيرا التكاملية في حالة كونها شبه خطية وبينت المبرهنة $(4-2)$ الشروط الضرورية والكافية للحلول المقيدة في حالة المعادلات شبه الخطية والملتفة عددياً (scalar convolution) والتي توضح ان الشروط المعطاة ليست كافية وحسب وانما ضرورية كذلك ليكون الحل مقيداً بالإضافة الى ما سبق فقد تم إيضاح تقييد الحلول لمعادلات فولتيرا التكاملية الخطية والتي يمكن تطبيقها في الحالة الحرجة من خلال المبرهنة $(4-3)$ واخيراً وليس اخراً بينت المبرهنة $(4-4)$ الشروط الكافية للحلول المقيدة لمعادلات فولتيرا التكاملية فوق الخطية وفي النهاية تم إعطاء مثال توضيحي اثبتنا من خلاله انه يمكن تطبيق النتائج التي توصلنا اليها في حالة ان الطريقة المعروفة التي اعتمدها Burton [15] لا يمكن تطبيقها.

المصادر

[1] A. Vecchio, J. Int. Eqs. Appl. 12 no. 4, 449-465 (2000),.

[2] C. Corduneanu, "Integral Equations and Stability of Feedback Systems", 1st Ed. Academic Press, New York and London (1973).

[3] C. Corduneanu, "Integral Equations and Applications", Reissue edition. Cambridge University Press (2008).

[4] C. Cuevas and M. Pinto, Journal of Computational and Applied Mathematics, Volume 113, Issues 1–2, Pages 217-225, 1 January (2000).

[5] E.N. Chukwu, "Stability and Time-Optimal Control of Hereditary Systems", Volume 188,1st Ed. Academic Press (1992).

[6] H. Brunner, Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations, 1st Ed. Cambridge University Press, New York (2004).

[7] J.A.D. Appleby, I. Gyori, and D. Reynolds, Journal of Difference Equations and Applications Volume 12, 1257-1275 (2006).

[8] J.A.D. Appleby, István Gyori, David W. Reynolds, J. Math. Anal. Appl. 320 56-77 (2006).

[9] J. Chiasson and J.J. Loiseau, "Applications of Time Delay Systems", 1st Ed. Springer, Berlin, Heidelberg (2007).

[10] K. Gopalsamy, "Stability and Oscillation in Delay Differential Equations of Population Dynamics", 1st Ed. Springer (1992).

[11] M. Rahman, "Integral Equations and their Applications", 1st Ed. WIT Press, USA, Canada and Mexico (2007).

[12] N. MacDonald, "Time-lags in Biological Models, Lecture notes in Biomathematics", 1st Ed. Springer, Berlin (1978).

[13] O. Lipovan, On the asymptotic behavior of solutions to some nonlinear integral equations of convolution type. Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems. Series A: Mathematical Analysis, 16 (2), 147-154 (2009).

[14] T.A. Burton, Boundedness in functional differential equations, Funkcialaj Ekvacioj 25, 51-77 (1982).

[15] T.A. Burton, "Volterra Integral and Differential Equations", 2nd Ed. Elsevier (2005).

[16] T. Erneux, "Applied Delay Differential Equations", 1st Ed. Springer (2009).

[17] T. Insperger and G. Stepan, "Semi-discretization for Time-delay Systems", Stability and Engineering Applications, 1st Ed. Springer (2011).

[18] Y. Kuang, "Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics", 1st Ed. Academic Press, Boston (1993).